

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

JEFFERSON VIANA AGUIAR

**CÁLCULO DOS ESFORÇOS RESISTENTES E DA MATRIZ CONSTITUTIVA
TANGENTE EM SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À FLEXÃO
COMPOSTA OBLÍQUA**

FORTALEZA

2013

JEFFERSON VIANA AGUIAR

**CÁLCULO DOS ESFORÇOS RESISTENTES E DA MATRIZ CONSTITUTIVA
TANGENTE EM SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À FLEXÃO
COMPOSTA OBLÍQUA**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

-
- A229c Aguiar, Jefferson Viana.
Cálculos dos esforços resistentes e da matriz construtiva tangente em seções de concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua. / Jefferson Viana Aguiar. – 2013.
91f.: il. color.; 30 cm.
- Monografia (Graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Curso de Engenharia Civil, Fortaleza, 2013.
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Júnior.
1. Não linearidade física. 2. Teorema de Green. 3. Integração de Gauss. I. Título.

CDD 620

JEFFERSON VIANA AGUIAR

**CÁLCULO DOS ESFORÇOS RESISTENTES E DA MATRIZ CONSTITUTIVA
TANGENTE EM SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À FLEXÃO
COMPOSTA OBLÍQUA**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior

Aprovada em 26/07/2013.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Evandro Parente Junior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Áurea Silva de Holanda
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À Deus.

Aos meus pais, Josimar e Virginia.

Aos meus irmãos, Gustavo, Stefanie e Silvia.

À minha amiga e namorada Aline.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente à Deus por todas as condições, oportunidades e portas que ele abriu na minha vida para que pudesse não apenas concluir este trabalho, mas o curso de Engenharia Civil. Também não posso esquecer-me da minha família que foi uma inspiração para que eu pudesse me esforçar nos estudos e sempre almejar grandes objetivos na minha vida.

Um agradecimento especial ao Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV), mais precisamente, ao Prof. Evandro Parente Junior pelo excelente acompanhamento no desenvolvimento deste trabalho, inclusive realizando reuniões fora do horário estabelecido e, também, dando suporte via e-mail fora do seu horário de trabalho.

“O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.” (Albert Einstein)

RESUMO

AGUIAR, J. V. Cálculo dos Esforços Resistentes e da Matriz Constitutiva Tangente em Seções de Concreto Armado Submetidas à Flexão Composta Oblíqua. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

Estruturas de concreto armado apresentam comportamento mecânico complexo devido à presença das não linearidades física e geométrica. Apesar do comportamento não linear apresentado pelas estruturas de concreto armado, a análise utilizada atualmente para fins de projeto é baseada no uso de modelos lineares. Como a análise não linear permite uma simulação mais realista do comportamento das estruturas de concreto armado, é importante desenvolver métodos que viabilizem o seu uso em projeto. Na análise não linear de pórticos espaciais pelo Método dos Elementos Finitos é necessário realizar a integração dos esforços e da matriz constitutiva tangente na seção transversal dos elementos. Como as equações de equilíbrio não lineares devem ser resolvidas de forma iterativa, as integrais sobre as seções transversais devem ser avaliadas várias vezes. Portanto, é de fundamental importância que o cálculo destas integrais seja feitos da forma mais eficiente possível, mas sem sacrificar a precisão dos resultados. Este trabalho apresenta uma revisão dos principais métodos para integração dos esforços e da matriz tangente em seções de concreto armado. A partir dos métodos pesquisados foi proposto, neste trabalho, um método para a integração em seções poligonais baseado na transformação das integrais na seção para o contorno da seção, com o emprego do Teorema de Green. As integrais nos segmentos do contorno são calculadas numericamente por meio da quadratura de Gauss. O uso do Teorema de Green torna o método proposto capaz de tratar seções poligonais com qualquer geometria e o uso da quadratura de Gauss torna o método aplicável a materiais com qualquer curva tensão-deformação. Foi desenvolvido um algoritmo para subdivisão automática dos segmentos do contorno de acordo com os trechos utilizados na definição das curvas tensão-deformação. O uso deste algoritmo aumenta a precisão do método, pois a integração de Gauss é realizada por trechos, fazendo com que as funções a serem integradas sejam suaves. O método proposto foi implementado computacionalmente e utilizado no cálculo dos esforços internos e da matriz constitutiva tangente de diversos exemplos, incluindo geometrias complexas e curvas tensão-deformação polinomiais e não polinomiais definidas por trechos. Os resultados obtidos foram comparados com resultados disponíveis na literatura ou calculados pelo Método das Fibras, que é uma metodologia de simples aplicação e vastamente utilizada na literatura. Com base nos resultados obtidos pode-se concluir que o método proposto é bastante robusto, preciso e eficiente, representando uma importante contribuição para a análise não linear de estruturas de concreto.

Palavras-chave: Não linearidade física, Teorema de Green, Integração de Gauss.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Exemplo de Curva de Equilíbrio (a) Linear e (b) Não Linear	17
Figura 2 – Diagrama tensão-deformação do concreto na compressão	19
Figura 3 – Diagrama tensão-deformação bilinear do concreto na tração	20
Figura 4 – Diagrama tensão-deformação para aços de armadura passiva	20
Figura 5 – Consideração do efeito <i>tension-stiffening</i>	21
Figura 6 – Consideração do efeito <i>tension-stiffening</i> bi-linear	22
Figura 7 – Curva utilizada por Zupan e Saje (2005)	23
Figura 8 – Diagrama tensão-deformação para concreto na compressão	24
Figura 9 - Configuração indeformada e deformada da viga baseada nas hipóteses da TCV ..	28
Figura 10 – Seção transversal submetida à flexão composta oblíqua	30
Figura 11 – Sistema de eixos local e global	35
Figura 12 – Sistema de eixos local e global	38
Figura 13 - Curva <i>C</i> fechada, simples, seccionalmente suave	47
Figura 14 - Exemplo de regiões simplesmente (a) e multiplamente (b) conexas	47
Figura 15 - Exemplo do uso do teorema para regiões multiplamente conexas	48
Figura 16 - Discretização do contorno <i>C</i> em segmentos de retas	48
Figura 17 – Integral definida	50
Figura 18 – Decomposição de uma seção transversal de um pilar de concreto	54
Figura 19- Segmento de reta genérico de uma poligonal qualquer	56
Figura 20 - Exemplo de seção poligonal compatibilizado com o plano de tensões	58
Figura 21 – Subdivisão da seção por sub-regiões	59
Figura 22 – Eliminação dos segmentos de transição	60
Figura 23 – Sem possibilidade de eliminação dos segmentos de transição	61
Figura 24 – Subdivisão de cada segmento	62
Figura 25 – Exemplo a ser testado	69
Figura 26 – Desenho gerado pelo programa	70
Figura 27 – Exemplo a ser testado	71
Figura 28 – Desenho gerado pelo programa	71
Figura 29 – Exemplo a ser testado	73
Figura 30 – Desenho gerado pelo programa no caso <i>a</i> ₄	74
Figura 31 – Exemplo a ser testado	76
Figura 32 – Desenho gerado pelo programa	77

Figura 33 – Exemplo a ser testado.....	79
Figura 34 – Desenho gerado pelo programa.....	79
Figura 35 – Exemplo a ser testado.....	81
Figura 36 – Desenho gerado pelo programa.....	81
Figura 37 – Resultado Zupan e Saje sistema de eixos local	82
Figura 38 – Exemplo a ser testado.....	83
Figura 39 – Desenho gerado pelo programa.....	84
Figura 40 – Gráfico do erro do Método das Fibras com o aumento das divisões	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características das metodologias de análise de seções	42
Tabela 2 – Pontos e Pesos da quadratura de Gauss	53
Tabela 3 – Número de pontos de Gauss para o diagrama parábola-retângulo	66
Tabela 4 – Resultados Obtidos	70
Tabela 5 – Resultados Obtidos	72
Tabela 6 – Estados de Deformação	73
Tabela 7 – Resultados obtidos para os diversos casos	74
Tabela 8 – Dados de entrada.....	76
Tabela 9 – Comparaçāo com resultados da literaturas	77
Tabela 10 – Comparaçāo dos resultados com curva equivalente a polinômio do 4º grau.....	80
Tabela 11 – Comparaçāo dos resultados com curva equivalente a polinômio do 4º grau.....	82
Tabela 12 – Posições das barras de aço	84
Tabela 13 – Comparaçāo Mētodos das Fibras x metodologia atual	85

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos.....	15
1.2	Metodologia.....	16
1.3	Organização do texto.....	16
2	NÃO LINEARIDADE DOS MATERIAIS E ESTRUTURAS.....	17
2.1	Análise linear x análise não linear	17
2.2	Não linearidade física	18
2.3	NBR 6118:2003 e suas considerações.....	24
3	FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA	27
3.1	Hipóteses.....	27
3.2	Campo de deslocamentos.....	27
3.3	Relação deformação-deslocamento.....	29
3.4	Relação tensão-deformação	30
3.5	Esforços internos	30
3.6	Matriz constitutiva	32
3.7	Matriz constitutiva tangente.....	33
3.8	Rotação para o sistema de eixos local	35
3.9	Esforços internos no sistema de eixos local	36
3.10	Matriz constitutiva tangente no sistema de eixos local	37
3.11	Retornando ao sistema de eixos global	38
3.12	Contribuição do aço	39
4	INTEGRAÇÃO NA SEÇÃO TRANSVERSAL	42
4.1	Domínio de integração	46
4.1.1	<i>Integração na área</i>	46
4.1.2	<i>Integração no contorno</i>	46
4.2	Forma de integração	49
4.2.1	<i>Analítica.....</i>	49
4.2.2	<i>Numérica.....</i>	49
4.3	Método das Fibras	54
4.4	Método proposto.....	55
4.4.1	<i>Implementação computacional</i>	67
5	EXEMPLOS.....	68

5.1	Seção retangular – material elástico linear	68
5.2	Seção em L – material elástico linear	71
5.3	Seção retangular de Nogueira (2013).....	72
5.4	Seção retangular de Fafitis (2001)	75
5.5	Seção I de Zupan e Saje (2005)	78
5.6	Retângulo vazado de Zupan e Saje (2005)	80
5.7	Seção em L de concreto armado	82
6	CONCLUSÃO	87
6.1	Trabalhos Futuros.....	88
	REFERÊNCIAS	90

1 INTRODUÇÃO

Estruturas de concreto armado apresentam comportamento mecânico complexo devido à presença das não linearidades física e geométrica. A não linearidade física está relacionada aos fenômenos de fissuração e plastificação do concreto e plastificação da armadura, fazendo com que as relações tensão-deformação sejam não lineares. Por outro lado, a não linearidade geométrica ocorre quando os deslocamentos são grandes, fazendo com que a relação deslocamento-deformação seja não linear.

Apesar do comportamento não linear apresentado pelas estruturas de concreto armado, a análise utilizada atualmente para fins de projeto é baseada no uso de modelos lineares. Esta análise é baseada nas hipóteses de pequenos deslocamentos e comportamento elástico linear do material (lei de Hooke). Fatores de correção prescritos em normas técnicas são utilizados para considerar os efeitos não lineares de forma aproximada.

As principais razões que limitam o uso da análise não linear são a sua maior complexidade e maior custo computacional. Como a análise não linear permite uma simulação mais realista do comportamento das estruturas de concreto armado, é importante desenvolver métodos que viabilizem o seu uso em projeto, principalmente no que diz respeito à eficiência. É importante notar que parte significativa das estruturas de concreto armado é composta por elementos unidimensionais, como vigas e pilares, ligados rigidamente. Este tipo de estrutura pode ser analisada com boa precisão utilizando o modelo de pórtico espacial.

A análise não linear física de pórticos através do Método dos Elementos Finitos (MEF) requer a integração dos esforços resistentes e da matriz constitutiva tangente nas seções transversais das barras (FONSECA, 2006; NOGUEIRA, 2013). Como os métodos numéricos para solução das equações de equilíbrio não lineares são iterativos, as integrais nas seções transversais devem ser avaliadas várias vezes. Adicionalmente, estruturas de edifícios podem conter centenas de elementos estruturais, fazendo com que a eficiência do processo de integração seja fundamental para viabilizar a análise não linear.

É importante notar que a precisão dos esforços e deslocamentos calculados depende diretamente da precisão do processo de integração adotado. Portanto, a precisão do método de integração é fundamental para o sucesso da análise não linear. Infelizmente, a integração dos esforços e da matriz tangente é um problema complexo, principalmente no caso de pórticos espaciais, cujas barras estão submetidas à flexão composta oblíqua.

Esta complexidade se deve à geometria das seções utilizadas, bem como às relações tensão-deformação utilizadas para representar o comportamento mecânico do concreto.

É importante notar que este tema tem chamado atenção de diversos pesquisadores, como Werner (1974), Rotter (1985), Dumont e Musso Jr. (1987), Fafitis (2001), Bonet *et al* (2004), Zupan e Saje (2005), Sousa Jr. e Caldas (2005), Sousa Jr. e Muniz (2007), Chiorean (2010) e Papanikolaou (2012). Portanto, trata-se de tema relevante e atual.

O método de integração proposto neste trabalho utiliza a integração no contorno da seção, com o emprego do Teorema de Green, associado à integração numérica por meio da quadratura de Gauss. O uso do Teorema de Green torna o método proposto capaz de tratar seções com qualquer geometria e o uso da quadratura de Gauss torna o método aplicável a materiais com qualquer curva tensão-deformação. Adicionalmente, o uso da quadratura de Gauss simplifica a implementação computacional.

O método proposto é exato para seções poligonais e relações tensão-deformação definidas por trechos polinomiais, como o caso de diagrama parábola-retângulo utilizado pela NBR 6118:2003 para representar o comportamento do concreto. No caso de curvas tensão-deformação não polinomiais os resultados obtidos são aproximados, mas uma elevada precisão pode ser obtida utilizando um número adequado de pontos de Gauss.

É importante notar que o método desenvolvido neste trabalho incorpora vários aspectos presentes em métodos propostos anteriormente. Assim, a integração no contorno via Teorema de Green foi proposta inicialmente por Werner (1974) e depois por Rotter (1985), Dumont e Musso Jr. (1987), Fafitis (2001), Bonet *et al* (2004), Zupan e Saje (2005), Sousa Jr. e Caldas (2005), Sousa Jr. e Muniz (2007), Chiorean (2010) e Papanikolaou (2012).

A rotação para um sistema local onde a seção encontra-se em flexão composta reta foi utilizada por Rotter (1985), Dumont e Musso Jr. (1987), Fafitis (2001), Bonet *et al* (2004), Zupan e Saje (2005), Chiorean (2010) e Papanikolaou (2012). A integração das funções no contorno utilizando a quadratura de Gauss foi proposta inicialmente por Fafitis (2001) e depois utilizada por Zupan e Saje (2005), Chiorean (2010) e Papanikolaou (2012).

O trabalho de Papanikolaou (2012) incorpora as principais contribuições anteriores, sintetizadas no trabalho de Fafitis (2001), e propõe como melhorias a subdivisão dos segmentos em trechos de acordo com a curva tensão deformação, o uso de um número variável de pontos de Gauss por trecho com curva polinomial e a utilização de integração adaptativa no caso de curvas não polinomiais.

É importante notar que os trabalhos de Fafitis (2001) e Papanikolaou (2012) tinham como objetivo apenas a integração dos esforços internos. Assim, a abordagem destes autores foi generalizada no presente trabalho para realizar também o cálculo da matriz constitutiva tangente. Adicionalmente, foram propostas melhorias com objetivo de tornar o método mais simples e robusto.

Dentre as melhorias propostas neste trabalho destacam-se a utilização da equação paramétrica dos segmentos de reta na obtenção das integrais no contorno por meio do Teorema de Green, o desenvolvimento de um algoritmo eficiente para a subdivisão dos segmentos em trechos e uma abordagem mais simples e eficiente para tratar curvas tensão-deformação não polinomiais.

O uso das equações paramétricas, no lugar das cartesianas utilizadas por outros autores, tem vantagens tanto do ponto de vista teórico quanto computacional. No aspecto teórico, as expressões obtidas demonstram claramente que, mesmo no cálculo da matriz tangente, não existe a necessidade de divisão da seção em regiões de acordo com as trechos da curva tensão-deformação, como realizado por Bonet *et al* (2004) e Sousa Jr. e Muniz (2007). No aspecto computacional, as expressões obtidas utilizando esta abordagem são mais adequadas para o uso da integração de Gauss e eliminam a possibilidade de divisões por zero ou necessidade do uso de tolerâncias para evitar estas divisões.

1.1 Objetivos

Este trabalho visa contribuir para a viabilização da análise não linear de pórticos espaciais através do desenvolvimento de um método preciso e eficiente para o cálculo dos esforços internos e da matriz constitutiva tangente de seções de concreto armado.

Como objetivos específicos, pretende-se:

- a) Apresentar os principais métodos existentes para a obtenção dos esforços internos e da matriz constitutiva tangente de seções de concreto armado;
- b) Desenvolver um método para integração dos esforços e da matriz constitutiva tangente utilizando uma metodologia que associe a integração no contorno, por meio do teorema de Green, e a integração numérica, por meio das quadraturas de Gauss;
- c) Avaliar a eficiência e precisão do método proposto através de exemplos da literatura;
- d) Comparar os resultados obtidos nesse trabalho com o Método das Fibras.

1.2 Metodologia

Inicialmente foi realizada uma revisão bibliográfica sobre os conceitos e os tipos de não linearidades presentes nas estruturas de concreto armado. Em seguida foi realizada revisão bibliográfica para identificação e entendimento das diversas técnicas de integração dos esforços e da matriz constitutiva tangente na seção transversal. A pesquisa teve como foco artigos publicados em periódicos internacionais.

A revisão bibliográfica permitiu identificar o estado da arte dos procedimentos para integração dos esforços e da matriz tangente, incluindo os pontos positivos e negativos dos métodos existentes. Assim, decidiu-se pelo uso da integração no contorno, via Teorema de Green, combinado à integração numérica utilizando a quadratura de Gauss.

Após o desenvolvimento da formulação matemática foi realizada a implementação computacional do método. A formulação e a implementação computacional foram verificadas por meio da comparação dos resultados com os resultados apresentados na literatura e com resultados do Método das Fibras. Esta comparação foi realizada para diferentes seções e relações tensão-deformação, mostrando que o método proposto é preciso e eficiente.

1.3 Organização do texto

O trabalho está dividido em 6 (seis) capítulos. No Capítulo 2 é feita uma discussão sobre análise linear e análise não linear, e são identificadas as principais fontes de não linearidades nas estruturas (a geométrica, a física e a de contato) e é exposto as considerações da NBR 6118:2003.

No Capítulo 3 é apresentada toda a formulação matemática utilizada, assim como as hipóteses e considerações adotadas no caso de seções submetidas à flexão composta oblíqua.

No Capítulo 4 é apresentada inicialmente uma revisão bibliográfica sobre os métodos de integração dos esforços internos e da matriz constitutiva tangente na seção transversal. Em seguida, é apresentada a formulação do método proposto neste trabalho.

No Capítulo 5 são expostos os resultados sobre a avaliação da precisão e eficiência da metodologia proposta neste trabalho. Os resultados desta metodologia são comparados com resultados apresentados na literatura ou calculados pelo Método das Fibras.

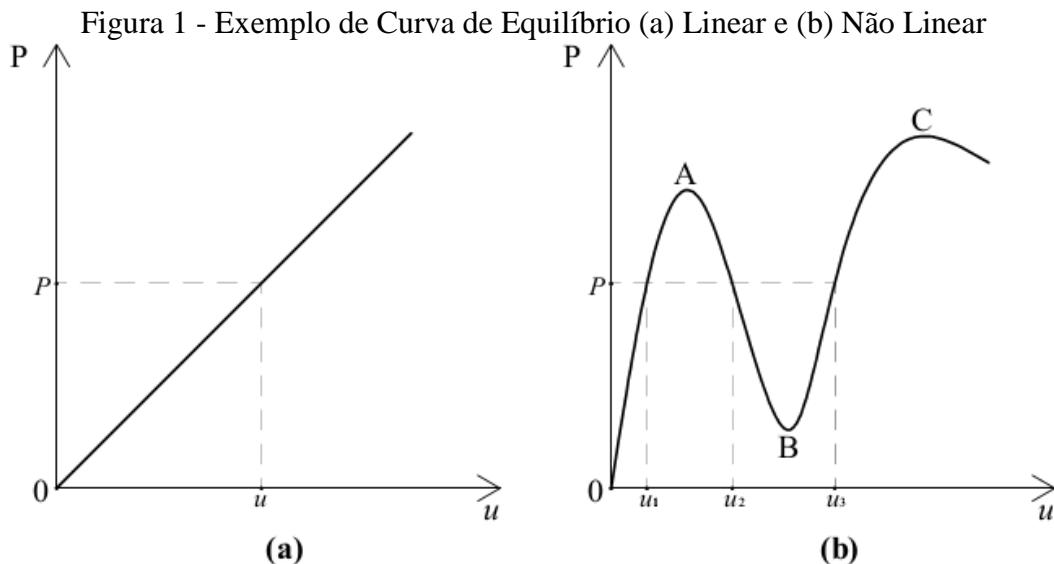
As conclusões, bem como sugestões para futuros trabalhos de pesquisa, são apresentadas no Capítulo 6.

2 NÃO LINEARIDADE DOS MATERIAIS E ESTRUTURAS

Neste tópico será feita uma breve comparação de análise linear e análise não linear, além de discorrer brevemente sobre os tipos de não linearidades, com um foco na não linearidade física.

2.1 Análise linear x análise não linear

O comportamento linear de elementos estruturais ocorre quando, independente da carga aplicada à estrutura ou elemento, a curva carga-deslocamento é representada por uma reta, enquanto em um comportamento não linear esta curva não é representada por uma reta, podendo haver inclusive, conforme a figura a seguir, haver um ou mais deslocamentos associados à mesma solicitação de carga.



Fonte: Nogueira (2013).

Conforme a Figura 1(a), a carga é representada por uma curva linear onde há apenas um único deslocamento correspondente a cada carga. Assim, a carga pode ser escrita como:

$$P = ku \quad (1)$$

onde k representa a rigidez do elemento.

Já o comportamento não linear das estruturas pode ser descrito conforme a Figura 1(b). Nessa curva, pode-se observar, por exemplo, que para um dado carregamento P

pode haver mais de um deslocamento u_1 , u_2 e u_3 que represente a tensão. Assim, a equação que descreve a curva de equilíbrio não linear pode ser escrita de forma genérica por:

$$P = f(u) \quad (2)$$

Se a curva de equilíbrio é não linear, o princípio da superposição não é mais aplicável. Assim, não é possível combinar os resultados das análises de casos de carregamento individuais para obter os resultados de uma combinação de casos de carregamento.

Conforme Cook *et al* (2002), em estruturas mecânicas, os tipos de não linearidades podem ser classificadas em três casos:

- Geométrica: ocorre quando os deslocamentos são grandes. Neste caso, as equações de equilíbrio devem ser escritas com relação à geometria deformada da estrutura. A NBR 6118:2003 descreve este tipo de situação quando há consideração dos efeitos de 2^a ordem;
- Física ou do material: ocorre quando as propriedades do material são funções do estado de tensão ou de deformação;
- Não linearidade de contorno ou de contato: ocorre quando as condições de contorno se modificam com as ações externas. É o caso, por exemplo, de uma viga na qual uma extremidade é livre e, quando há um deslocamento específico, esta extremidade encosta-se a um apoio.

Como o objetivo desse trabalho é considerar apenas a não linearidade física para o cálculo dos esforços resistente e da matriz constitutiva tangente, a mesma será descrita mais especificamente a seguir.

2.2 Não linearidade física

A não linearidade física decorre do comportamento não linear dos materiais, ou seja, a relação tensão-deformação do material não obedece a Lei de Hooke, devido às características particulares de cada material.

A principal característica dessa lei é a proporcionalidade entre tensões e deformações, constituindo uma das condições essenciais para o emprego da superposição de efeitos que é a base da análise linear. Quando essa relação não é mais linear, a proporcionalidade deixa de existir e o princípio da superposição não pode mais ser empregado. Este é um dos fatores que torna a análise não linear mais complexa.

As estruturas de concreto armado, devido ao concreto ser formado por um aglomerado de materiais distintos (cimento, areia, britas, entre outros) associado ao aço, possui um comportamento mecânico complexo.

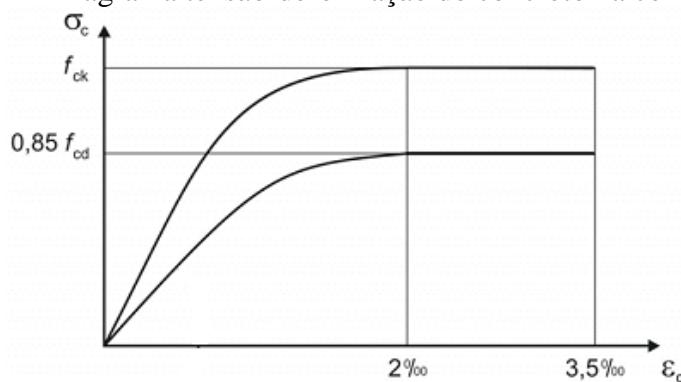
Nos elementos estruturais de concreto armado, a Não Linearidade Física está relacionada à perda de rigidez dos mesmos e suas principais causas são a fissuração do concreto, o deslizamento das armaduras, a plastificação dos materiais (aço e concreto) e a deformação lenta (fluência) do concreto (SILVA, 2012).

A relação entre tensões e deformações não depende da geometria. Esta relação é uma propriedade do material e é conhecida na literatura como a lei constitutiva do material. Esta é a ideia usual da análise por elementos finitos, que considera o meio contínuo, o material inicialmente homogêneo e a lei tensão-deformação conhecida a *priori* (FONSECA, 2006).

Além do modelo linear elástico ou não linear elástico, há os elastoplásticos, viscoelásticos, viscoplásticos, entre outros. Contudo, no projeto e análise de estruturas de concreto armado submetidas a carregamento monotônico são utilizados modelos elásticos não lineares.

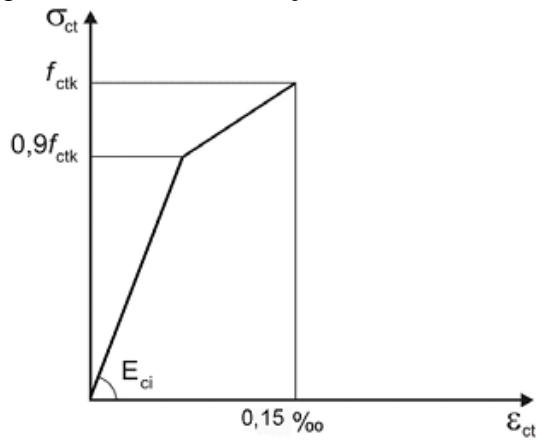
Os diagramas tensão-deformação recomendados pela NBR 6118:2003, para análises estruturais nos estados limites últimos são o diagrama parábola-retângulo para o concreto submetido à compressão (Figura 2) e o diagrama bilinear para o concreto submetido à tração (Figura 3). É recomendado o diagrama elastoplástico (Figura 4) para o aço.

Figura 2 – Diagrama tensão-deformação do concreto na compressão



Fonte: NBR 6118:2003.

Figura 3 – Diagrama tensão-deformação bilinear do concreto na tração



Fonte: NBR 6118:2003.

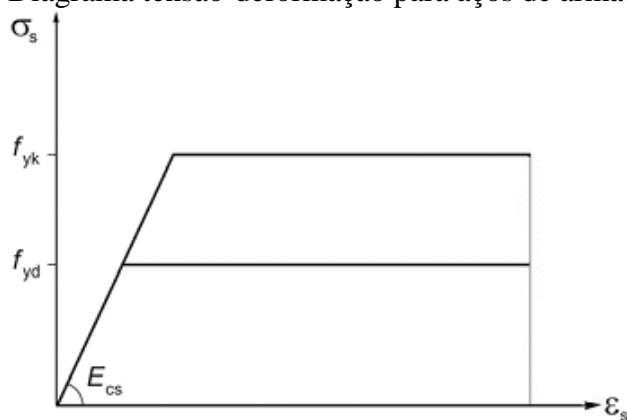
A equação que representa o trecho parabólico do diagrama tensão-deformação do trecho comprimido é dada por:

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{0,002} \right)^2 \right] \quad (3)$$

onde ε_c (%) é a deformação de compressão do concreto e f_{cd} é tensão de compressão resistente de cálculo do concreto para uma idade igual ou superior a 28 dias e igual a f_{ck} / γ_c , com γ_c igual a 1,4.

O coeficiente de “0,85”, neste caso, é adotado, pois, quando o concreto é submetido a cargas de longa duração, foi verificado que há uma redução de 15 % na sua resistência característica. Esta peculiaridade é conhecida como Efeito Rusch.

Figura 4 – Diagrama tensão-deformação para aços de armadura passiva

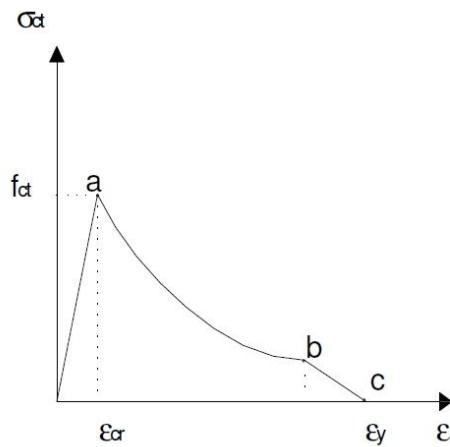


Fonte: NBR 6118:2003.

Na Figura 4, E_{cs} é o módulo de elasticidade, que na falta de ensaios ou valores fornecidos pelo fabricante pode ser admitido igual a 210 GPa, f_{yk} é a resistência característica ao escoamento e $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$ é a resistência ao escoamento de cálculo, com γ_s igual a 1,15. O diagrama tensão deformação é simétrico, ou seja, possui este mesmo comportamento na compressão.

Conforme Stramandinoli (2007), o diagrama bi-linear da NBR 6118:2003 não obtém bons resultados para a análise não linear do concreto, pois não considera que, no concreto armado, após o início da fissuração, o concreto tracionado entre as fissuras ainda colabora na resistência à tração do elemento, devido à transferência de tensões causada pela aderência entre o concreto e o aço. Este efeito é conhecido como *tension-stiffening*.

Figura 5 – Consideração do efeito *tension-stiffening*



Fonte: Stramandinoli (2007).

O *tension-stiffening* é ilustrado na Figura 5, onde o ponto “a” representa o início da fissuração, o ponto “b” quando a deformação é igual à deformação calculada no estádio II (desconsiderando a tração no concreto) e “c” quando o aço escoa.

No modelo proposto por Stramandinoli (2007), o material segue comportamento elástico até a fissuração. Depois da fissuração, o material segue um decaimento exponencial:

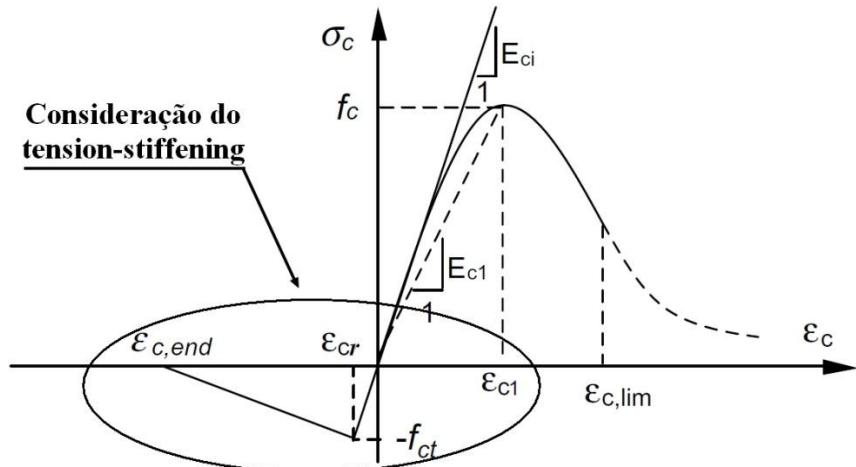
$$\sigma_{ct} = f_{ct} e^{-\alpha \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} \right)} \text{ para } \varepsilon_{cr} < \varepsilon \leq \varepsilon_y \quad (4)$$

onde ε_{cr} é a deformação de fissuração do concreto, ε_y é a deformação de escoamento do aço e α é um parâmetro função da taxa de armadura (ρ) e da relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto ($n = E_s/E_c$) dado pela Equação (5):

$$\alpha = 0,017 + 0,255(n\rho) + 0,106(n\rho)^2 + 0,016(n\rho)^3 \quad (5)$$

Há outros modelos para a consideração do *tension-stiffening*, como o utilizado no trabalho de Bonet *et al* (2004) que adota o modelo bi-linear adaptado, conforme a figura a seguir. Vale ressaltar que, na figura a seguir, os sistemas de eixos estão espelhados, ou seja, o diagrama diminui da esquerda para direita e de baixo para cima.

Figura 6 – Consideração do efeito *tension-stiffening* bi-linear

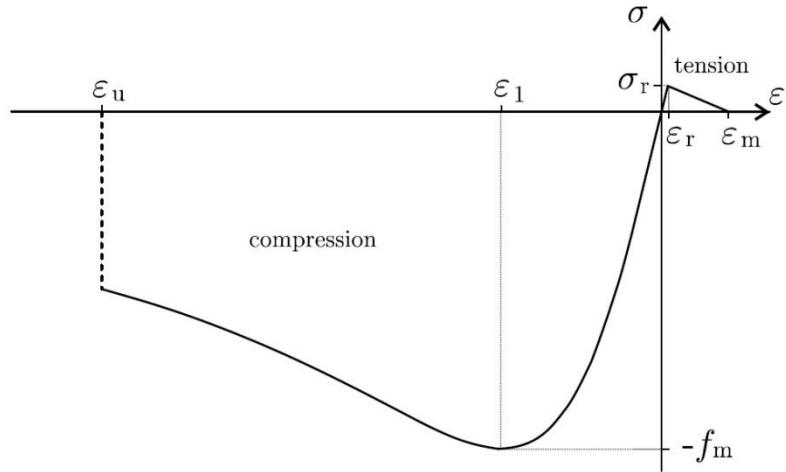


Fonte: Bonet *et al* (2004) adaptado.

Zupan e Saje (2005) a combinação de um trecho racional antes de ε_r seguido por um decaimento linear até ε_m , como ilustrado na Figura 7.

$$f_c = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ 2f_m |\varepsilon_1| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon^2} & \varepsilon_u < \varepsilon \leq \varepsilon_r \\ \sigma_r \frac{(\varepsilon - \varepsilon_m)}{\varepsilon_r - \varepsilon_m} & \varepsilon_r < \varepsilon \leq \varepsilon_m \\ 0 & \varepsilon_m < \varepsilon \end{cases} \quad (6)$$

Figura 7 – Curva utilizada por Zupan e Saje (2005)



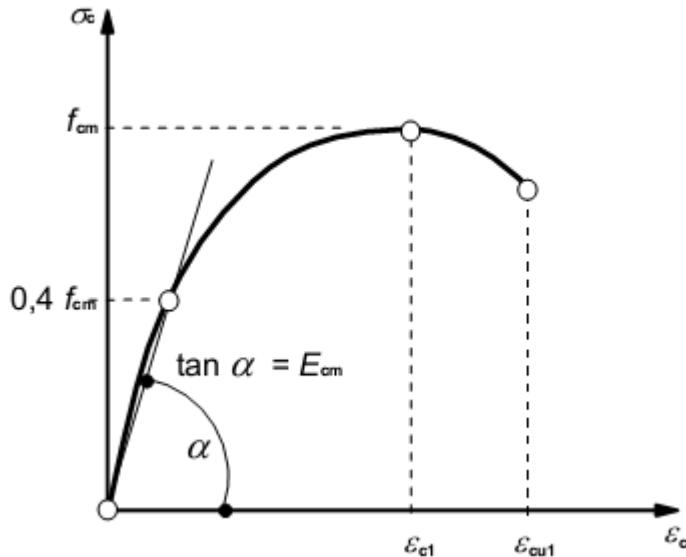
Fonte: Zupan e Saje (2005).

O diagrama tensão-deformação para o concreto na compressão, recomendado pelo Eurocode2:2004, para análises estruturais nos estados limites últimos é o representado por uma função racional:

$$\sigma_c = f_{cm} \left[\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \right] \quad (7)$$

onde $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$, em que $\varepsilon_{c1} = 0,7f_{cm}^{0,31}$ é a deformação no pico da tensão de compressão e $k = 1,05E_{cm} |\varepsilon_{c1}| / f_{cm}$, em que o módulo de elasticidade é E_{cm} (GPa) = $22[0,1f_{cm}]^{0,3}$ com $f_{cm} = f_{ck} + 8$ em MPa. Esta equação é válida para $0 < |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{cu1}|$, em que $\varepsilon_{cu1} = -3,5\%$ para $f_{ck} < 50$ MPa. A curva tensão-deformação representada por esta equação está ilustrada na Figura 8.

Figura 8 – Diagrama tensão-deformação para concreto na compressão



Fonte: Eurocode 2:2004.

2.3 NBR 6118:2003 e suas considerações

Segundo a NBR 6118:2003 o modelo estrutural deve ser realista e deve permitir representar o comportamento e as características geométricas dos elementos, as vinculações, os caminhos percorridos pelas ações até os apoios da estrutura e também as propriedades dos materiais.

Como hipóteses básicas, a NBR 6118:2003 estabelece que:

- As condições de equilíbrio devem ser sempre respeitadas. As equações de equilíbrio podem ser estabelecidas com base na geometria indeformada da estrutura (teoria de 1º ordem), exceto nos casos em que os deslocamentos alterem de maneira significativa os esforços internos (teoria de 2º ordem);
- A compatibilidade deve ser atendida nos deslocamentos ao longo da estrutura; quando as condições de compatibilidade não forem verificadas no estado limite considerado, devem ser adotadas medidas que garantam ductilidade adequada da estrutura no estado limite último, resguardando um desempenho adequado nos estados limites de serviço;
- Carregamento monotônico: isso ocorre desde que os ciclos de carga e descarga, em serviço, não solicitem o concreto a tensões de compressão superiores a $0,5f_{ck}$;

Para a análise de estruturas que possam ser assimiladas a elementos lineares (vagas, pilares, tirantes, arcos, pórticos, grelhas, treliças), a NBR 6118:2003 admite as seguintes hipóteses:

- a) Manutenção da seção plana após a deformação;
- b) Representação dos elementos pelos seus eixos longitudinais;
- c) Comprimento limitado pelos centros de apoios ou pelo cruzamento com o eixo de outro elemento estrutural.

Na análise linear, a NBR 6118:2003 admite comportamento elástico-linear para os materiais. Para uma análise global, as características geométricas podem ser determinadas pela seção bruta de concreto dos elementos estruturais. Já em análises locais para cálculo de deslocamentos, a fissuração deve ser considerada.

Os resultados de uma análise linear são usualmente empregados nas verificações de estado de limite de serviço, como para a verificação do estado limite de abertura de fissuras e de deformação excessiva. Nesse último, no entanto, deve ser utilizada a rigidez equivalente $(EI)_{eq}$.

Conforme a NBR 6118:2003, a verificação dos valores limites para a deformação da estrutura deve ser realizada através de modelos que considerem a rigidez efetiva das seções dos elementos estruturais. Nesse sentido, deve-se levar em consideração a presença das armaduras e a fissuração do concreto no cálculo da rigidez, além das deformações diferidas no tempo.

Para avaliação da flecha imediata, a NBR 6118:2003 permite o uso da rigidez equivalente, obtida a partir do modelo adaptado de Branson (1969), para o cálculo da flecha imediata, cuja equação é dada por:

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (8)$$

onde: I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto, I_{II} é o momento de inércia da seção fissurada do concreto no Estádio II, calculado com $\alpha_e = E_s/E_{cs}$, M_a é o momento fletor na seção crítica do vão considerado e M_r é o momento de fissuração do elemento estrutural. Este modelo visa considerar o efeito da não linearidade física de forma simplificada.

É permitido utilizar uma análise linear, mesmo com tensões elevadas para verificações de estado limite último, desde que a estrutura apresente suficiente ductilidade

para atingir a distribuição das solicitações previstas. Essa exigência serve, na verdade, para tornar as peças de concreto armado mais plásticas, evitando, desta forma, um colapso frágil que é característico do concreto. É por esse motivo que a norma exige uma ductilidade mínima das peças.

Na análise não linear, considera-se o comportamento não linear dos materiais e das estruturas. Toda a geometria da estrutura, bem como todas as suas armaduras, precisam ser conhecidas para que a análise não linear possa ser efetuada, pois a resposta da estrutura depende de como ela foi armada. Condições de equilíbrio, compatibilidade e ductilidade devem ser necessariamente atendidas.

De acordo com a NBR 6118:2003, as análises não lineares podem ser utilizadas, tanto para verificações do estado limite último, como para verificações do estado limite de serviço.

Chamam-se efeitos de 2^a ordem, também conhecido como não linearidade geométrica, aqueles que se somam aos obtidos numa análise de 1º ordem quando a análise do equilíbrio da estrutura passa a ser realizada com a configuração deformada. De acordo com a NBR 6118:2003 a consideração dos efeitos de 2^a ordem requer, obrigatoriamente, a consideração simultânea do comportamento não linear físico dos materiais.

Conforme a NBR 6118:2003, os nós da estrutura deslocam-se horizontalmente sob a ação de cargas horizontais e verticais e os esforços de 2^a ordem decorrentes desses deslocamentos são chamados efeitos globais de 2^a ordem. Assim, quanto maiores forem esses deslocamentos, maiores serão os efeitos globais de 2^a ordem, sendo necessário, portanto, adequar a rigidez adotada para os diversos elementos estruturais de forma a limitar esses efeitos que influenciam diretamente nos momentos de dimensionamento.

Com base na ordem de grandeza dos efeitos globais de 2^a ordem, as estruturas são classificadas em estruturas de nós fixos e de nós móveis. As estruturas consideradas de nós fixos são mais rígidas, apresentam deslocamentos horizontais pequenos e podem ser desprezados os efeitos globais de 2^a ordem, pois são inferiores a 10% dos respectivos esforços de 1^a ordem. As estruturas de nós móveis são mais flexíveis e, por isso, os deslocamentos horizontais não são pequenos. Nessas estruturas, os efeitos globais de 2^a ordem são importantes e superiores a 10% dos respectivos esforços de 1^a ordem.

A não linearidade física é considerada no cálculo do parâmetro γ_z utilizado pela norma para a consideração ou não dos efeitos de 2^a ordem por meio da redução da rigidez inicial de vigas e pilares.

3 FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

Neste capítulo estão descritos as hipóteses adotadas e os modelos matemáticos que serão considerados para o cálculo dos esforços internos e da matriz constitutiva tangente de seções submetidas à flexão composta oblíqua.

O presente trabalho se firmou nas hipóteses de vigas de Bernoulli-Euler-Navier, também conhecida na literatura como Teoria Clássica de Vigas (TCV). Esta teoria, que é a mesma adotada pela NBR 6118:2003, adota uma série de hipóteses estáticas e cinemáticas para simplificar a análise de vigas. Segundo a NBR 6118:2003, para ser considerado como viga, o comprimento longitudinal deve superar em pelo menos três vezes a maior dimensão transversal.

3.1 Hipóteses

A principal hipótese da TCV considera que as seções planas e perpendiculares ao eixo da viga antes da deformação, permanecem planas e perpendiculares ao eixo da viga após a deformação. Esta hipótese é conhecida como hipótese de Navier e está ilustrada na Figura 9.

Outra hipótese é que as tensões e deformações perpendiculares ao eixo da viga são pequenas e muito menores que as tensões na direção do eixo e podem, portanto, ser desprezadas. Adicionalmente, o efeito de Poisson também é desprezado.

3.2 Campo de deslocamentos

A partir das hipóteses adotadas para a TCV e da observação da Figura 9, pode-se obter o campo de deslocamentos para qualquer ponto de uma barra.

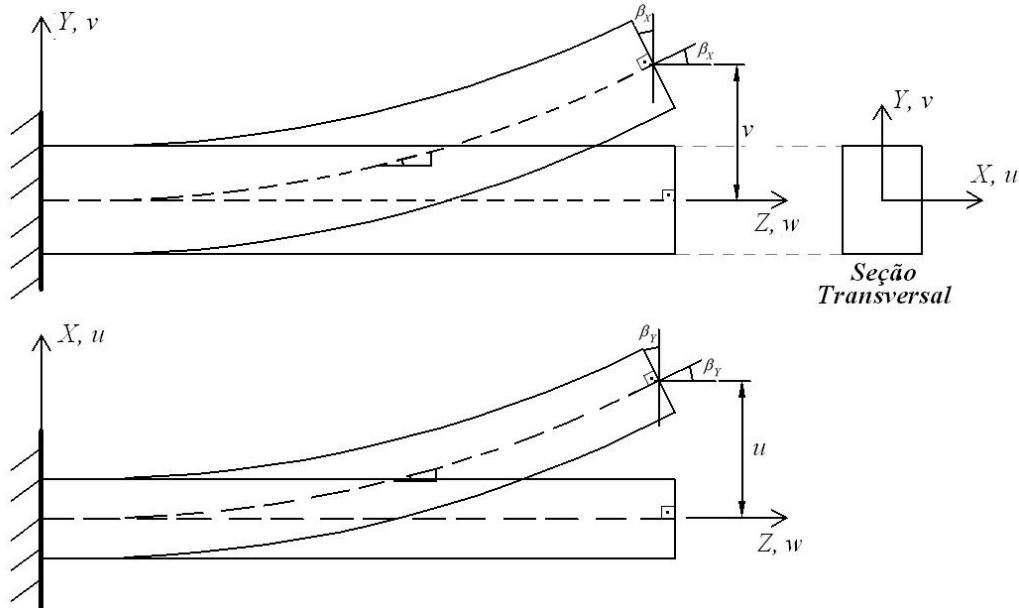
Da hipótese de tensões transversais e efeito de Poisson nulos, obtemos que os deslocamentos transversais só dependem da posição ao longo do eixo longitudinal:

$$\begin{aligned}\sigma_y = 0 \Rightarrow \varepsilon_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \\ \sigma_x = 0 \Rightarrow \varepsilon_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial X} = 0\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}(X, Y, Z) &= v(Z) \\ \bar{u}(X, Y, Z) &= u(Z)\end{aligned}\quad (10)$$

onde v e u representam os deslocamentos transversais nos eixos Y e X , respectivamente, da seção transversal do elemento.

Figura 9 - Configuração indeformada e deformada da viga baseada nas hipóteses da TCV



Fonte: Próprio autor.

Onde β_Y e β_X são rotações adotadas sem a preocupação das orientações vetoriais do sistema de eixos.

A partir da hipótese das seções planas, obtém-se as inclinações dos eixos a partir dos deslocamentos transversais v e u , e obtém-se os deslocamentos axiais ao longo da seção transversal devido à rotação da seção em cada eixo. Realiza-se a soma e obtém-se na seção:

$$\begin{aligned}\beta_X &\equiv \operatorname{tg} \beta_X = -\frac{dv}{dZ} = \frac{-w}{Y} \Rightarrow \theta_X = -\beta_X \Rightarrow w_Y = Y\theta_X \\ \beta_Y &\equiv \operatorname{tg} \beta_Y = \frac{du}{dZ} = \frac{-w}{X} \Rightarrow \theta_Y = \beta_Y \Rightarrow w_X = -X\theta_Y\end{aligned}\quad (11)$$

$$u_T(X, Y, Z) = Y \frac{dv}{dZ} - X \frac{du}{dZ} = Yv_{,Z} - Xu_{,Z} \quad (12)$$

onde $v_{,Z}$ e $w_{,Z}$ representam a primeira derivada dos deslocamentos em relação a Z . Já θ_X e θ_Y são as rotações tangenciais em relação aos eixos X e Y , respectivamente.

Adicionando os deslocamentos axiais do eixo da viga $u_N(Z)$, geralmente associado ao centróide da seção, que surgem devido aos esforços normais atuantes, temos que o campo de deslocamentos $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ baseados na TCV para qualquer ponto da barra do elemento é dado por:

$$\bar{u} = (X, Y, Z) = u_N(Z) + Y \cdot v_{,Z} - X \cdot w_{,Z} \quad (13)$$

$$\bar{v}(X, Y, Z) = v(Z) \quad (14)$$

$$\bar{w}(X, Y, Z) = w(Z) \quad (15)$$

onde u , v e w representam os deslocamentos axiais e transversais do eixo Z , Y e X , respectivamente.

3.3 Relação deformação-deslocamento

Utilizando a teoria da elasticidade clássica para pequenos deslocamentos e deformações, obtém-se as seguintes relações entre deformações e os deslocamentos descritos acima para um ponto qualquer da barra:

$$\varepsilon_Z = \bar{u}_{,Z} = u_{,Z} + Y \cdot v_{,ZZ} - X \cdot w_{,ZZ} \quad (16)$$

$$\varepsilon_y = \bar{v}_{,y} = 0 \quad (17)$$

$$\gamma_{ZY} = \bar{u}_{,Y} + \bar{v}_{,Z} = v_{,Z} - v_{,Z} = 0 \quad (18)$$

onde $v_{,ZZ}$ e $w_{,ZZ}$ representam a segunda derivada em relação a Z .

Analogamente pode-se mostrar que ε_x , γ_{ZX} e γ_{XY} são nulos. Portanto, a única deformação presente é a deformação axial ao eixo da barra, então podemos escrever a Equação (16) de forma mais conveniente como:

$$\varepsilon_Z = \varepsilon_m + Y \kappa_x - X \kappa_y \quad (19)$$

onde $\varepsilon_m = u_{,Z}$ é a deformação de membrana geralmente associada ao eixo do centróide da barra e se deve aos esforços normais, $\kappa_x = v_{,ZZ}$ e $\kappa_y = w_{,ZZ}$ são as curvaturas da barra devido aos momentos fletores nos eixos X e Y , respectivamente.

A deformação de membrana ε_m e as curvaturas κ_x e κ_y constituem o vetor chamado de deformações generalizadas:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{bmatrix} \quad (20)$$

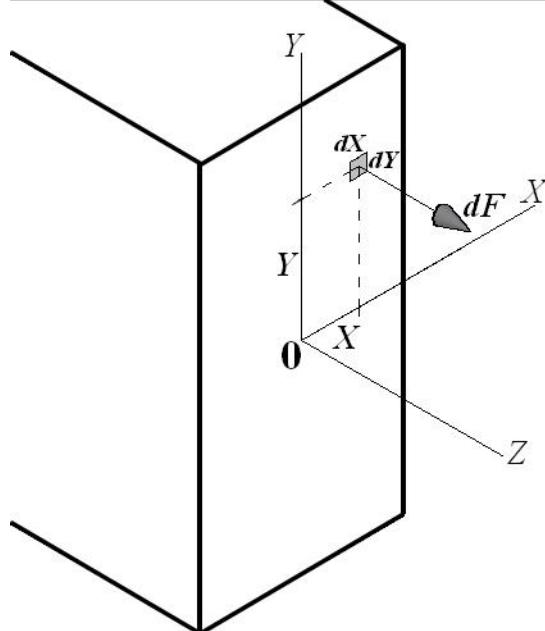
3.4 Relação tensão-deformação

Uma propriedade do material que não depende da geometria da estrutura e que relaciona as tensões e deformações é a sua Lei Constitutiva. Tal propriedade deve ser prescrita. Generalizando, pode-se assumir uma Lei Constitutiva não linear como:

$$\sigma_z = \sigma(\varepsilon_z) \quad (21)$$

3.5 Esforços internos

Figura 10 – Seção transversal submetida à flexão composta oblíqua



Fonte: Próprio autor.

Os esforços de interesse são a força normal N e os momentos fletores M_x e M_y . Estes esforços internos podem ser obtidos a partir da integração das tensões normais ilustradas na Figura 10. Seguindo a orientação vetorial e regra da mão direita, tem-se:

$$dN = dF \quad (22)$$

$$dM_x = YdF \quad (23)$$

$$dM_y = -XdF \quad (24)$$

onde dN é o esforço normal infinitesimal, dM_x é o momento resistente infinitesimal em relação ao eixo X, dM_y é o momento resistente infinitesimal em relação ao eixo Y e dF , que é o infinitesimal de força, pode ser escrito como:

$$dF = \sigma_z dA \quad (25)$$

onde dA é a parcela infinitesimal de área da seção transversal da barra e σ_z é a tensão axial no ponto (X, Y) .

A força normal é a resultante de todas as forças geradas pelas tensões atuantes na direção axial da barra e é obtida através da integração:

$$N = \int_A \sigma_z dA \quad (26)$$

Os momentos fletores são a resultante dos momentos em torno dos eixos X e Y da seção transversal gerados pelas tensões axiais em cada ponto e podem ser obtidos por meio das integrais:

$$M_x = \int_A Y \sigma_z dA \quad (27)$$

$$M_y = - \int_A X \sigma_z dA \quad (28)$$

Os esforços internos resultantes (N_z, M_x, M_y) constituem o vetor das tensões generalizadas:

$$\sigma = \begin{bmatrix} N_z \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (29)$$

3.6 Matriz constitutiva

Se o comportamento do material é considerado linear, então as tensões seguem a Lei de Hooke:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \quad (30)$$

Substituindo a deformação axial pela Equação (19), obtém-se:

$$\sigma_z = E(\varepsilon_m + Y\kappa_x - X\kappa_y) \quad (31)$$

Os esforços internos atuantes na seção transversal do elemento podem ser obtidos, considerando a seção composta de um material homogêneo, substituindo a Equação (27) nas integrais das Equações (22), (23) e (24):

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_A E(\varepsilon_m + Y\kappa_x - X\kappa_y) dA = E\varepsilon_m \int_A dA + E\kappa_x \int_A Y dA + E\kappa_y \int_A (-X) dA \\ M_x = \int_A E(\varepsilon_m + Y\kappa_x - X\kappa_y) Y dA = E\varepsilon_m \int_A Y dA + E\kappa_x \int_A Y^2 dA + E\kappa_y \int_A (-XY) dA \\ M_y = - \int_A E(\varepsilon_m + Y\kappa_x - X\kappa_y) X dA = E\varepsilon_m \int_A (-X) dA + E\kappa_x \int_A (-XY) dA + E\kappa_y \int_A X^2 dA \end{array} \right. \quad (32)$$

Conforme a seguir, as integrais na área da seção representam a área A , os momentos estáticos (S_x e S_y), os momentos de inércia (I_x e I_y) e o produto de inércia I_{xy} .

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \int_A dA \\ S_x = \int_A Y dA \\ S_y = \int_A X dA \\ I_x = \int_A Y^2 dA \\ I_y = \int_A X^2 dA \\ I_{xy} = \int_A XY dA \end{array} \right. \quad (33)$$

Então os esforços internos podem ser escritos como:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = EA\varepsilon_m + ES_x\kappa_x + (-ES_y)\kappa_y \\ M_x = ES_x\varepsilon_m + EI_x\kappa_x + (-EI_{xy})\kappa_y \\ M_y = (-ES_y)\varepsilon_m + (-EI_{xy})\kappa_x + EI_y\kappa_y \end{array} \right. \quad (34)$$

e na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & ES_x & -ES_y \\ ES_x & EI_x & -EI_{xy} \\ -ES_y & -EI_{xy} & EI_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{bmatrix} \quad (35)$$

Vale ressaltar que os eixos são comumente posicionados com origem no centróide, o que torna os momentos estáticos nulos. Também é importante lembrar que, se a figura tiver simetria em algum dos eixos posicionados no centróide, o produto de inércia também será nulo. Assim, a relação matricial fica:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI_x & 0 \\ 0 & 0 & EI_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{bmatrix} \quad (36)$$

A relação entre as tensões e deformações generalizadas (Equação (35)) pode ser descrita pela expressão simbólica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (37)$$

onde \mathbf{C} representa a matriz constitutiva do material.

3.7 Matriz constitutiva tangente

Se o comportamento do material é considerado não linear, então a relação entre os deslocamentos e as forças internas passa a ser não linear também. Quando isso ocorre, é necessário o emprego de um procedimento incremental-iterativo como o Método de Newton-Raphson para a resolução das equações de equilíbrio. A utilização deste método para solução das equações de equilíbrio global requer a determinação da matriz de rigidez tangente (\mathbf{K}_t), que por sua vez requer a determinação da matriz constitutiva tangente (\mathbf{C}_t) em cada ponto de integração (HOLANDA *et al*, 2010).

A matriz constitutiva tangente (\mathbf{C}_t) é definida como a matriz que relaciona os incrementos de tensão com os incrementos de deformação, ou seja:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (38)$$

No caso de flexão composta oblíqua, a matriz constitutiva tangente é obtida a partir da diferenciação do vetor de tensão generalizada σ em relação ao vetor de deformação generalizada ϵ . A partir das equações (19) e (29), a matriz \mathbf{C}_t pode ser escrita como:

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \epsilon_m} & \frac{\partial N}{\partial \kappa_X} & \frac{\partial N}{\partial \kappa_Y} \\ \frac{\partial M_X}{\partial \epsilon_m} & \frac{\partial M_X}{\partial \kappa_X} & \frac{\partial M_X}{\partial \kappa_Y} \\ \frac{\partial M_Y}{\partial \epsilon_m} & \frac{\partial M_Y}{\partial \kappa_X} & \frac{\partial M_Y}{\partial \kappa_Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (39)$$

onde C_{ij} são os termos da matriz constitutiva tangente, com $i, j \in [1,2,3]$ e os elementos da primeira linha são dados por:

$$C_{11} = \frac{\partial N}{\partial \epsilon_m} = \int_A \frac{\partial \sigma_Z}{\partial \epsilon_m} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_Z}{\partial \epsilon_Z} \frac{\partial \epsilon_Z}{\partial \epsilon_m} dA \quad (40)$$

$$C_{12} = \frac{\partial N}{\partial \kappa_X} = \int_A \frac{\partial \sigma_Z}{\partial \kappa_X} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_Z}{\partial \epsilon_Z} \frac{\partial \epsilon_Z}{\partial \kappa_X} dA \quad (41)$$

$$C_{13} = \frac{\partial N}{\partial \kappa_Y} = \int_A \frac{\partial \sigma_Z}{\partial \kappa_Y} dA = \int_A \frac{\partial \sigma_Z}{\partial \epsilon_Z} \frac{\partial \epsilon_Z}{\partial \kappa_Y} dA \quad (42)$$

que podem ser escritos em função do módulo de elasticidade tangente E_t da curva tensão-deformação do material:

$$C_{11} = \int_A E_t dA \quad (43)$$

$$C_{12} = C_{21} = \int_A Y E_t dA \quad (44)$$

$$C_{13} = C_{31} = - \int_A X E_t dA \quad (45)$$

onde E_t é dado por:

$$E_t = \frac{\partial \sigma_Z}{\partial \epsilon_Z} \quad (46)$$

Assim, repetindo este procedimento, obtém-se os demais termos da matriz constitutiva tangente:

$$C_{22} = \int_A Y^2 E_t dA \quad (47)$$

$$C_{23} = C_{32} = - \int_A XY E_t dA \quad (48)$$

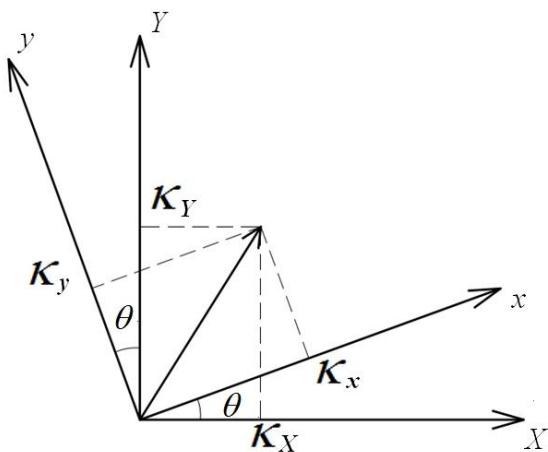
$$C_{33} = \int_A X^2 E_t dA \quad (49)$$

Vale ressaltar que, devido à não linearidade física do material, o módulo de elasticidade tangente E_t varia na seção transversal, pois depende da deformação ε_z do ponto considerado na seção transversal e da curva tensão-deformação do material.

3.8 Rotação para o sistema de eixos local

Um importante passo no desenvolvimento método proposto neste trabalho é a rotação da seção transversal dos eixos cartesianos globais (X, Y) para os eixos cartesianos locais (x, y), onde, neste último, o eixo x é paralelo à linha neutra da seção e κ_y é nulo. A rotação das curvaturas em θ graus pode ser feita através da Equação (50) conforme a Figura 11.

Figura 11 – Sistema de eixos local e global



Fonte: Próprio autor.

$$\begin{cases} \varepsilon_m = \varepsilon_m \\ \kappa_x = \kappa_x c + \kappa_y s \\ \kappa_y = \kappa_x (-s) + \kappa_y c \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \mathbf{T}\varepsilon \quad (50)$$

onde $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, \mathbf{T} representa a matriz de rotação e $\bar{\varepsilon}$ representa o vetor de deformações generalizadas rotacionado para um eixo local.

Assim, para efeito de simplificação, faz-se κ_y igual a zero e tem-se:

$$0 = \kappa_x (-s) + \kappa_y c \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\kappa_y}{\kappa_x} \quad (51)$$

Obtido esta relação, pode-se escrever a deformação axial em uma seção, em função do novo sistema de eixos, que depende agora apenas de uma curvatura, conforme a equação a seguir.

$$\varepsilon_z(y) = \varepsilon_m + \kappa_x \cdot y \quad (52)$$

onde κ_x é a nova curvatura em relação ao eixo x .

Vale ressaltar que, ao rotacionar para este eixo local, a deformação ε_z em cada ponto depende apenas do eixo y , simplificando alguns cálculos posteriores com a anulação de algumas integrais no contorno, evitando, desta forma, a necessidade de subdividir a seção em polígonos.

Outro fato importante é que, mesmo que, no sistema de eixos local, a curvatura em relação ao eixo y seja nula, o problema não se trata de uma flexão composta reta, pois o ângulo θ é diferente do ângulo que o vetor momento faz com o sistema de eixos globais. Estes ângulos só são iguais em casos específicos.

3.9 Esforços internos no sistema de eixos local

Os esforços também podem ser calculados em relação aos eixos rotacionados (x, y) , e esta consideração será importante para o método de integração posteriormente. É necessário apenas substituir os pontos (X, Y) pelos pontos rotacionados (x, y) . Assim os esforços ficam descritos por:

$$N = \int_A \sigma_z \, dA \quad (53)$$

$$M_x = \int_A y \sigma_z dA \quad (54)$$

$$M_y = - \int_A x \sigma_z dA \quad (55)$$

Os esforços internos resultantes rotacionados (N_z, M_x, M_y) constituem o vetor das tensões generalizadas no eixo local (sistema local):

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (56)$$

3.10 Matriz constitutiva tangente no sistema de eixos local

A obtenção da matriz constitutiva tangente para os eixos rotacionados é regida pela Equação (38) e segue os mesmos princípios para a obtenção da matriz constitutiva tangente em relação aos eixos originais.

$$\bar{\mathbf{C}}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial N}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial N}{\partial \kappa_y} \\ \frac{\partial M_x}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial M_x}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial M_x}{\partial \kappa_y} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial M_y}{\partial \kappa_x} & \frac{\partial M_y}{\partial \kappa_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} \end{bmatrix} \quad (57)$$

O cálculo dos termos desta matriz segue o mesmo raciocínio para a matriz constitutiva tangente nos eixos originais. Então:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{11} = \int_A E_t dA \\ \bar{C}_{12} = \bar{C}_{21} = \int_A y E_t dA \\ \bar{C}_{13} = \bar{C}_{31} = - \int_A x E_t dA \\ \bar{C}_{22} = \int_A y^2 E_t dA \\ \bar{C}_{23} = \bar{C}_{32} = - \int_A xy E_t dA \\ \bar{C}_{33} = \int_A x^2 E_t dA \end{array} \right. \quad (58)$$

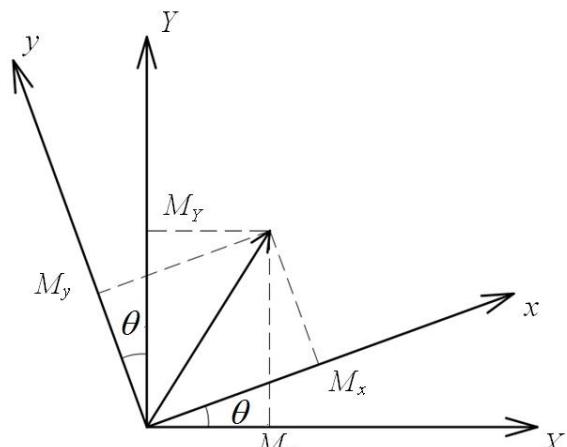
Após encontrar os termos, substitui-se para o caso que κ_y é nulo. É importante lembrar de fazer o cálculo dos termos apenas após a diferenciação de cada termo em relação a novas curvaturas locais, pois mesmo que seja nula, não significa que o módulo de elasticidade tangente (E_t) seja nulo também.

3.11 Retornando ao sistema de eixos global

Após obter os valores dos esforços internos rotacionados (N_z , M_x , M_y), deve-se lembrar de que os mesmos estão nos eixos rotacionados, logo, deve ser feita uma rotação para os eixos originalmente considerados (X , Y), conforme a Figura 12.

Deve-se lembrar de que o esforço axial (N) não sofre alteração quando os eixos da seção transversal são rotacionados, pois o mesmo é ortogonal ao plano da seção.

Figura 12 – Sistema de eixos local e global



Fonte: Próprio autor.

$$\begin{cases} M_x = M_x c + M_y (-s) \\ M_y = M_x s + M_y c \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (59)$$

A matriz constitutiva tangente também foi calculada em relação ao sistema de eixos local e é necessário trazê-la para o sistema de eixos global. Observando a equação (38) é possível deduzir a equação da transformação da matriz constitutiva tangente do sistema eixos local para o global.

$$d\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{C}}_t d\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (60)$$

Assim, a partir das equações (50) e (59) e lembrando que a inversa da matriz de transformação (\mathbf{T}^{-1}) é igual a sua transposta (\mathbf{T}^T), é possível escrever a equação acima da seguinte forma:

$$\mathbf{T}d\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{C}}_t \mathbf{T}d\boldsymbol{\epsilon} \Rightarrow \mathbf{T}^T \mathbf{T}d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{C}}_t \mathbf{T}d\boldsymbol{\epsilon} \Rightarrow d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{C}}_t \mathbf{T}d\boldsymbol{\epsilon} \quad (61)$$

Desta forma, pode-se deduzir que:

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{C}}_t \mathbf{T} \quad (62)$$

3.12 Contribuição do aço

Como o concreto armado é formado por materiais diferentes, concreto e aço, é fundamental separar as parcelas de contribuição de cada material.

A parcela do concreto deve ser feita seguindo as considerações e equações anteriormente citadas. Já a consideração do aço, neste trabalho, segue o modelo adotado por Fafitis (2001), onde cada barra é considerada um ponto discreto com sua respectiva área, coordenadas e tensão. Assim, esta contribuição pode ser descrita como um simples somatório:

$$N_s = \sum_{j=1}^{N_b} A_{sj} \sigma_s(\varepsilon_j) \quad (63)$$

$$M_{xs} = \sum_{j=1}^{N_b} Y_{sj} A_{sj} \sigma_s(\varepsilon_j) \quad (64)$$

$$M_{Ys} = -\sum_{j=1}^{N_b} X_{sj} A_{sj} \sigma_s(\varepsilon_j) \quad (65)$$

onde N_b é o número de barras da seção transversal, A_{sj} é a área de cada barra, X_{sj} e Y_{sj} são as coordenadas em relação ao sistema de eixos globais de cada barra e σ_s é a função da lei constitutiva do aço.

Para evitar somar a contribuição da área de concreto que foi substituída pela contribuição da barra de aço, a força que o concreto faria é subtraída da força da barra de aço. Assim, tem-se:

$$N_s = \sum_{j=1}^{N_b} A_{sj} [\sigma_s(\varepsilon_j) - \sigma_c(\varepsilon_j)] \quad (66)$$

$$M_{Xs} = \sum_{j=1}^{N_b} Y_{sj} A_{sj} [\sigma_s(\varepsilon_j) - \sigma_c(\varepsilon_j)] \quad (67)$$

$$M_{Ys} = -\sum_{j=1}^{N_b} X_{sj} A_{sj} [\sigma_s(\varepsilon_j) - \sigma_c(\varepsilon_j)] \quad (68)$$

onde σ_c é a função da lei constitutiva do concreto.

A contribuição para a matriz constitutiva tangente rotacionada segue o mesmo princípio considerado para os esforços resistentes, ou seja, a contribuição do aço em cada termo se resume em substituir as integrais da Equação (58) por um somatório do integrando em cada barra, lembrando de retirar a contribuição do concreto, conforme as equações a seguir.

$$\bar{C}_{11} = \sum_{j=1}^{N_b} A_{sj} (E_{ts} - E_{tc}) \quad (69)$$

$$C_{12} = C_{21} = \sum_{j=1}^{N_b} y_{sj} A_{sj} (E_{ts} - E_{tc}) \quad (70)$$

$$C_{13} = C_{31} = -\sum_{j=1}^{N_b} x_{sj} A_{sj} (E_{ts} - E_{tc}) \quad (71)$$

$$C_{22} = \sum_{j=1}^{N_b} y_{sj}^2 A_{sj} (E_{ts} - E_{tc}) \quad (72)$$

$$C_{23} = C_{32} = - \sum_{j=1}^{N_b} x_{sj} y_{sj} A_{sj} (E_{ts} - E_{tc}) \quad (73)$$

$$C_{33} = \sum_{j=1}^{N_b} x_{sj}^2 A_{sj} (E_{ts} - E_{tc}) \quad (74)$$

Após o cálculo das parcelas do aço e do concreto para os esforços resistentes e a matriz constitutiva tangente, basta somar essas parcelas para obter o resultado na seção. Assim:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_c + \boldsymbol{\sigma}_s \quad (75)$$

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C}_{tc} + \mathbf{C}_{ts} \quad (76)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_c$ e $\boldsymbol{\sigma}_s$ representam os vetores das parcelas das tensões generalizadas rotacionados do concreto e do aço, respectivamente, e, \mathbf{C}_{tc} e \mathbf{C}_{ts} representam as parcelas das matrizes constitutivas tangentes rotacionadas do concreto e do aço, respectivamente.

Para efeito de comparação, conforme sugerido e feito por Zupan e Saje (2005), não é considerado o cálculo da contribuição do aço como parâmetro, visto que a mesma pode ser obtida de forma trivial.

4 INTEGRAÇÃO NA SEÇÃO TRANSVERSAL

Segundo Papanikolaou (2012), o problema da realização de integrações em seções transversais arbitrárias tem recebido atenção na literatura desde a década de 60.

Ao longo dos anos, várias metodologias analíticas, numéricas ou mistas têm sido sugeridas na literatura para a análise de seções de variada complexidade em termos de geometria e material de composição. Os diversos métodos se diferenciam com relação à eficiência, precisão, simplicidade e generalidade.

Conforme Papanikolaou (2012), cinco características principais nas metodologias de análise de seções podem ser identificadas:

- Tipo de seção: se a seção é de concreto armado ou mista (aço e concreto armado);
- Lei constitutiva do material: se é composta por funções polinomiais ou por funções arbitrárias;
- Subdivisão da seção: se é imposta ou não para a integração das tensões;
- Método de integração das tensões;
- Estratégia de solução das equações de equilíbrio de forças.

Além dessas cinco características, pode-se acrescentar mais uma relativa à finalidade das metodologias de integração propostas para análise de seções, conforme realizado por Nogueira (2013). As metodologias de integração podem ser destinadas à obtenção dos esforços resistentes da seção ou ao cálculo da matriz constitutiva tangente.

Tabela 1 – Características das metodologias de análise de seções

Autores	Tipo de seção	Lei constitutiva do material	Subdivisão da seção	Integração das tensões	Estratégia de solução do equilíbrio	Finalidade da metodologia
Penelis (1969), De Vivo e Rosati (1998), Alfano <i>et al</i> (2007)	concreto armado	parábola – linear	um polígono por parte de $\sigma(\varepsilon)$	analítica por polígono	Newton-Raphson	matriz de rigidez tangente e esforços resistentes
Werner (1974)	concreto armado	parábola – linear	um polígono por parte de $\sigma(\varepsilon)$	analítica por polígono	iterações aninhadas	-
Brondum–Nielsen (1985), Dundar e Sahin (1993), Yen (1991)	concreto armado	constante (retangular)	não subdivide	analítica	método de Newton	esforços resistentes

continua

Autores	Tipo de seção	Lei constitutiva do material	Subdivisão da seção	Integração das tensões	Estratégia de solução	Finalidade da metodologia
Yau <i>et al.</i> (1993)	concreto armado	constante (retangular)	não subdivide	analítica	sem derivada (regula-falsi)	esforços resistentes
Rodriguez e Ochoa (1999)	concreto armado	parábola-linear com amolecimento	trapézios	analítica por trapézio	Newton-Raphson	matriz de rigidez tangente e esforços resistentes
Chen <i>et al.</i> (2001)	composta	parábola - linear	não subdivide	analítica	sem derivada (Regula-Falsi)	esforços resistentes
Fafitis (2001)	concreto armado	parábola – linear	não subdivide	Green/Gauss	-	esforços resistentes
Sfakianakis (2002)	composta	parábola-linear com amolecimento	não subdivide	método das fibras	pesquisa incremental	esforços resistentes
Bonet <i>et al.</i> (2004)	concreto armado	funções parciais não polinomiais (arbitrárias)	um polígono (fazia espessa) por parte de $\sigma(\varepsilon)$	2D Gauss ou Green/Gauss por polígono	-	matriz de rigidez tangente e esforços resistentes
Sousa e Muniz (2007)	composta	funções parciais polinomiais de até terceiro grau	um polígono por parte de $\sigma(\varepsilon)$	analítica por polígono	-	matriz de rigidez tangente e esforços resistentes
Charalampakis e Koumousis (2008)	composta	funções parciais polinomiais de até terceiro grau	trapézios curvilíneos	analítica por trapézio	sem derivada (Brent)	esforços resistentes
Rosati <i>et al.</i> (2008)	composta	parábola - linear	um polígono por parte de $\sigma(\varepsilon)$	analítica por polígono	procedimento iterativo	matriz de rigidez secante e esforços resistentes
Pallarés <i>et al.</i> (2009)	concreto armado	não polinomial -linear (EC2)	não subdivide	analítica	Newton-Raphson	matriz de rigidez tangente e esforços resistentes
Chiorean (2010)	composta	parábola-linear com amolecimento	não subdivide	Green/Gauss-Lobatto com bisseção adaptativa	comprimento de arco	esforços resistentes
Papanikolaou (2012)	composta	funções parciais não polinomiais (arbitrárias)	não subdivide	Green/Gauss com adaptação ao mapeamento de deformação	sem derivada (Brent)	esforços resistentes

Fonte: Papanikolaou (2012) adaptado por Nogueira (2013).

Ainda segundo Papanikolaou (2012), uma revisão crítica das metodologias encontradas na literatura (listadas na Tabela 1) leva às seguintes observações:

- Um significativo número de algoritmos sugeridos são limitados às seções de concreto armado de forma simples e com barras de aço individuais. Esses métodos não apresentam grande generalidade, mas possuem boa precisão e eficiência;
- Muitos estudos impõem restrição à lei constitutiva do material, geralmente utilizando as leis constitutivas especificadas pelos códigos normativos ou funções polinomiais parciais. É o que ocorre com os métodos analíticos, que, em contrapartida, são altamente precisos e eficientes;
- Com relação aos métodos de integração das tensões, que é o elemento crucial para efeitos de precisão e eficiência, podem ser identificados três métodos principais:
 - Método das Fibras: é um método aproximado, lento e requer um aumento da densidade da malha de fibras para se conseguir uma precisão aceitável. A principal vantagem deste método é a alta generalidade, permitindo analisar seções com qualquer geometria e Lei Constitutiva para os materiais. A seção pode ser de concreto armado ou mista;
 - Integração analítica: é um método que produz resultados exatos e rápidos, mas é restrita à geometria da seção e a uma relação tensão-deformação específica. Este, portanto, é um método altamente eficiente e preciso, mas é de baixa generalidade;
 - Integração numérica usando quadraturas de Gauss nas integrais de contorno com o emprego do Teorema de Green: é um caminho para produzir uma solução geral para leis constitutivas arbitrárias. Porém, em certos casos, a solução numérica pode ter um custo computacional maior que os métodos analíticos e o emprego de uma integração numérica de baixa ordem pode produzir erros inaceitáveis;
- Muitos métodos de integração das tensões requerem, para ter eficiência, uma subdivisão prévia da seção, o que naturalmente leva a uma redução da velocidade de execução e a uma maior complexidade na implementação;
- A maioria das estratégias de solução encontradas na literatura se baseia no Método de Newton-Raphson, que requer o cálculo prévio de derivadas

(rigidez). Essa é uma desvantagem apenas quando se trata da obtenção dos esforços internos, pois há um custo computacional adicional para o cálculo das derivadas, além das questões inerentes à não convergência;

- Em geral os métodos desenvolvidos são voltados para o dimensionamento, sendo necessário apenas o cálculo dos esforços resistentes da seção. Somente os trabalhos voltados para a análise não linear de estruturas aplicam os métodos também para cálculo da matriz de rigidez tangente.

Neste trabalho a integração das tensões e da matriz constitutiva tangente sobre a seção foi caracterizada de duas formas:

- Quanto ao domínio de integração: direta na área da seção ou no domínio da seção com o emprego do Teorema de Green.
- Quanto à forma de integração: analítica ou numérica.

Foram estudadas as diversas metodologias, porém, os trabalhos que mais nortearam o desenvolvimento da metodologia de cálculo deste trabalho foram Fafitis (2001), Zupan e Saje (2005), Sousa Jr. e Muniz (2007) e Papanikolaou (2012).

Fafitis (2001) desenvolveu uma metodologia que integrava as tensões para obtenção dos esforços no contorno da parte da seção comprimida no sistema de eixos local. Estes resultados eram obtidos de forma numérica por meio das quadraturas de Gauss, mais precisamente, três pontos de Gauss, porém não subdividia os trechos em curvas suaves. Esta não subdivisão, em caso de descontinuidades da função, pode gerar erros inaceitáveis, como comentou posteriormente Papanikolaou (2012).

Zupan e Saje (2005) desenvolveram três metodologias de cálculo das integrais: no contorno calculando as integrais analiticamente; no contorno calculando as integrais numericamente utilizando as quadraturas de Gauss; e na área da seção utilizando as quadraturas de Gauss. Este trabalho foi fundamental pois apresenta de forma clara e direta os resultados dos esforços e os termos da matriz constitutiva tangente.

Sousa Jr e Muniz (2007) optaram por uma metodologia de cálculo no contorno também, porém as integrais foram calculadas analiticamente. Os esforços e a matriz constitutiva tangente foram obtidas diretamente nos eixos globais da região e, para isso, foi necessário subdividir a seção em polígonos fechados. A lei constitutiva do material, neste caso, é considerada como, no máximo, um polinômio do 3º grau.

Já Papanikolaou (2012), que foi a inspiração para a metodologia desenvolvida neste trabalho, utiliza uma integração no contorno e de forma numérica utilizando as

quadraturas de Gauss. Sua metodologia calcula os esforços e a matriz constitutiva tangente no sistema de eixos local, subdividindo cada segmento por trecho de curva suave e escolhendo o numero de pontos de Gauss adequados para cada curva. Quando a curva é não polinomial, Papanikolaou (2012) desenvolveu um método iterativo adaptativo que determinava os pontos de Gauss adequados, porém isso não foi feito neste trabalho, pois, para implementar uma nova curva no programa, foi escolhido fazer um estudo de quantos pontos de Gauss são necessários para gerar um erro aceitável e, a partir deste estudo, determinar um grau de polinômio adequado a curva para efeito de integração de Gauss.

4.1 Domínio de integração

4.1.1 Integração na área

O Método das Fibras, utilizado por Fonseca (2006), é um exemplo de integração numérica direta na área da seção. O método das Fibras será discutido em outro tópico seguinte.

O Método das Fatias, realizado por Nogueira (2013), também é outro exemplo de integração direta na área da seção, porém em seções submetidas à flexão composta reta.

O trabalho de Melo (2000) apresenta a resolução analítica das integrais diretamente na área de uma seção submetida à flexão composta reta.

4.1.2 Integração no contorno

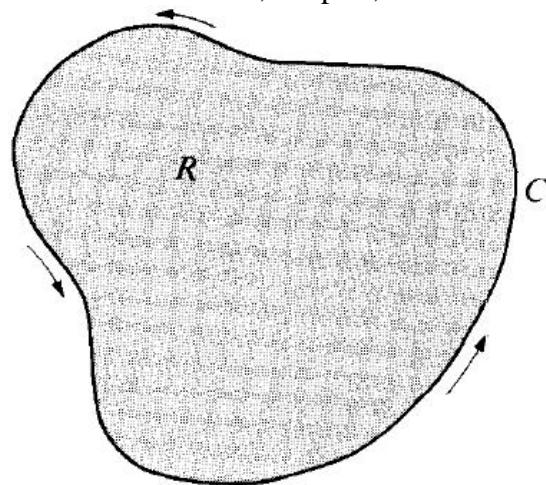
O presente trabalho pretende utilizar integrações no contorno da seção transversal com o emprego do Teorema de Green para obter os esforços resistentes e a matriz constitutiva tangente.

Definindo $f(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, como uma função de campo vetorial no plano xy , o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo diz que a integral do gradiente de uma função f ao longo do comprimento que une dois pontos \mathbf{a} e \mathbf{b} pode ser expressa em termo de $f(\mathbf{a})$ e $f(\mathbf{b})$. O Teorema de Green é uma analogia bidimensional do Segundo Teorema Fundamental do Cálculo que expressa uma integral dupla sobre uma região plana R como uma integral de linha sobre uma curva fechada C formada pelos limites de R . Este teorema é escrito mais comumente através da identidade (APOSTOL, 1969):

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_C (P dx + Q dy) \quad (77)$$

Vale ressaltar que a integral de linha sobre uma curva fechada foi enunciada para o sentido anti-horário, ou seja, o sentido anti-horário é o positivo, já o horário é negativo.

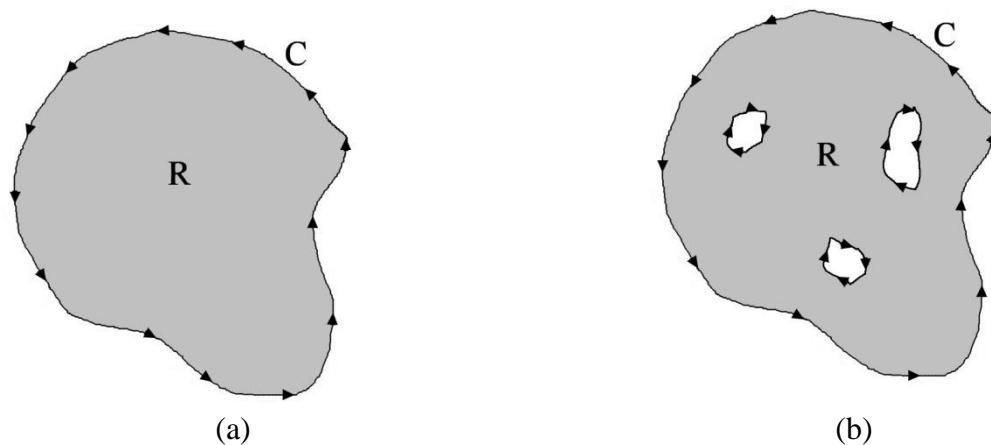
Figura 13 - Curva C fechada, simples, seccionalmente suave



Fonte: Apostol (1969).

Uma região R é conexa quando quaisquer dois pontos de R podem ser unidos por uma curva inteiramente contida nesta região. Uma região conexa R é simplesmente conexa se qualquer curva simples fechada contida em R pode ser reduzida a um ponto, permanecendo em R . Caso contrário, a região é multiplamente conexa. Resumindo, regiões simplesmente conexas não contêm furos.

Figura 14 - Exemplo de regiões simplesmente (a) e multiplamente (b) conexas



Fonte: Próprio Autor.

Devem ser consideradas duas suposições para que o Teorema de Green seja válido. Primeiro, P e Q devem ser integráveis em um espaço aberto S contendo R , ou seja, P e Q são continuamente diferenciáveis neste espaço. Segundo, a curva C pode ser qualquer curva fechada simples retificável (curva de Jordan) (STEWART, 2007). “Retificável” significa que C tem um comprimento finito.

Segundo Apostol (1969), mesmo que o Teorema de Green tenha sido enunciado para regiões simplesmente conexas, ele também pode ser aplicado para regiões multiplamente conexas. Para isso devemos unir os contornos dos furos entre si de modo a obter regiões simplesmente conexas ou basta aplicar o teorema no contorno de cada furo na região R , porém subtraindo cada furo da região, como exemplificado na Figura 15.

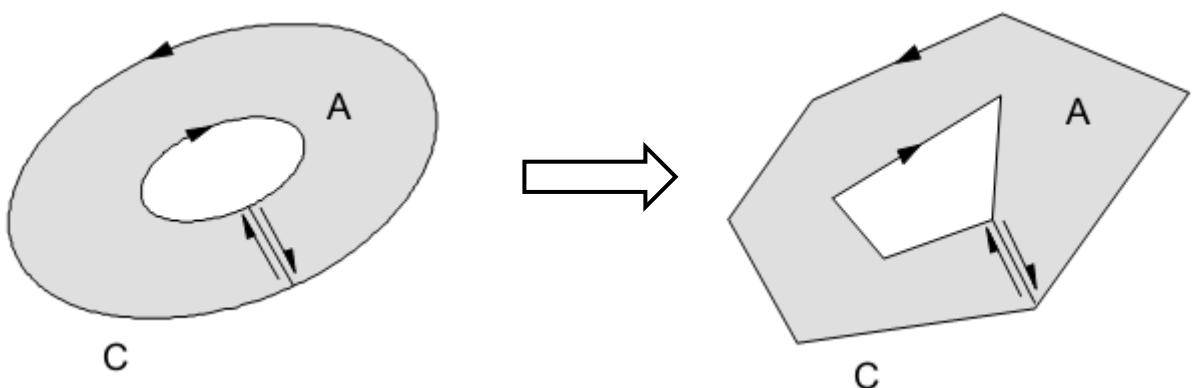
Figura 15 - Exemplo do uso do teorema para regiões multiplamente conexas



Fonte: Próprio Autor.

O Teorema de Green permite, de forma analítica, a solução de qualquer integral polinomial em domínio plano fechado, simples e seccionalmente suave.

Figura 16 - Discretização do contorno C em segmentos de retas



Fonte: Campos Filho (2000).

As integrais referentes aos esforços internos resistentes, Equações (53), (54) e (55), podem ser resolvidas após uma transformação das integrais de área em integrais de contorno através de uma aplicação do Teorema de Green conforme sugerido por Werner (1974) apud Papanikolaou (2012) e realizado por diversos autores como Rotter (1985), Dumont e Musso Jr. (1987), Fafitis (2001), Bonet *et al* (2004), Zupan e Saje (2005), Sousa Jr. e Caldas (2005), Sousa Jr. e Muniz (2007), Chiorean (2010) e Papanikolaou (2012). Essa técnica também pode ser utilizada para o cálculo das integrais referentes aos termos da matriz constitutiva tangente, realizado por Rotter (1985), Zupan e Saje (2005) e Sousa Jr e Muniz (2007).

4.2 Forma de integração

4.2.1 Analítica

Se as Leis Constitutivas dos materiais que compõem a seção são conhecidas, é possível calcular os esforços internos de maneira analítica realizando as integrais definidas pelas Equações (26), (27) e (28), desde que a combinação das Leis Constitutivas com a geometria da seção gere integrais não muito complexas, como no caso de seções retangulares e a relação parábola retângulo do concreto. O mesmo ocorre para a matriz constitutiva tangente.

Esta integração analítica dos esforços foi realizada por Brondum–Nielsen (1985) apud Papanikolaou (2012), Yen (1991), Dundar e Sahin (1993), Yau *et al* (1993), Chen *et al* (2001) apud Papanikolaou (2012), Sousa Jr. e Muniz (2007) e Pallarés *et al* (2009). Outro trabalho importante é o de Melo (2000) que também realizou integração analítica para a seção retangular, porém para flexão composta reta.

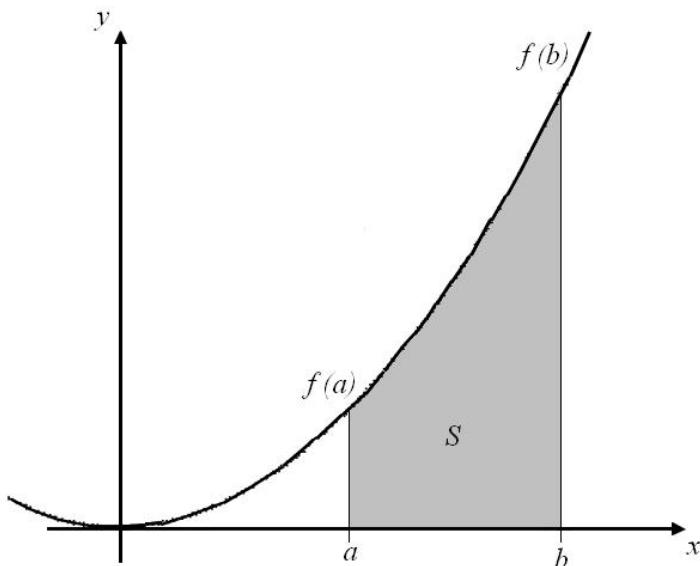
4.2.2 Numérica

A integração numérica é o cálculo aproximado de uma integral definida e há diversos métodos existentes na literatura para obtenção desta aproximação.

O problema a ser resolvido pela integração numérica é calcular uma solução aproximada para uma integral definida, ou seja, encontrar um valor aproximado para o valor de S , conforme a Figura 17.

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad (78)$$

Figura 17 – Integral definida



Fonte: Próprio autor..

Os principais motivos da integração numérica é que o integrando pode ser conhecido, mas pode ser difícil ou impossível a obtenção da antiderivada, que é uma função elementar. Pode ocorrer, também, de ser possível encontrar uma antiderivada, mas, muitas vezes, é mais fácil calcular uma aproximação numérica do que o cálculo da antiderivada.

Os métodos de integração numérica podem geralmente ser descritos com uma combinação de avaliações do integrando em um número finito de pontos, chamados pontos de integração, e, uma soma ponderada desses valores é usada para aproximar a integral. Os pontos de integração e os pesos dependem do método específico utilizado e da precisão requerida para a aproximação.

Um aspecto importante na análise de qualquer método de integração numérica é a precisão requerida, ou seja, o erro de aproximação como uma função do número de pontos de integração. A redução do número de pontos de integração reduz o número de operações aritméticas envolvidas e, portanto, aumenta os erros de arredondamentos para um mesmo método de integração.

Diversos métodos podem ser encontrados nos livros de cálculos, os métodos mais conhecidos são as fórmulas de Newton-Cotes, nas quais a interpolação é feita com polinômios avaliados em pontos igualmente espaçados em $[a, b]$, as fórmulas mais conhecidas são:

a) Regra do Retângulo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{n} \left[f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \right] \quad (79)$$

b) Regra do Trapézio:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (80)$$

c) Regra de Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (81)$$

Quando se permite a variação entre os intervalos dos pontos de integração, surge outro grupo de quadraturas, tal como a quadratura de Gauss e Lobatto. Segundo Cook et al (2002), as quadraturas de Gauss são tipicamente mais precisas do que as fórmulas de Newton-Cotes quando se emprega uma mesma quantidade de pontos de integração e quando o integrando é uma função suave (se a função é suficientemente diferenciável).

Na integração numérica, pode-se obter maior precisão na aproximação através da subdivisão do intervalo de integração $[a, b]$ em n subintervalos, calculando uma aproximação para cada subintervalo e realizando um somatório dos resultados de cada subintervalo cujo resultado obtido é o total. Esta técnica é chamada de regra composta, estendida ou iterativa.

Há diversas quadraturas conhecidas na literatura, mas as quadraturas de Gauss e Lobatto se destacam devido à alta velocidade de convergência dos resultados, principalmente para funções polinomiais, onde os resultados chegam a ser exatos a soluções analíticas.

Como no presente trabalho vamos utilizar apenas as quadraturas de Gauss, vamos nos ater apenas a esta técnica.

Para calcular o valor aproximado da integral definida, utiliza-se uma combinação linear de valores da função $f(x)$ em pontos x_i pertencentes ao intervalo $[a, b]$ e valores w_i , chamados de pesos de Gauss, de modo que a integral é calculada somando-se os produtos dos pesos de cada ponto pelos valores respectivos da função nos mesmos pontos (ASSAN, 2003):

$$\int_a^b f(x)dx \cong w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_n f(x_n) \quad (82)$$

Os pontos de Gauss x_i e os pesos de Gauss w_i são determinados de modo que a integração numérica seja exata para uma função polinomial de grau $2n-1$, onde n é o número de pontos de Gauss no intervalo $[-1, 1]$.

Nesta técnica, os pontos são distribuídos de forma simétrica em relação ao centro do intervalo de integração e os pares simétricos possuem o mesmo peso. Outro aspecto importante é que a quadratura de Gauss não inclui os valores da função nos limites do intervalo de integração.

O intervalo de integração corresponde a uma parametrização da variável x para t , que varia no intervalo $[-1, 1]$. A integral é, então, transformada da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx = J \int_{-1}^1 g(t)dt \quad (83)$$

onde J é chamado de Jacobiano da transformação. A obtenção desse Jacobiano vem da transformação de variáveis:

$$\begin{cases} x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \\ dx = \frac{b-a}{2}dt \\ J = \frac{b-a}{2} \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t)dt \quad (84)$$

A integração numérica a partir da quadratura de Gauss pode ser escrita como:

$$\int_a^b f(x)dx = J \int_{-1}^1 g(t)dt = J \sum_{i=1}^n w_i g(t_i) \quad (85)$$

onde n é o número de pontos de integração, i é o número do ponto de integração, t_i é a coordenada do ponto de Gauss i e w_i é o peso associado ao ponto de Gauss i .

Existem tabelas específicas que associam o número de pontos de Gauss com o número dos pontos, sua coordenada e seu peso, como pode ser observado na Tabela 2.

Tabela 2 – Pontos e Pesos da quadratura de Gauss

n	i	t_i	w_i
1	1	0	2
2	1	$1/\sqrt{3}$	1
	2	$-1/\sqrt{3}$	1
	1	$\sqrt{3/5}$	$5/9$
3	2	0	$8/9$
	3	$-\sqrt{3/5}$	$5/9$
4	1	$\sqrt{\frac{(3+2\sqrt{6/5})}{7}}$	$\frac{(18-\sqrt{30})}{36}$
	2	$\sqrt{\frac{(3-2\sqrt{6/5})}{7}}$	$\frac{(18+\sqrt{30})}{36}$
	3	$-\sqrt{\frac{(3-2\sqrt{6/5})}{7}}$	$\frac{(18+\sqrt{30})}{36}$
	4	$-\sqrt{\frac{(3+2\sqrt{6/5})}{7}}$	$\frac{(18-\sqrt{30})}{36}$
5	1	$\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{5-2\sqrt{10/7}}$	$\frac{(322-13\sqrt{70})}{900}$
	2	$\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{5-2\sqrt{10/7}}$	$\frac{(322+13\sqrt{70})}{900}$
5	3	0	$\frac{128}{225}$
	4	$-\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{5-2\sqrt{10/7}}$	$\frac{(322+13\sqrt{70})}{900}$
	5	$-\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{5-2\sqrt{10/7}}$	$\frac{(322-13\sqrt{70})}{900}$

Fonte: Azevedo (2003).

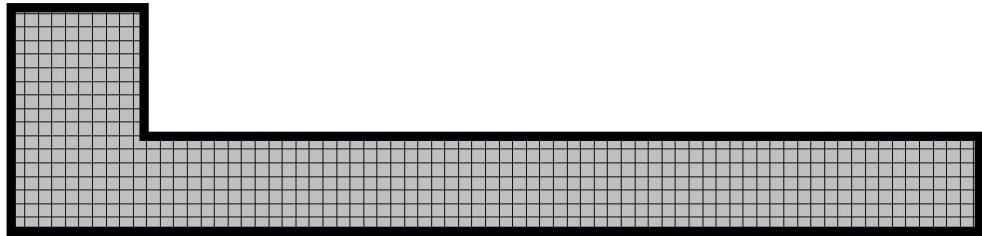
Esta tabela possui apenas 5 pontos de Gauss, porém, na literatura, é possível encontrar tabelas com bem mais pontos de Gauss. O próprio trabalho foi implementado sendo possível utilizar até 15 pontos de Gauss.

4.3 Método das Fibras

O Método das Fibras consiste em subdividir a seção transversal em m pequenas áreas com a finalidade de simplificar uma integral ao longo da área da seção. Este tipo de método pode ser descrito como direto na área da seção e numérico, pois é uma aproximação.

Este tipo de aproximação permite que, a partir do monitoramento das tensões e deformações em cada uma destas áreas, se aproxime a resposta da seção transversal pela soma de suas contribuições.

Figura 18 – Decomposição de uma seção transversal de um pilar de concreto



Fonte: Próprio autor.

Tal metodologia de integração foi utilizada nos trabalho de Galgoul (1979), Sfakianakis (2001), Romero *et al.* (2002), Fonseca (2006). Vale ressaltar que o Método das Fibras segue a mesma metodologia que o Método das Fatias utilizado no trabalho de Nogueira (2013).

Utilizando este princípio, os esforços resistentes podem ser escritos como:

$$N = \sum_{i=1}^m A_i \sigma(\varepsilon_i) \quad (86)$$

$$M_x = \sum_{i=1}^m Y_i A_i \sigma(\varepsilon_i) \quad (87)$$

$$M_y = - \sum_{i=1}^m X_i A_i \sigma(\varepsilon_i) \quad (88)$$

onde A_i representa a área de cada fibra, (X_i, Y_i) representa a coordenada de cada fibra e ε_i a deformação em cada ponto.

Os termos da matriz constitutiva tangente também podem ser calculados por este método e seguem o mesmo raciocínio dos esforços resistentes, conforme as equações:

$$C_{11} = \sum_{i=1}^m A_i E_t(\varepsilon_i) \quad (89)$$

$$C_{12} = C_{21} = \sum_{i=1}^m Y_i A_i E_t(\varepsilon_i) \quad (90)$$

$$C_{13} = C_{31} = - \sum_{i=1}^m X_i A_i E_t(\varepsilon_i) \quad (91)$$

$$C_{22} = \sum_{i=1}^m Y_i^2 A_i E_t(\varepsilon_i) \quad (92)$$

$$C_{23} = C_{32} = - \sum_{i=1}^m X_i Y_i A_i E_t(\varepsilon_i) \quad (93)$$

$$C_{33} = \sum_{i=1}^m X_i^2 A_i E_t(\varepsilon_i) \quad (94)$$

É importante notar que nesse método os eixos não foram rotacionados. Deve-se também respeitar as sub-regiões que cada σ e E_t pertencem. Outro fato importante é a simplicidade de aplicação do método, que é basicamente uma discretização direta.

4.4 Método proposto

A associação entre a integração no contorno, utilizando o teorema de Green que torna o método de cálculo genérico do ponto de vista da geometria, e a integração numérica, por meio das quadraturas de Gauss para curvas suaves.

A integração de Gauss pode ser uma integração exata no caso de polinômios, se escolhido o número de pontos de Gauss adequado, e torna o método de cálculo genérico do ponto de vista da lei constitutiva do material.

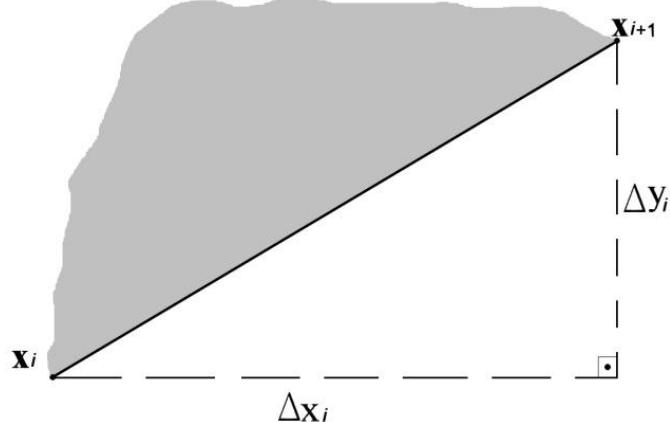
Esta metodologia de cálculo demonstra ser muito precisa e robusta e, por este motivo, será a metodologia aplicada neste trabalho.

Um artifício desta metodologia é a rotação da seção de concreto para o sistema de eixos locais. Os trabalhos de Fafitis (2001), Zupan e Saje (2005), Chiorean (2010) e Papanikolaou (2012) realizaram esta rotação. Assim, para simplificar os cálculos seguintes, vamos determinar os esforços resistentes e a matriz constitutiva tangente em relação ao

sistema de eixos local e, posteriormente, transformar para o sistema eixos global conforme as equações (59) e (62).

Outra simplificação utilizada é a parametrização do segmento de reta da poligonal. Para isso, toma-se uma poligonal qualquer formada por n segmentos (enumerados de 1 a n) e $n + 1$ vértices ($\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_1$). Nesta poligonal, vamos analisar um segmento de reta qualquer i , onde o segmento é formado pelos pontos \mathbf{x}_i e \mathbf{x}_{i+1} , conforme mostra a Figura 19.

Figura 19- Segmento de reta genérico de uma poligonal qualquer



Fonte: Próprio Autor.

A equação paramétrica do segmento de reta pode ser escrita na forma vetorial como:

$$\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1}}{2} + \left(\frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i}{2} \right) t \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1}}{2} + \frac{\Delta \mathbf{x}_i}{2} t \quad (95)$$

onde $t \in [-1,1]$. Este intervalo foi escolhido visando a integração pela quadratura de Gauss, onde a maioria das tabelas encontradas na literatura são para este intervalo de integração. A integração de Gauss será descrita posteriormente no tópico de integração numérica.

Em termos de componentes cartesianas, temos:

$$x_i(t) = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{\Delta x_i}{2} t \quad (96)$$

$$y_i(t) = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} + \frac{\Delta y_i}{2} t \quad (97)$$

Essa expressão pode ser usada para todos os segmentos de reta da poligonal, permitindo que as integrais de linha em cada segmento tenham t como variável de integração e que seus limites sejam sempre -1 e 1.

No caso de figuras poligonais as integrais no contorno podem ser calculadas pelo somatório das integrais em cada segmento de reta. De acordo com as Equações (96) e (97) os diferenciais dx e dy , em cada segmento de reta, são constantes:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\Delta x_i}{2} dt \\ dy &= \frac{\Delta y_i}{2} dt \end{aligned} \quad (98)$$

Este modelo de parametrização é importante para simplificar as expressões e, consequentemente, para que as peculiaridades de cada expressão sejam de fácil visualização. Por exemplo, Fafitis (2001) e Papanikolaou (2012) não parametrizaram e fizeram o método de cálculo diretamente em coordenadas cartesianas, porém isto gera a necessidade de um mapeamento, pois na formulação deles, a expressão fica em uma forma racional e deve-se evitar que o denominador seja nulo, reduzindo, desta forma, a robustez do método aplicado pelos autores.

A expressão do teorema de Green fica, para um contorno associado a uma função suave, da seguinte forma:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_C (Pdx + Qdy) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (P\Delta x_i + Q\Delta y_i) dt \quad (99)$$

onde k representa o número de segmentos que discretiza o contorno C em uma poligonal associada a uma função suave. Lembrando que, se a seção tiver mais de um trecho de curva suave, a mesma deverá ser dividida em polígonos menores e os resultados individuais de cada polígono menor deve ser somado para obter a solução da seção, conforme feito por Sousa Jr e Muniz (2007).

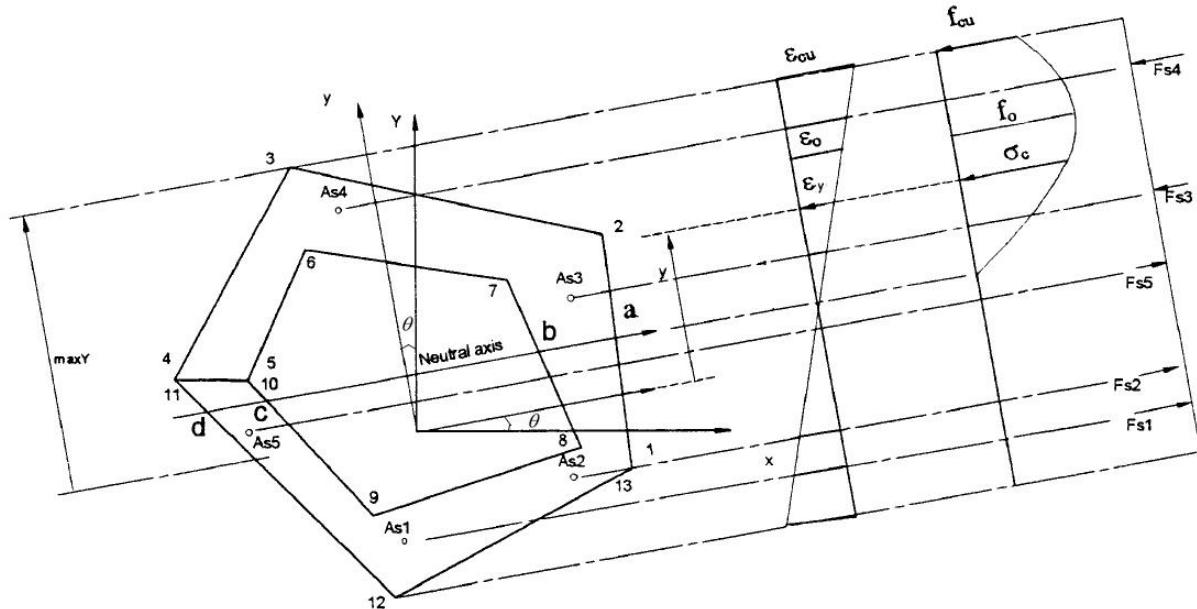
Assim, podem-se manipular as Equações (53), (54) e (55), que representam os esforços resistentes, de forma a escrevê-las em função de termos do tipo:

$$R = \iint_A x^r y^s \sigma(\varepsilon) dA \quad (100)$$

com r e s números inteiros e $\sigma(\varepsilon)$ uma função que representa a tensão na seção em função de ε , que por sua vez, conforme a Equação (52), depende apenas de y . Nessa equação, x e y são

as coordenadas de um ponto da seção em relação a um sistema de eixos localizado no centróide da seção e com o eixo x paralelo à linha neutra, de acordo com a Figura 20.

Figura 20 - Exemplo de seção poligonal compatibilizado com o plano de tensões



Fonte: Fafitis (2001) Adaptado.

Note que:

$$\begin{cases} \text{Se } r = 0 \text{ e } s = 0 \Rightarrow R = N \\ \text{Se } r = 0 \text{ e } s = 1 \Rightarrow R = M_x \\ \text{Se } r = 1 \text{ e } s = 0 \Rightarrow R = -M_y \end{cases} \quad (101)$$

Vale ressaltar que se $\sigma(\varepsilon) = 1$ as integrais resultam nas propriedades geométricas da seção, como podemos visualizar na Equação (100).

$$\begin{cases} r = 0; s = 0; \sigma(\varepsilon) = 1 \Rightarrow R = A \\ r = 1; s = 0; \sigma(\varepsilon) = 1 \Rightarrow R = S_y \\ r = 0; s = 1; \sigma(\varepsilon) = 1 \Rightarrow R = S_x \\ r = 1; s = 1; \sigma(\varepsilon) = 1 \Rightarrow R = I_{xy} \\ r = 2; s = 0; \sigma(\varepsilon) = 1 \Rightarrow R = I_y \\ r = 0; s = 2; \sigma(\varepsilon) = 1 \Rightarrow R = I_x \end{cases} \quad (102)$$

Onde A , S_y , S_x , I_y , I_x e I_{xy} são, respectivamente, a área, os momentos de primeira ordem e os momentos de inércia nos eixos x e y e o produto de inércia no plano xy .

Desta forma, manipulando P e Q obtemos as seguintes funções:

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q = \frac{1}{r+1} x^{r+1} y^s \sigma(\epsilon) \end{cases} \quad (103)$$

Assim, substituindo os valores de P e Q na Equação (100) e, posteriormente, combinando a Equação (100) com a (99), temos:

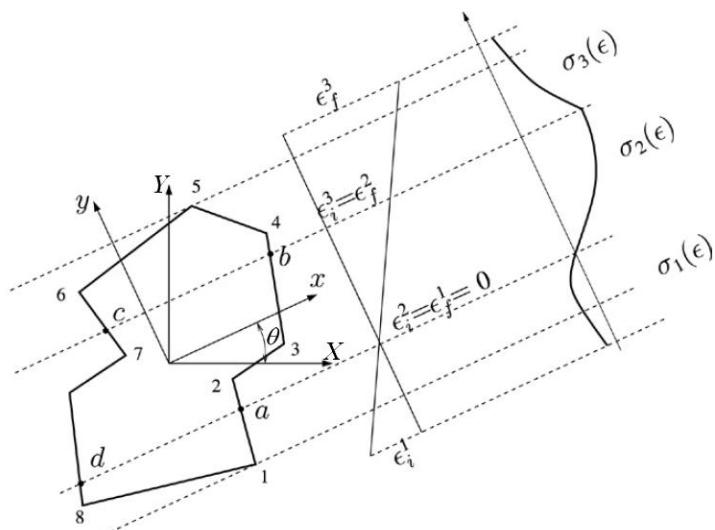
$$\iint_A x^r y^s \sigma(\epsilon) dA = \oint_C \frac{x^{r+1} y^s}{r+1} \sigma(\epsilon) dy = \frac{1}{2} \oint_C \frac{x^{r+1} y^s}{r+1} \sigma(\epsilon) \Delta y dt \quad (104)$$

Vale lembrar que, no sistema de eixos local, segundo a Equação (52), a deformação depende apenas de y , e este valor, para cada elemento de reta da poligonal, depende de t , segundo a Equação (95). Então a relação tensão-deformação para cada segmento da poligonal fica em função de t .

É importante lembrar também que dependendo do valor da deformação ϵ , a relação tensão-deformação irá se comportar de forma diferente. Logo, para cada segmento de reta da poligonal será necessário determinar a qual comportamento da lei constitutiva do material ela pertence. Assim é necessário dividir esta variação de comportamento ou de função da lei constitutiva em sub-regiões onde a função é continuamente suave, conforme o Teorema de Green exige, dependentes do valor da deformação.

No caso que um segmento de reta há pontos pertence a mais de uma sub-região, é necessário encontrar os pontos de fronteira e distinguir os pontos para cada sub-região segundo a enunciação do Teorema de Green.

Figura 21 – Subdivisão da seção por sub-regiões



Fonte: Sousa Jr e Muniz (2007) Adaptado.

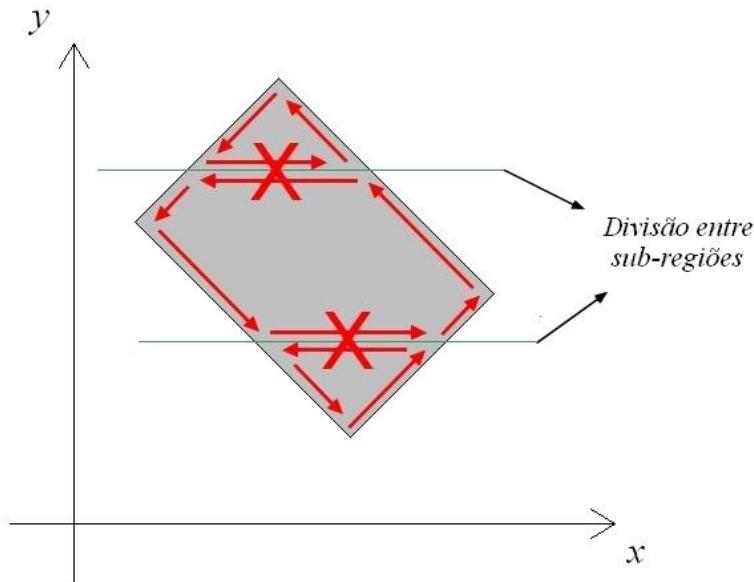
Então, pode-se escrever a tensão de acordo com a sub-região da sua relação tensão-deformação e de acordo com o segmento de reta a qual pertence:

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_R(\varepsilon(y)) \quad (105)$$

onde i representa o segmento da poligonal e R a sub-região a qual o segmento pertence.

Um aspecto importante nesta integração com os eixos rotacionados é que, nas zonas de transição entre regiões, os contornos obtidos na subdivisão do polígono são todos paralelos ao eixo x , ou seja, a variação em y é nula. Conforme a Equação (104), todos os esforços resistentes são multiplicado por Δy_i . Desta maneira, estas retas de transição, no sistema de eixos local, não contribuem no somatório, podendo, então, ser desprezadas, não sendo mais necessário dividir a seção em polígonos e sendo apenas necessário percorrer o contorno respeitando os trechos de cada sub-região conforme a Figura 22.

Figura 22 – Eliminação dos segmentos de transição



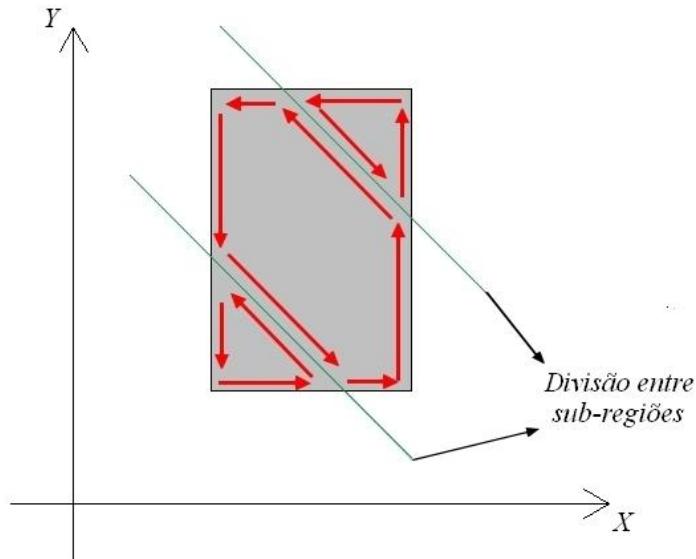
Fonte: Próprio autor.

Esta peculiaridade na rotação dos eixos realizada e comentada por Papanikolaou (2012), e realizada por Fafitis (2001) e Rotter (1985) é relevante, pois o algoritmo de subdivisão da seção em polígonos é complexo, porém é necessário rotacionar todos os pontos, esforços resistentes e termos da matriz constitutiva tangente, gerando, desta forma, um esforço computacional a mais.

Enquanto Sousa Jr. e Muniz (2007) não rotacionam os eixos, evitando custos computacionais com rotação de eixos, porém necessita utilizar o algoritmo complexo para

subdivisão da seção em subpolígonos por sub-região, visto que as retas de transição não são paralelas a X , e, consequentemente, as integrais de fronteira não são nulas conforme Figura 23.

Figura 23 – Sem possibilidade de eliminação dos segmentos de transição



Fonte: Próprio autor.

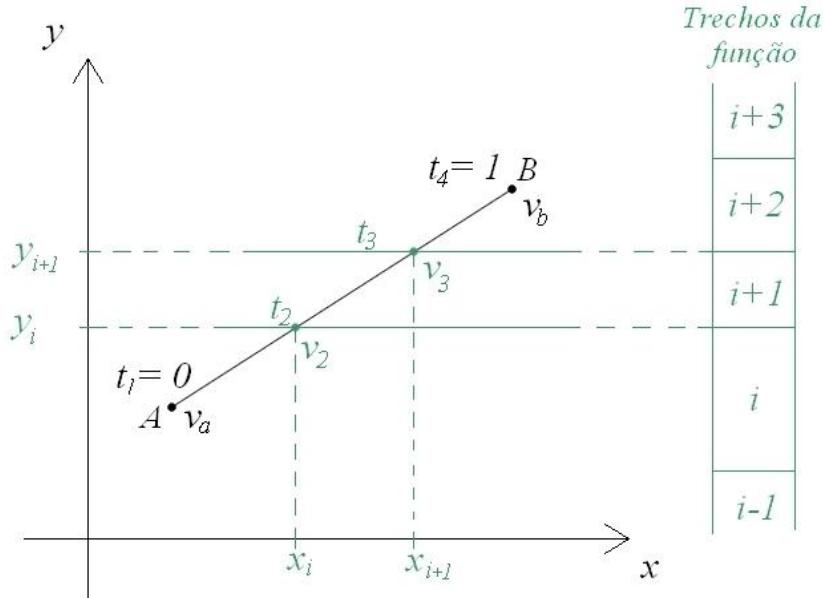
Assim, usando o Teorema de Green, a integral de área da Equação (100) pode ser escrita como uma integral de contorno na seção completa sem subdividir em polígonos, conforme a Equação (99) e (103).

$$\iint_A x^r y^s \sigma(\varepsilon) dA = \oint_C \frac{x^{r+1} y^s}{r+1} \sigma(\varepsilon) dy = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 \frac{x_i^{r+1} y_i^s}{r+1} \sigma_R(\varepsilon(y)) \Delta y_i dt \quad (106)$$

onde n , agora, não representa mais o numero de segmentos, mas sim o numero total de segmentos de reta divididos para cada trecho.

A subdivisão de cada segmento é feita de forma semelhante ao que Sousa Jr e Muniz (2007) utilizaram para subdividir a seção em polígonos menores. No entanto, como é necessário dividir apenas o segmento de reta, o algoritmo ficou mais simples.

Figura 24 – Subdivisão de cada segmento



Fonte: Próprio autor.

Para encontrar o valor do parâmetro t_i , que é necessário para encontrar as coordenadas x_i e y_i da divisão do segmento em trechos correspondentes aos trechos da curva conforme a Figura 24, caso seja necessário, é descrito pela interpolação linear a segui:

$$t_i = \frac{v_i - v_a}{v_b - v_a} \quad (107)$$

onde v_a e v_b são, neste trabalho, os valores das deformações das extremidades do segmento respectivamente.

Assim, pode ser desenvolvido um algoritmo de subdivisão de segmento de reta conforme o Quadro 1.

Quadro 1 – Resumo do algoritmo de subdivisão de uma reta.

1. Determina o índice do trecho que pertence os pontos A e B .
2. Se o índice do trecho dos pontos A e B são iguais, não é necessário subdividir o segmento de reta.
3. Se o índice do trecho dos pontos A e B são diferentes, é necessário subdividir o segmento de reta em trechos.
 - 3.1. Se o índice do trecho do ponto A é maior que o do B , será feita uma divisão crescente e calculado os parâmetros t necessários dos pontos de fronteira conforme a Equação (107).
 - 3.2. Se os trechos do ponto A é menor que o do B , será feito uma divisão decrescente e calculado os parâmetros t necessários dos pontos de fronteira conforme a Equação (107).
4. É retornado um vetor de parâmetros t para que seja calculado as coordenadas x_i e y_i das fronteiras entre trechos.

Fonte: Próprio autor.

Então, substituindo os respectivos valores de r e s na Equação (100), pelos respectivos valores das equações e aplicando a Equação (106), obtém-se N_z , M_x e M_y :

$$N_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 x_i(t) \cdot \sigma_R(\varepsilon(y)) \Delta y_i dt \quad (108)$$

$$M_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 x_i(t) \cdot y_i(t) \cdot \sigma_R(\varepsilon(y)) \cdot \Delta y_i dt \quad (109)$$

$$M_y = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 [x_i(t)]^2 \cdot \sigma_R(\varepsilon(y)) \cdot \Delta y_i dt \quad (110)$$

Usando o mesmo raciocínio para os termos da matriz constitutiva tangente, conforme a Equação (58), obtém-se uma forma genérica análoga:

$$P = \iint_A x^r y^s E_t dA \quad (111)$$

Assim, utilizando o mesmo algoritmo, chega-se às mesmas conclusões:

$$\begin{cases} r = 0; s = 0 \Rightarrow P = \bar{C}_{11} \\ r = 0; s = 1 \Rightarrow P = \bar{C}_{12} = \bar{C}_{21} \\ r = 1; s = 0 \Rightarrow P = -\bar{C}_{13} = -\bar{C}_{31} \\ r = 0; s = 2 \Rightarrow P = \bar{C}_{22} \\ r = 1; s = 1 \Rightarrow P = -\bar{C}_{23} = -\bar{C}_{32} \\ r = 2; s = 0 \Rightarrow P = \bar{C}_{33} \end{cases} \quad (112)$$

$$\iint_A x^r y^s E_t dA = \oint_C \frac{x^{r+1} y^s}{r+1} E_t dy = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 \frac{x_i^{r+1} y_i^s}{r+1} E_t(t) \Delta y_i dt \quad (113)$$

Então, substituindo os valores de r e s conforme a Equação (112), obtém-se as seguintes equações:

$$\bar{C}_{11} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 x_i(t) \cdot E_t(t) \Delta y_i dt \quad (114)$$

$$\bar{C}_{12} = \bar{C}_{21} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 x_i(t) \cdot y_i(t) \cdot E_t(t) \cdot \Delta y_i dt \quad (115)$$

$$\bar{C}_{13} = \bar{C}_{31} = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 [x_i(t)]^2 \cdot E_t(t) \cdot \Delta y_i dt \quad (116)$$

$$\bar{C}_{22} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 x_i(t) \cdot [y_i(t)]^2 \cdot E_t(t) \cdot \Delta y_i dt \quad (117)$$

$$\bar{C}_{23} = \bar{C}_{32} = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 [x_i(t)]^2 \cdot y_i(t) \cdot E_t(t) \cdot \Delta y_i dt \quad (118)$$

$$\bar{C}_{33} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \int_{-1}^1 [x_i(t)]^3 \cdot E_t(t) \cdot \Delta y_i dt \quad (119)$$

Neste trabalho as integrais de cada subdivisão de segmento serão calculadas por meio das quadraturas de Gauss. Por isso as equações foram parametrizadas para o intervalo de -1 a 1, que é o intervalo mais utilizado e tabelado das quadraturas de Gauss. Esta metodologia pode ser considerada como, basicamente, uma integração no contorno e numérica.

A integração exata é possível com o uso das quadraturas de Gauss, porém deve-se salientar que, quando um segmento de reta pertencer a mais de uma região, o mesmo deverá ser dividido em quantos segmentos de reta forem necessários para que cada segmento gerado pertença a apenas uma região, e a lei constitutiva, também, deverá ser da forma polinomial.

Desta forma, utilizando o princípio das quadraturas de Gauss para as Equações (108), (109) e (110), tem-se:

$$N_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta y_i \sum_{j=1}^p w_j x_i(t_j) \sigma_R(t_j) \quad (120)$$

$$M_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta y_i \sum_{j=1}^p w_j x_i(t_j) y_i(t_j) \sigma_R(t_j) \quad (121)$$

$$M_y = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \Delta y_i \sum_{j=1}^p w_j [x_i(t_j)]^2 \sigma_R(t_j) \quad (122)$$

onde p representa o número de pontos de Gauss, w_j o peso de cada ponto de Gauss e t_j a coordenada do ponto de Gauss.

Aplicando o mesmo algoritmo para os termos da matriz constitutiva tangente, tem-se:

$$\bar{C}_{11} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta y_i \sum_{j=1}^p w_j x_i(t_j) E_t(t_j) \quad (123)$$

$$\bar{C}_{12} = \bar{C}_{21} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta y_i \sum_{j=1}^p w_j x_i(t_j) y_i(t_j) E_t(t_j) \quad (124)$$

$$\bar{C}_{13} = \bar{C}_{31} = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \Delta y_i \sum_{j=1}^p w_j [x_i(t_j)]^2 E_t(t_j) \quad (125)$$

$$\bar{C}_{22} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta y_i \sum_{j=1}^p w_j x_i(t_j) [y_i(t_j)]^2 E_t(t_j) \quad (126)$$

$$\bar{C}_{23} = \bar{C}_{32} = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \Delta y_i \sum_{j=1}^p w_j [x_i(t_j)]^2 y_i(t_j) E_t(t_j) \quad (127)$$

$$\bar{C}_{33} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \Delta y_i \sum_{j=1}^p w_j [x_i(t_j)]^3 E_t(t_j) \quad (128)$$

Esta técnica reduz bastante o custo computacional, pois evita a integração analítica de cada segmento que, dependendo da lei constitutiva do material, pode ser muito complexa ou, até mesmo, inviável. Além disso, para curvas suaves (*smooth curves*), as quadraturas de Gauss são conhecidas por serem super convergentes, ou seja, com poucos pontos de Gauss é possível obter altíssima precisão nos resultados.

A integração exata pode ser feita no caso em que a lei constitutiva é representada, em cada região, por polinômios, o que ocorre pela lei constitutiva adotada pela NBR 6118:2003. Para isso deve-se observar o número de pontos de Gauss para cada trecho polinomial. Segue exemplificado na Tabela 3 o número de pontos de Gauss adequados para cada trecho do diagrama tensão-deformação parábola-retângulo, utilizado pela norma brasileira, necessários para integrar exatamente as expressões dos esforços resistentes e os termos da matriz constitutiva tangente conforme as equações (106), (108), (109), e das equações (114) à (119).

Porém calcular o número de pontos de Gauss adequado para cada trecho da função gera um custo computacional desnecessário, visto que, com a variação do número de pontos de Gauss todos os pontos variam, ou seja, não há apenas uma inclusão ou exclusão de pontos.

O número mínimo de pontos de Gauss para calcular todos os esforços e termos da matriz constitutiva tangente pode ser obtido, para um trecho de diagrama tensão-deformação polinomial, por meio da equação:

$$ng = \left\lceil \frac{g+3}{2} \right\rceil \quad (129)$$

onde ng é o número de pontos de Gauss, g é o grau do trecho da função e $\lceil \rceil$ é o menor inteiro maior que o valor. Esta relação pode ser observada na Tabela 3.

Tabela 3 – Número de pontos de Gauss para o diagrama parábola-retângulo

Expressão	Nº de Pontos	
	Parábola ($g = 2$)	Retângulo ($g = 1$)
N_z	2	2
M_x	3	2
M_y	3	2
\bar{C}_{11}	2	1
$\bar{C}_{12} = \bar{C}_{21}$	2	2
$\bar{C}_{13} = \bar{C}_{31}$	2	2
\bar{C}_{22}	3	2
$\bar{C}_{23} = \bar{C}_{32}$	3	2
\bar{C}_{33}	3	2

Fonte: Próprio autor.

No caso de um trecho não polinomial, este trabalho propõe um estudo da curva não polinomial por meio de variações de g até que a integração de Gauss produza erros aceitáveis. Então, adota-se este g como o grau do polinômio equivalente do trecho da função em termos de integração de Gauss.

Papanikolaou (2012) propõe uma integração de Gauss adaptativa, onde o número de pontos de Gauss é escolhido automaticamente para os trechos do diagrama tensão-deformação. Porém essa técnica gera um custo computacional desnecessário, pois essa adaptação é feita cada vez que a curva for avaliada no programa.

Enquanto, no método atual, o trecho não polinomial é implementado no programa com um grau equivalente g adequado. Então a adaptação do trecho ao número de pontos de

Gauss necessários só precisa ser efetuada uma vez, que é durante o estudo, e, consequentemente, o custo computacional é menor.

4.4.1 *Implementação computacional*

Neste trabalho foi escolhido, devido a recursos matemáticos e gráficos, implementar a metodologia de cálculo no programa MATLAB/Octave. O MATLAB é um programa comercial, já o Octave é um programa livre que usa linguagem semelhante ao MATLAB.

O quadro a seguir mostra um resumo do algoritmo a ser implementado:

Quadro 2 – Resumo do algoritmo para cálculo dos esforços e da matriz constitutiva tangente.

1. Calcula o baricentro da seção de concreto.
2. Quando necessário, translada a seção completa para o baricentro calculado.
3. Rotaciona a seção para o sistema de eixos local por meio da Equação (50).
4. Calcula, no sistema local, os esforços e a matriz constitutiva tangente do concreto por meio das Equações (120) à (128).
 - 4.1. Se for um segmento de fronteira entre sub-regiões, o mesmo é descartado.
 - 4.2. Se necessário, divide o segmento em trechos.
 - 4.3. Define o número de pontos de Gauss adequado para cada trecho.
5. Retorna os esforços e a matriz constitutiva tangente para o sistema de eixos global por meio das Equações (59) e (62).
6. Calcula, se houver, a contribuição das barra de aço por meio das Equações (66) a (74).
7. Soma-se as parcelas do concreto e do aço para obtenção dos resultados finais.

Fonte: Próprio autor.

5 EXEMPLOS

Neste capítulo são expostos os resultados dos cálculos dos esforços resistentes e da matriz constitutiva tangente pelo programa desenvolvido no MATLAB/Octave com o intuito de verificar se a metodologia aplicada neste trabalho para realizar a integração necessária para obter os esforços e a matriz é válida.

Os resultados obtidos pelo programa são comparados, inicialmente, com exemplos mais simples, considerando o material no regime linear, onde os resultados analíticos são obtidos com mais facilidade. Em seguida por exemplos um pouco mais complicados realizados por Nogueira (2013) e Fafitis (2001), considerando a não linearidade física do material por meio do diagrama tensão-deformação parábola-retângulo, o mesmo considerado pela NBR 6118:2003, indo até exemplo mais complicados, como é o caso de Zupan e Saje (2005) que consideram um diagrama tensão-deformação racional, ou seja, não polinomial, e o efeito do *tension-stiffening*.

Por fim será feito um exemplo de aplicação utilizando o diagrama tensão-deformação do Eurocode2:2004 no qual a eficiência da metodologia utilizada é comparada com o Método das Fibras.

Os exemplos serão comparados quanto à precisão dos resultados e ao esforço computacional, neste trabalho foi considerado o Número de Avaliações da Função (NAF), função que retorna a tensão no concreto, necessários para calcular a contribuição do concreto como parâmetro de esforço computacional. A contribuição do aço não é considerada como parâmetro porque pode ser obtida de forma trivial.

5.1 Seção retangular – material elástico linear

A implementação computacional de um método de cálculo passa por diversas etapas durante sua concepção. A primeira etapa, logicamente, é escrever um algoritmo e, posteriormente, a primeira versão da implementação. Após esta etapa é importante fazer testes para verificar se o método e a implementação estão corretos. Posteriormente haverá, possivelmente, novas etapas que adicionarão recursos ao programa.

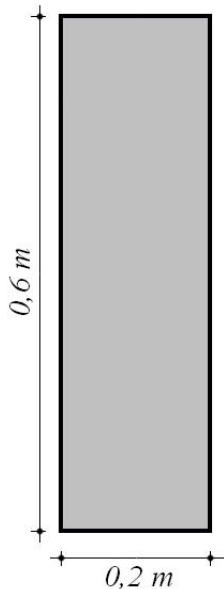
Nos primeiros testes, ainda nas primeiras versões, não se pode começar a verificar a implementação com exemplos complexos, pois no desenvolvimento do código fonte de um programa é muito fácil cometer pequenos erros. A partir de exemplos mais simples, onde é

fácil obter as soluções analíticas, é possível verificar rapidamente se há algum erro no programa ou na metodologia. Contudo, isso não garante que o programa funcione para todos os exemplos testados posteriormente, sendo necessário selecionar exemplos que testem as mais distintas situações.

Este exemplo trata de uma seção retangular de concreto com dimensões mostradas na Figura 25, submetida à flexão composta oblíqua conforme as seguintes deformações generalizadas:

$$\varepsilon_0 = 0,0001 \quad \kappa_X = -0,001 \text{ } m^{-1} \quad \kappa_Y = -0,001 \text{ } m^{-1} \quad E_c = 20 \times 10^6 \text{ } kN/m^2$$

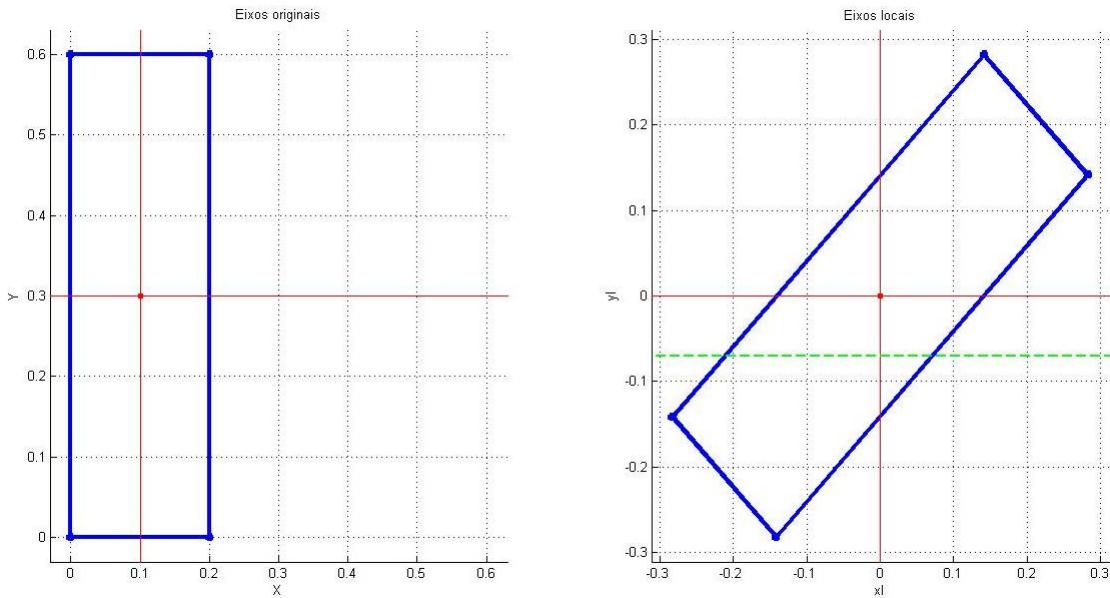
Figura 25 – Exemplo a ser testado



Fonte: Próprio Autor

Na Figura 26 a seguir, a linha azul representa o contorno da seção, a vermelha os eixos baricêtricos e a verde a linha neutra nos eixos locais.

Figura 26 – Desenho gerado pelo programa



Fonte: Próprio autor.

Tabela 4 – Resultados Obtidos

Expressão	Analítica	Atual
N_z	-240,00	-240,00
M_x	-72,00	-72,00
M_y	-8,00	-8,00
\bar{C}_{11}	2,40e+6	2,40e+6
$\bar{C}_{12} = \bar{C}_{21}$	0,00	0,00
$\bar{C}_{13} = \bar{C}_{31}$	0,00	0,00
\bar{C}_{22}	7,20e+4	7,20e+4
$\bar{C}_{23} = \bar{C}_{32}$	0,00	0,00
\bar{C}_{33}	8,00e+3	8,00e+3

Fonte: Próprio autor.

Então, pode-se concluir que para o caso mais simples, que é uma seção duplamente simétrica em relação ao centróide, sem barras de aço como reforço e considerando o material no regime linear, tanto a metodologia de cálculo, como a implementação estão funcionando. Também é possível observar o desacoplamento da matriz constitutiva tangente no caso de uma seção simétrica, ou seja, a matriz constitutiva é uma matriz diagonal.

Este exemplo foi importante para mostrar que a metodologia de cálculo está correta e, principalmente, motivar para os próximos testes e aprimoramento do programa.

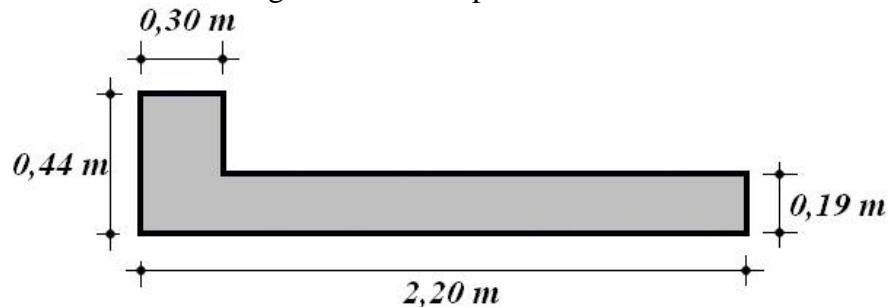
5.2 Seção em L – material elástico linear

A proposta deste exemplo é mostrar acoplamento da matriz constitutiva tangente em um exemplo não simétrico. É importante observar que o exemplo ainda continua simples, porém com uma peculiaridade a mais que o exemplo anterior: a não simetria.

Este exemplo trata de uma seção em L de concreto de dimensões indicadas na Figura 27, submetida à flexão composta oblíqua conforme as seguintes deformações generalizadas:

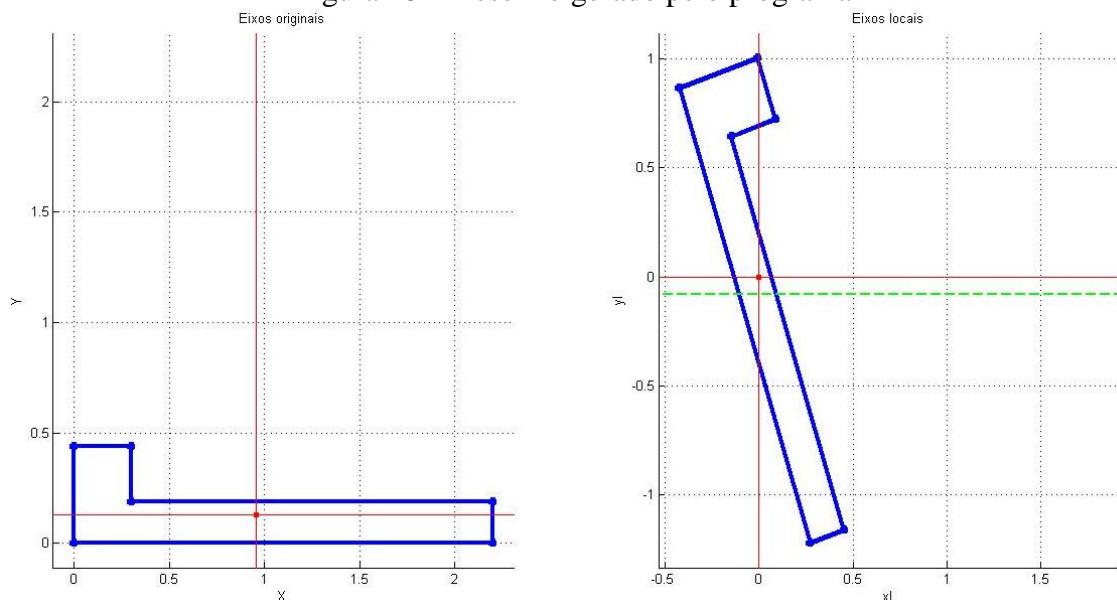
$$\varepsilon_0 = 0,0005 \quad \kappa_x = -0,002 \text{ } m^{-1} \quad \kappa_y = -0,003 \text{ } m^{-1} \quad E_c = 20 \times 10^6 \text{ } kN/m^2$$

Figura 27 – Exemplo a ser testado



Fonte: Próprio Autor

Figura 28 – Desenho gerado pelo programa



Fonte: Próprio autor.

A Tabela 5 mostra os resultados obtidos neste exemplo. Pode-se perceber que os resultados coincidiram mais uma vez com os valores analíticos. Então, pode-se concluir que para o caso de uma figura assimétrica em relação ao centróide, sem barras de aço como reforço e considerando o material no regime linear tanto a metodologia de cálculo, como a implementação estão funcionando.

Este exemplo foi importante para mostrar que, mesmo com alterações na geometria da seção, o programa se mantém preciso.

Tabela 5 – Resultados Obtidos

Expressão	Analítica	Atual
N_z	-4930,00	-4930,00
M_x	-891,94	-891,94
M_y	-13858,57	-13858,57
\bar{C}_{11}	9,86e+6	9,86e+6
$\bar{C}_{12} = \bar{C}_{21}$	0,00	0,00
$\bar{C}_{13} = \bar{C}_{31}$	0,00	0,00
\bar{C}_{22}	9,45e+4	9,45e+4
$\bar{C}_{23} = \bar{C}_{32}$	2,66e+5	2,66e+5
\bar{C}_{33}	4,53e+6	4,53e+6

Fonte: Próprio autor.

Apesar de não estar explícito na tabela, os resultados coincidiram até a quinta casa decimal, que foi o número de casas decimais escolhido para comparação entre os resultados.

5.3 Seção retangular de Nogueira (2013)

O propósito deste exemplo é avaliar a consideração da não linearidade física do material por meio do diagrama tensão-deformação parábola-retângulo e verificar o cálculo da contribuição do reforço de aço na seção.

As deformações serão avaliadas conforme Nogueira (2013) que utilizou uma tabela de estados de deformação para avaliar o Método das Fatias.

Tabela 6 – Estados de Deformação

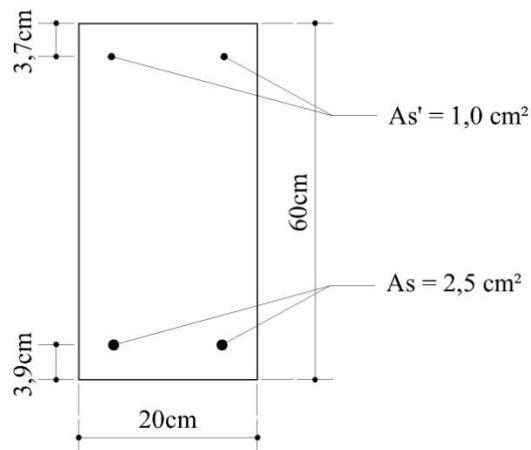
Casos	ε_{min}	ε_{max}	$\kappa(m^{-1})$	ε_m
a ₁	-0,0050	-0,0040	0,001666667	-0,00450
a ₂	-0,0050	-0,0030	0,003333333	-0,00400
a ₃	-0,0050	-0,0010	0,006666667	-0,00300
a ₄	-0,0050	0,0005	0,009166667	-0,00225
b ₁	-0,0030	-0,0020	0,001666667	-0,00250
b ₂	-0,0030	-0,0010	0,003333333	-0,00200
b ₃	-0,0030	0,0005	0,005833333	-0,00125
c ₁	-0,0150	-0,0005	0,024166667	-0,00775
c ₂	-0,0150	0,0005	0,025833333	-0,00725
d ₁	0,0005	0,0050	0,007500000	0,00275

Fonte: Nogueira (2013)

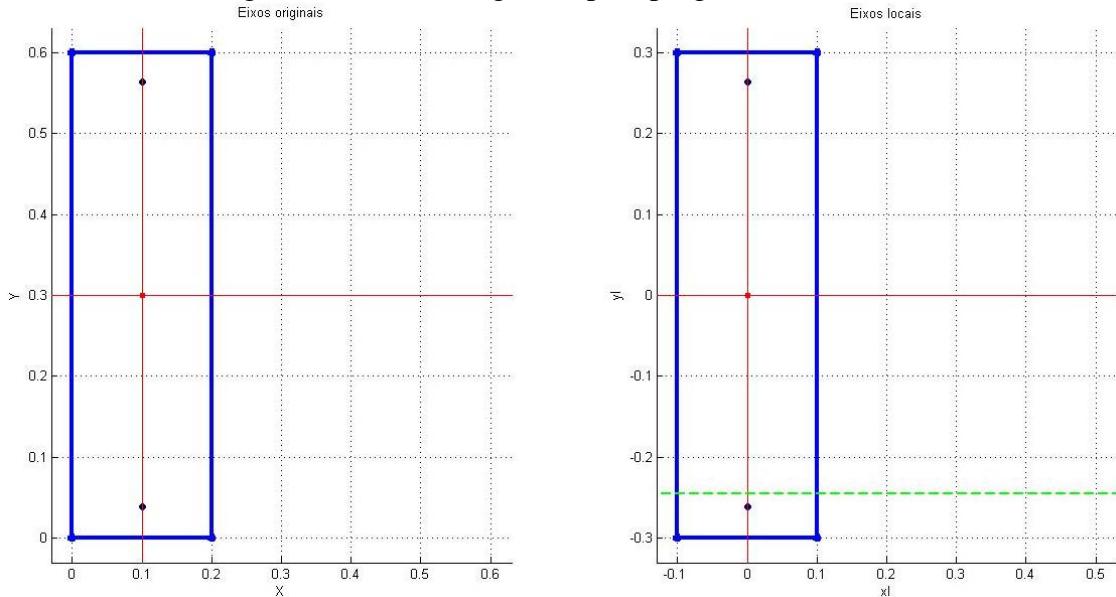
Este exemplo trata de uma seção retangular de concreto de dimensões e reforço conforme a Figura 29 submetida à flexão composta reta de acordo com as deformações generalizadas sugeridas por Nogueira (2013). Lembrando que a orientação vetorial utilizada por Nogueira (2013) é diferente do trabalho atual, sendo necessário trocar o sinal da curvatura na entrada de dados. Os dados considerados para o aço e concreto são os seguintes:

$$\begin{cases} f_c = 20000 \text{ kN/m}^2 \\ f_y = 500000 \text{ kN/m}^2 \\ E_s = 210000000 \text{ kN/m}^2 \end{cases}$$

Figura 29 – Exemplo a ser testado



Fonte: Nogueira (2013).

Figura 30 – Desenho gerado pelo programa no caso a₄

Fonte: Próprio autor.

O ponto, no desenho gerado pelo programa, representa as barras de aço.

Tabela 7 – Resultados obtidos para os diversos casos

Caso	Deformações		Solução Atual		Erro	
	ε_m	κ (m ⁻¹)	N	M_X	N	M_X
a ₁	-0,00450	0,001666667	-175,000	19,444	0,000%	0,000%
a ₂	-0,00400	0,003333333	-770,000	153,140	0,000%	0,000%
a ₃	-0,00300	0,006666667	-1561,920	158,620	0,000%	0,000%
a ₄	-0,00225	0,009166667	-1279,000	12,699	0,000%	0,000%
b ₁	-0,00250	0,001666667	-2551,430	14,347	0,000%	0,000%
b ₂	-0,00200	0,003333333	-2403,310	-20,701	0,000%	0,000%
b ₃	-0,00125	0,005833333	-1633,770	-163,273	0,000%	0,000%
c ₁	-0,00775	0,024166667	-521,429	123,527	0,000%	0,000%
c ₂	-0,00725	0,025833333	-462,453	94,860	0,000%	0,000%
d ₁	0,00275	0,007500000	-1538,520	119,395	0,000%	0,000%

Fonte: Próprio autor.

Os resultados obtidos, conforme a Tabela 5, são exatos utilizando poucos pontos de Gauss. Mais precisamente, o maior número de pontos de Gauss utilizados foi três, gerando, para o caso a₄, por exemplo, um NAF igual a 18. Por outro lado no Método das Fatias é

necessário, segundo Nogueira (2013), um NAF de pelo menos 100 para garantir uma precisão aceitável dos esforços referentes à área de concreto.

Com essa simples comparação com o Método das Fatias, que é um caso específico do Método das Fibras, é possível notar a vantagem da utilização da metodologia desenvolvida neste trabalho. Utilizando esta metodologia é possível obter, principalmente para diagramas tensão-deformação polinomiais, uma precisão exata com um esforço computacional bem menor, pois, no caso do Método das Fatias, com um esforço bem superior, é possível obter apenas erros aceitáveis.

Os resultados analíticos obtidos para comparação dos resultados foram obtidos por Nogueira (2013) por meio das equações analíticas desenvolvidas por Melo (2000).

5.4 Seção retangular de Fafitis (2001)

O propósito deste exemplo é ampliar o exemplo de Nogueira (2013) para o caso em que a seção é submetida à flexão composta oblíqua.

No trabalho de Fafitis (2001), os dados de entrada não puderam ser obtidos diretamente para ser utilizados neste trabalho, sendo necessário fazer algumas manipulações. Dentre as manipulações estão a necessidade de determinar as coordenadas das barras no sistema de eixos global, visto que era dado no local e de calcular as deformações generalizadas a partir da posição da linha neutra dada e da deformação axial mínima. Além disso, os dados do trabalho de Fafitis (2001) apresentam apenas três casas decimais. Os dados de entrada deste exemplo seguem na tabela a seguir, inclusive os dados manipulados.

Tabela 8 – Dados de entrada

Dados	Valores
f_c	0,85x5 ksi
A_{barras}	1,27 in ²
f_y	60 ksi
E_s	30000 ksi
X_1	4,000 in
Y_1	3,725 in
X_2	16,000 in
Y_2	3,725 in
X_3	16,000 in
Y_3	25,732 in
X_4	10,000 in
Y_4	25,732 in
X_5	4,000 in
Y_5	25,732 in

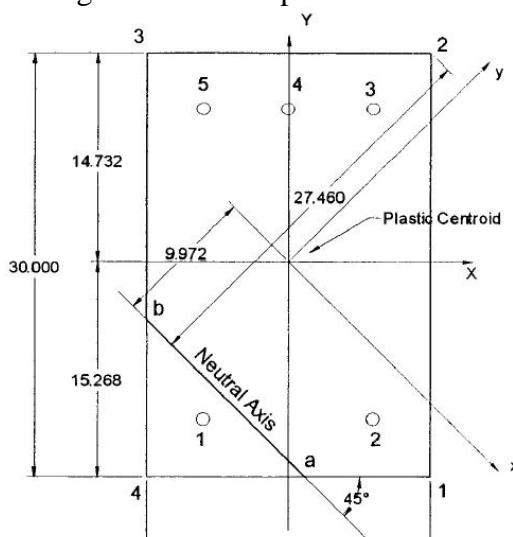
Fonte: Próprio autor.

Onde X_i e Y_i são as coordenadas das barras de aço que tiveram que ser transformadas do sistema de eixos local, dados de Fafitis (2001), para o sistema de eixos global.

As deformações generalizadas são obtidas por meio de manipulação dos dados fornecidos por Fafitis (2001), conforme a Figura 31. Então, para este exemplo, as deformações generalizadas são:

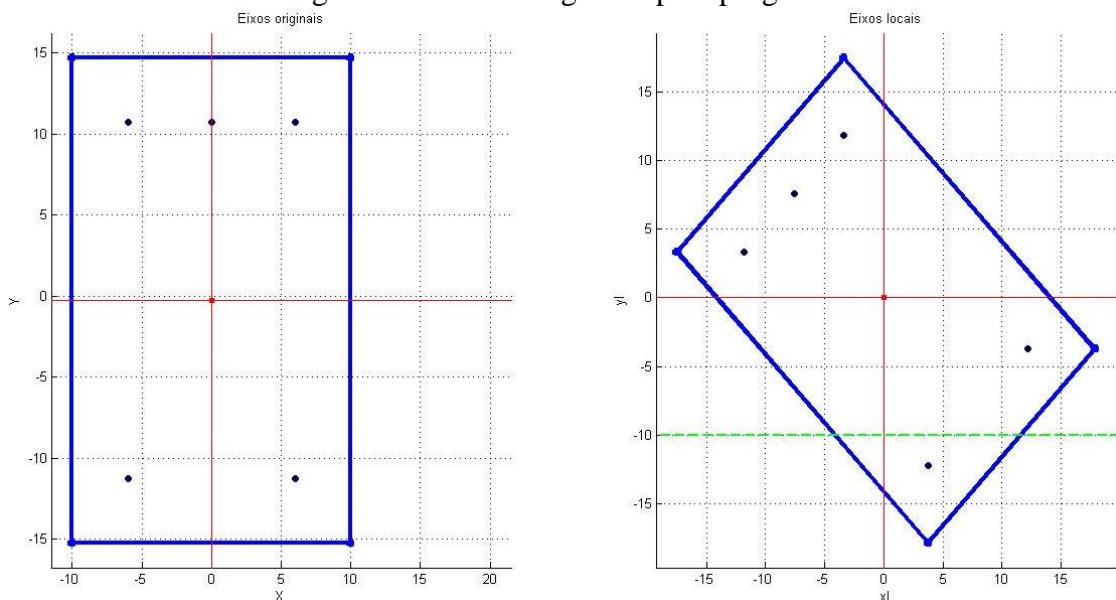
$$\varepsilon_0 = -0,001271012381646 \quad \kappa_x = -0,000127458120903/\sqrt{2} \text{ cm}^{-1} \quad \kappa_y = -\kappa_x$$

Figura 31 – Exemplo a ser testado



Fonte: Fafitis (2001).

Figura 32 – Desenho gerado pelo programa



Fonte: Próprio autor.

Este exemplo também foi utilizado por Papanikolaou (2012) que calculou o valor exato para os esforços utilizando 100 pontos de Gauss. A Tabela 9 compara os resultados obtidos nos três trabalhos.

Tabela 9 – Comparaçao com resultados da literatura

Esforços	Solução Exata Papanikolaou (2012)	Solução Fafitis (2001)	Solução Atual	Diferença Fafitis	Erro
N_Z	-1999,66	-1997,29	-1999,63	0,117%	-0,002%
M_X	-7405,90	-7411,72	-7406,62	-0,069%	0,010%
M_Y	2820,60	2796,55	2820,60	0,853%	0,000%

Fonte: Próprio autor.

Na teoria, como foi utilizado o número de pontos de Gauss adequados para cada curva, os resultados obtidos pelo trabalho atual deveriam ser exatos. Contudo, devido à necessidade de manipular os dados de entrada do programa, e ao uso de poucas casas decimais por Fafitis (2001), foi gerado esse erro residual.

Este exemplo também propiciou demonstrar que a metodologia de integração pode ser utilizada para outros pontos de referência além do centróide, como, por exemplo, o centróide plástico, que é o ponto de referência deste exemplo.

O esforço computacional também reduziu significativamente, pois, enquanto a metodologia atual necessitou de um NAF de, apenas, 24 para calcular com alta precisão (exatamente) os esforços na área de concreto, o Método das Fibras, seguindo a orientação de

Nogueira (2013), necessitaria dividir cada lado em 100 vezes, o que geraria 10000 áreas menores a serem calculadas e, consequentemente, um NAF de 10000.

5.5 Seção I de Zupan e Saje (2005)

Os exemplos anteriores demonstraram que a metodologia de cálculo deste trabalho funciona bem para os esforços resistentes e para o diagrama tensão-deformação sugeridos pela NBR 6118:2003 (parábola-retângulo), que é uma curva com trechos polinomiais.

Nos exemplos de Zupan e Saje (2005) é possível verificar a metodologia do trabalho para os termos da matriz constitutiva tangente, pois os autores apresentam de forma clara e direta os resultados obtidos. Além disso, avaliar a metodologia quanto a um diagrama tensão deformação não polinomial, segundo Zupan e Saje (2005) *apud* Desayi e Krishnan (1979), e quanto à consideração do *tension-stiffening* linear, segundo Bergan e Holand (1979).

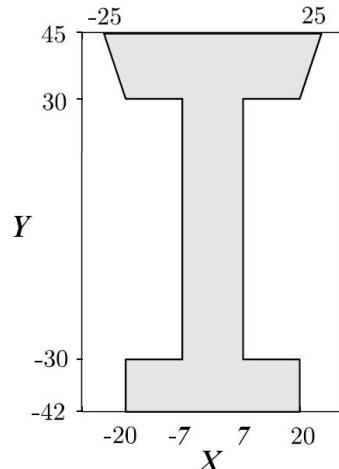
Este exemplo trata de uma seção em I de concreto, de geometria não simples, sem reforço, conforme a Figura 33. Os parâmetros necessários estão explícitos a seguir:

$$\begin{cases} \varepsilon_u = -8 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_1 = -2,2 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_r = 5,5 \times 10^{-5} \\ \varepsilon_m = 7,0 \times 10^{-4} \\ f_m = 3,3 \text{ kN/cm}^2 \end{cases}$$

As tensões generalizadas para este exemplo são:

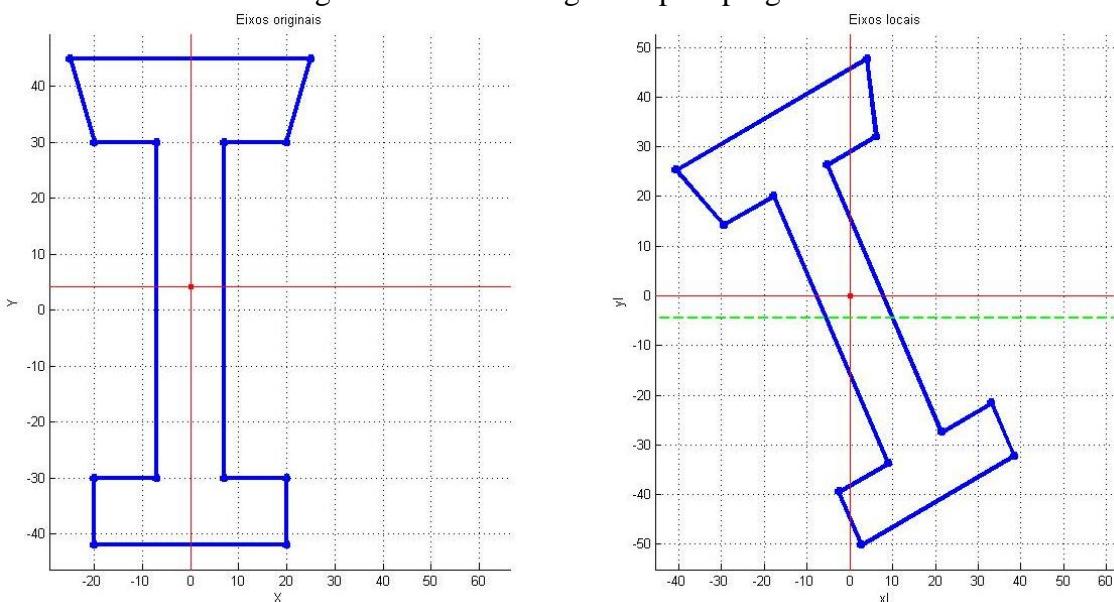
$$\varepsilon_0 = -0,0010 \quad \kappa_x = -0,0002 \text{ cm}^{-1} \quad \kappa_y = 0,0001 \text{ cm}^{-1}$$

Figura 33 – Exemplo a ser testado



Fonte: Zupan e Saje (2005) adaptado.

Figura 34 – Desenho gerado pelo programa



Fonte: Próprio autor.

É importante ressaltar que Zupan e Saje (2005) apresentaram os resultados com apenas duas casas decimais. Logo a comparação foi feita para apenas duas casas decimais, o que prejudica a mensuração da precisão. Outro fato importante é que, durante os testes, foi percebido que o número de pontos de Gauss necessários para integrar a curva adotada por Zupan e Saje (2005) de forma precisa equivale ao número de pontos necessários para integrar um polinômio de 4º grau exatamente. Logo é como se a curva fosse aproximada a um polinômio de 4º grau, em termos de integração de Gauss, vide Tabela 10.

Tabela 10 – Comparação dos resultados com curva equivalente a polinômio do 4º grau

Esforços	Solução Exata Zupan e Saje (2005)	Solução Atual	Erro
N_Z	-1,88E+03	-1,87E+03	-0,532%
M_X	-3,67E+04	-3,67E+04	0,000%
M_Y	-6,58E+03	-6,58E+03	0,000%
C_{11}	5,25E+04	5,25E+04	0,000%
C_{12}	-4,72E+06	-4,72E+06	0,000%
C_{13}	-8,38E+05	-8,38E+05	0,000%
C_{22}	-1,19E+08	-1,19E+08	0,000%
C_{23}	-2,73E+07	-2,73E+07	0,000%
C_{33}	-1,38E+07	-1,38E+07	0,000%

Fonte: Próprio autor.

Para a obtenção destes resultados foi necessário um NAF de, apenas, 58, ou seja, um esforço computacional baixo, tendo em vista a complexidade do diagrama tensão-deformação utilizado e a geometria assimétrica da seção.

5.6 Retângulo vazado de Zupan e Saje (2005)

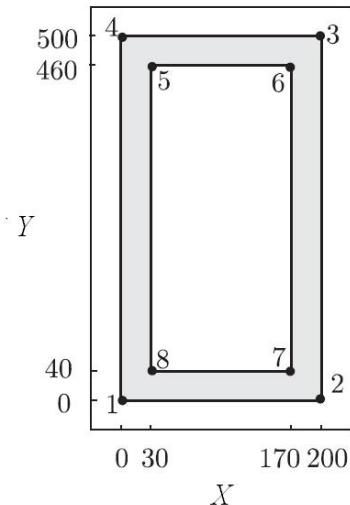
Este exemplo visa testar a metodologia do trabalho quanto à utilização de seções vazadas. Todos os parâmetros do exemplo anterior serão mantidos, exceto as deformações generalizadas.

Este exemplo trata de uma seção retangular vazada de concreto, sem reforço, conforme a Figura 35. As tensões generalizadas para este exemplo são:

$$\varepsilon_0 = -0,0010 \quad \kappa_x = 0,00005 \text{ } cm^{-1} \quad \kappa_y = -0,0001 \text{ } cm^{-1}$$

É importante citar que, aparentemente, Zupan e Saje (2005) trocaram κ_x e κ_y , visto que a rotação não coincidia com as curvaturas citadas no trabalho dos mesmos. Contudo, depois deste ajuste, tantos os resultados (Tabela 11), como o desenho do programa atual coincidiram (comparar Figura 36 e Figura 37) com o de Zupan e Saje (2005).

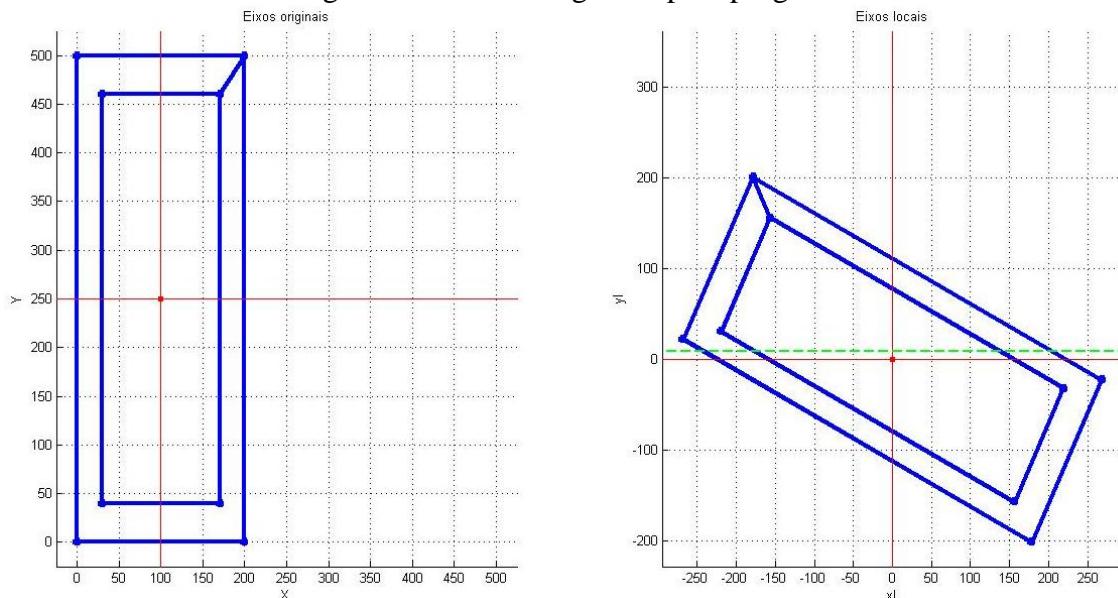
Figura 35 – Exemplo a ser testado



Fonte: Zupan e Saje (2005) adaptado.

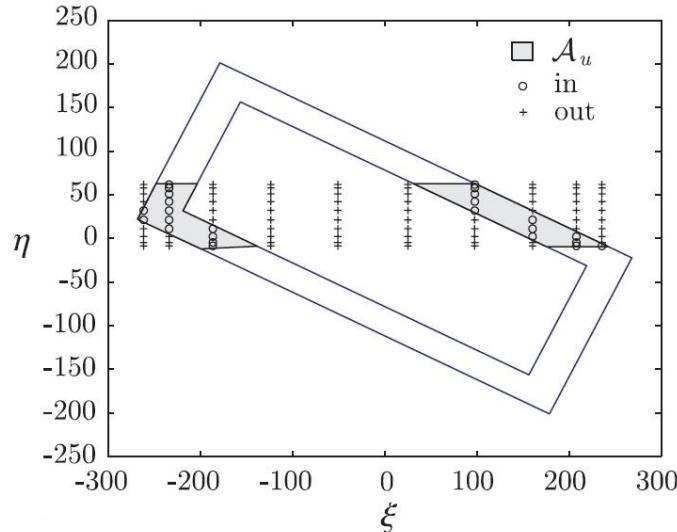
É interessante observar o sentido anti-horário no contorno externo e o sentido horário dos pontos no contorno interno.

Figura 36 – Desenho gerado pelo programa



Fonte: Próprio autor.

Figura 37 – Resultado Zupan e Saje no sistema de eixos local



Fonte: Zupan e Saje (2005).

Tabela 11 – Comparação dos resultados com curva equivalente a polinômio do 4º grau

Esforços	Solução Exata Zupan e Saje (2005)	Solução Atual	Erro
N_Z	-2,13E+04	-2,13E+04	0,000%
M_X	7,35E+05	7,35E+05	0,000%
M_Y	-2,13E+05	-2,13E+05	0,000%
C_{11}	2,24E+06	2,24E+06	0,000%
C_{12}	1,04E+08	1,04E+08	0,000%
C_{13}	-2,67E+07	-2,67E+07	0,000%
C_{22}	6,94E+10	6,94E+10	0,000%
C_{23}	3,78E+10	3,78E+10	0,000%
C_{33}	1,76E+10	1,76E+10	0,000%

Fonte: Próprio autor.

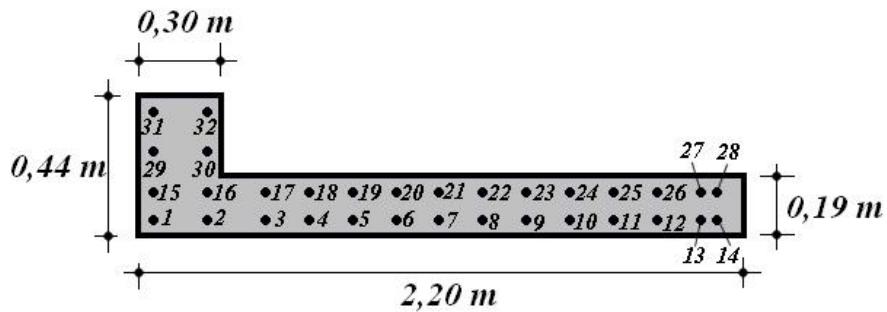
Então podemos concluir que, para seções vazadas, a metodologia e a implementação atuais mantém o mesmo desempenho, pois foi obtido um NAF igual a 78.

5.7 Seção em L de concreto armado

Os exemplos anteriores demonstraram a precisão e eficiência computacional da metodologia aplicada neste trabalho. Este exemplo visa aplicar a metodologia atual e o Método das Fibras, que é uma metodologia de simples aplicação e muito utilizada na literatura, para verificar a convergência dos resultados por Fibras, e comparar os métodos quanto a precisão e esforço computacional dos mesmos.

Visando esta comparação será feito um pilar em L, conforme a Figura 38, reforçado com barras de aço. As coordenadas das barras estão descritas na Tabela 12 que tomou a extremidade inferior esquerda da seção como origem do sistema de coordenadas. Além disso, este exemplo utiliza o diagrama tensão-deformação sugerido pelo Eurocode2:2004.

Figura 38 – Exemplo a ser testado



Fonte: Próprio autor.

Todas as barras são de aço CA-50 ($f_y = 500 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$ e $E_s = 210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$) e possuem diâmetro efetivo de 25 mm. Os demais parâmetros estão descritos a seguir:

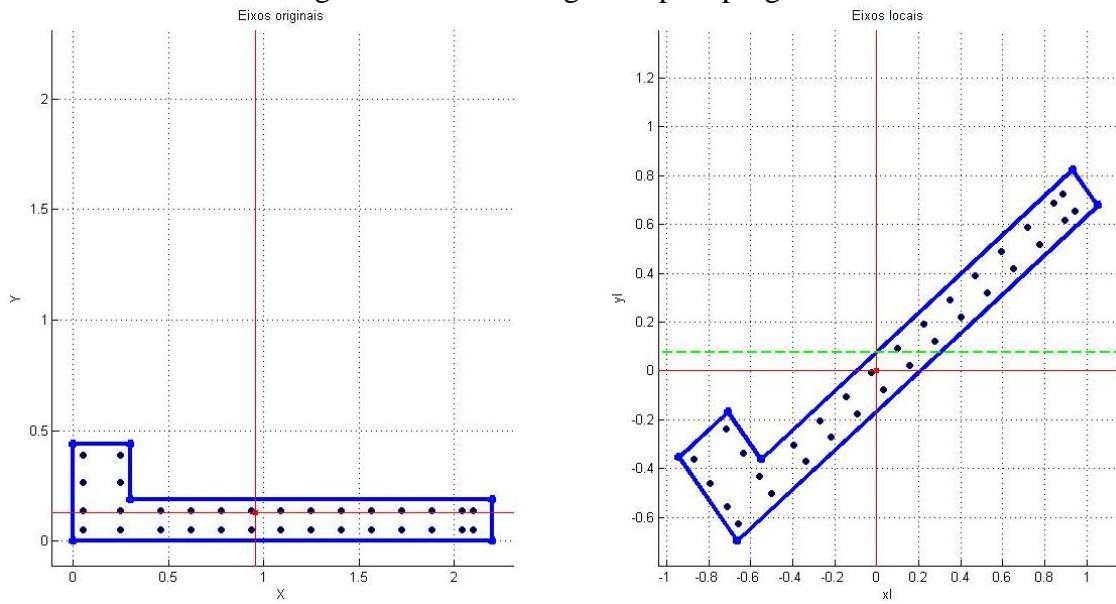
$$\begin{cases} f_m = 38 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 \\ \varepsilon_1 = -2,16187687 \times 10^{-3} \\ E_{cm} = 32,83656803 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \end{cases}$$

As deformações generalizadas utilizadas neste exemplo são:

$$\varepsilon_0 = -0,0001 \quad \kappa_x = 0,0010 \text{ m}^{-1} \quad \kappa_y = -0,0008 \text{ m}^{-1}$$

Na Tabela 12 a seguir está descrita a posição de todas as barras.

Figura 39 – Desenho gerado pelo programa



Fonte: Próprio autor.

Tabela 12 – Posições das barras de aço

Barra	X_i (m)	Y_i (m)
1	0,0505	0,0505
2	0,2495	0,0505
3	0,4583	0,0505
4	0,6167	0,0505
5	0,7750	0,0505
6	0,9333	0,0505
7	1,0917	0,0505
8	1,2500	0,0505
9	1,4083	0,0505
10	1,5667	0,0505
11	1,7250	0,0505
12	1,8833	0,0505
13	2,0417	0,0505
14	2,0990	0,0505
15	0,0505	0,1395
16	0,2495	0,1395
17	0,4583	0,1395
18	0,6167	0,1395
19	0,7750	0,1395

20	0,9333	0,1395
21	1,0917	0,1395
22	1,2500	0,1395
23	1,4083	0,1395
24	1,5667	0,1395
25	1,7250	0,1395
26	1,8833	0,1395
27	2,0417	0,1395
28	2,0990	0,1395
29	0,0505	0,2645
30	0,2495	0,2645
31	0,0505	0,3895
32	0,2495	0,3895

Fonte: Próprio autor.

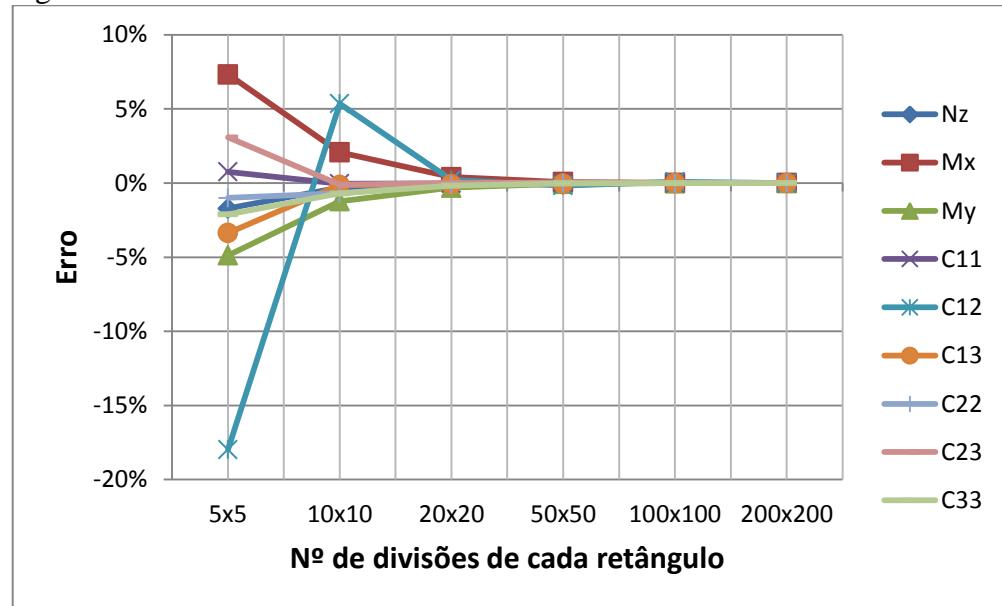
Tabela 13 – Comparação Métodos das Fibras x metodologia atual

Esforços	Solução Atual	Métodos das Fibras - Erro					
		5x5	10x10	20x20	50x50	100x100	200x200
N_Z	5,05741E+03	-1,717%	-0,310%	-0,072%	-0,011%	-0,003%	-0,001%
M_X	9,07905E+01	7,329%	2,071%	0,402%	0,070%	0,018%	0,004%
M_Y	2,27651E+03	-4,876%	-1,232%	-0,314%	-0,050%	-0,012%	-0,003%
C_{11}	1,49313E+07	0,755%	-0,046%	-0,021%	0,024%	-0,004%	0,001%
C_{12}	2,43026E+05	-17,968%	5,360%	0,212%	-0,173%	0,086%	-0,010%
C_{13}	5,87331E+06	-3,360%	-0,130%	-0,082%	-0,032%	0,002%	-0,002%
C_{22}	1,86965E+05	-1,003%	-0,703%	-0,114%	0,002%	-0,013%	0,000%
C_{23}	4,30180E+05	3,083%	-0,113%	0,003%	0,036%	-0,007%	0,002%
C_{33}	6,05661E+06	-2,111%	-0,697%	-0,170%	-0,022%	-0,008%	-0,001%
NAF	26	75	300	1200	7500	30000	120000

Fonte: Próprio autor.

Notou-se que, para a curva do Eurocode2:2004, a integração por Gauss, assim como a aproximação utilizada nos exemplos de Zupan e Saje (2005), aproximando a curva de uma curva polinomial do 4º obteve resultados bem satisfatórios. Tanto a partir da Tabela 13, quanto da Figura 40 é possível observar que os resultados obtidos pelo Métodos da Fibras convergem para a solução obtida pela metodologia atual, utilizando a aproximação do polinômio de 4º grau.

Figura 40 – Gráfico do erro do Método das Fibras com o aumento das divisões



Fonte: Próprio autor.

Percebe-se, neste exemplo, conforme a Tabela 13, que, para uma divisão dos retângulos em 20x20 em cada lado obteve-se, para todos os termos, um erro aceitável abaixo de 5%. Porém, para este caso, foi necessário um NAF de 1200, enquanto a metodologia de cálculo utilizada neste trabalho necessitou, para um cálculo praticamente exato, um NAF de, apenas, 26, o que demonstra sua alta precisão com o baixo esforço computacional quando comparada com o Método das Fibras.

É interessante observar também a convergência dos resultados para o resultado obtido pela metodologia de cálculo atual, demonstrando que os resultados obtidos neste trabalho estão bem próximos dos resultados exatos.

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou inicialmente uma revisão sobre os principais métodos de integração em seções submetidas à flexão composta reta e oblíqua, passando por métodos que integram direto na região, analítica ou numericamente, até métodos de integração no contorno, com o emprego do Teorema de Green, também podendo ser analítica ou numericamente.

Com base nesta revisão foi desenvolvida uma metodologia de cálculo dos esforços resistentes e da matriz constitutiva tangente, baseada no uso do Teorema de Green e da quadratura de Gauss, como utilizado por Fafitis (2001) e Papanikolaou (2012). Esta metodologia foi implementada com sucesso, conforme mostrado nos exemplos numéricos.

Este trabalho teve como principais contribuições a extensão da metodologia utilizada por Papanikolaou (2012) para o cálculo da matriz constitutiva tangente, o uso da equação paramétrica dos segmentos de reta na obtenção das integrais no contorno, o desenvolvimento de um algoritmo eficiente para a subdivisão dos segmentos em trechos e uma abordagem mais simples e eficiente para tratar curvas tensão-deformação não polinomiais.

A metodologia de cálculo foi avaliada desde exemplos mais simples, como uma seção duplamente simétrica, sem reforço e no regime linear, até exemplos mais complexos, como os exemplos de Nogueira (2013) e Fafitis (2001), que utilizam o diagrama tensão-deformação parábola-retângulo e consideram a contribuição do aço. Em todos estes exemplos foram obtidos resultados exatos.

Os exemplos de Zupan e Saje (2005) possuem geometrias complexas e a curva tensão-deformação não polinomial, incluindo a consideração do *tension-stiffening*. Estes exemplos foram fundamentais para validação da metodologia proposta, pois estes autores apresentaram de forma clara todos os esforços e termos da matriz calculados analiticamente. Neste caso, os resultados obtidos pelo método proposto são indistinguíveis dos apresentados no trabalho citado.

O último exemplo teve como objetivo comparar a metodologia atual com o Método das Fibras para o caso de uma seção complexa e diagrama tensão-deformação não polinomial (Eurocode2:2004). Os resultados obtidos mostraram que o Método das Fibras necessitou de 1200 avaliações da relação tensão-deformação para calcular os resultados com um erro aceitável, enquanto a metodologia proposta necessitou apenas de 26 avaliações.

Desta forma, pode-se concluir que o objetivo deste trabalho de desenvolver e implementar um método robusto, preciso e eficiente para cálculo dos esforços internos e da matriz tangente de seções transversais de concreto armado foi atingido. O uso da integração no contorno via Teorema de Green permite o tratamento de seções poligonais com qualquer geometria. O método pode ser aplicado a seções com trechos curvos (e.g. circulares) desde que estas curvas sejam aproximadas por poligonais.

Diversas relações tensão-deformação, normalmente definidas por trechos, tem sido propostas para representar o comportamento do concreto, tanto na compressão quanto na tração. O uso da integração analítica leva a expressões complexas e de difícil implementação, uma vez que cada esforço interno e termo da matriz tangente precisa ser integrado separadamente. Adicionalmente, diferentes expressões são obtidas para cada trecho de cada curva, tornando a implementação computacional de uma nova relação tensão-deformação trabalhosa e sujeita a erros.

Por outro lado, o uso do algoritmo de subdivisão automática dos segmentos e da quadratura de Gauss pelo método proposto torna a implementação genérica, i.e. independente da curva tensão-deformação, e produz resultados exatos para curvas polinomiais e com elevada precisão mesmo para curvas não polinomiais. O número de pontos de Gauss necessários para a obtenção de bons resultados para uma curva não polinomial pode ser estudada previamente através de exemplos numéricos. Esta abordagem é mais eficiente do que a utilização de integração adaptativa, sendo recomendada quando o número de integrações a ser realizado é elevado, como na análise não linear de pórticos espaciais.

Finalmente, apesar da formulação e implementação computacional do método proposto ser mais complexa que a do Método das Fibras, esta implementação só precisa ser realizada uma vez. Uma vez que a implementação for testada, o trabalho de implementação de novas curvas tensão-deformação para uso, nos dois métodos, é exatamente o mesmo. Por outro lado, a precisão e eficiência computacional do método proposto são muito superiores à do Método das Fibras.

6.1 Trabalhos Futuros

A principal sugestão para novos trabalhos é aplicar o método proposto na análise não linear, por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), de vigas ou pilares submetidos à flexão composta oblíqua utilizando a metodologia de integração na seção desenvolvida

neste trabalho para obter os termos da matriz constitutiva tangente, que é necessária nas iterações de um procedimento incremental-iterativo como o Método de Newton-Raphson para a resolução das equações de equilíbrio.

Outro trabalho sugerido é o uso da metodologia de cálculo dos esforços resistentes, desenvolvida neste trabalho, para ser utilizado no dimensionamento de pilares submetidos à flexão composta oblíqua gerando, inclusive, as curvas ou superfícies de interação utilizadas no dimensionamento.

Ainda seria possível realizar uma ampliação da metodologia desenvolvida neste trabalho, que é voltada para o concreto armado, para calcular os esforços resistentes e a matriz constitutiva tangente de seções mistas aço-concreto.

REFERÊNCIAS

- APOSTOL, Tom M. **CALCULUS: Multi Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability** – Volume 2. 2^a Ed., Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1969.
- ASSAN, Aloisio Ernesto. **Método dos elementos finitos: Primeiros Passos**. 2. ed. Campinas: Unicamp, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimentos**. Rio de Janeiro, 2003.
- AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. 1^a ed. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto: Portugal, 2003.
- Brøndum-Nielsen T. Ultimate flexural capacity of cracked polygonal concrete sections under biaxial bending. **ACI J**, v. 82, p. 863–869, 1985.
- BONET, J. L., ROMERO, M. L., MIGUEL, P. F., FERNANDEZ, M. A. A fast stress integration algorithm for reinforced concrete sections with axial loads and biaxial bending. **Computers and Structures**, Valencia, v. 82, p. 213-225, Jan. 2004.
- BRANSON, D. E. **Procedures for computing deflections**. ACI Journal, New York, n. 65, 1969.
- CAMPOS FILHO, A. **Dimensionamento e verificação de seções poligonais de concreto armado submetidas à flexão composta obliqua**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.
- CHIOREAN, C. G. Computerised interaction diagrams and moment capacity contours for composite steel–concrete cross-sections. **Computers and Structures**, Cluj-Napoca, Romania, v. 32, n. 11, p. 3734-3757, Nov. 2010.
- CORELHANO, A. G. B., CORRÊA, M. R. S. Análise Não Linear Geométrica E Física De Núcleos Rígidos De Edifícios Altos Em Concreto Armado. **Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos**, v. 12, n. 56, p. 1-9, 2010.
- COOK, Robert D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. New York: John Wiley & Sons, 1991. v.1.
- DUMONT, N.A.; MUSSO JR., F. **Dimensionamento e verificação de seções de concreto armado e protendido e verificações da estabilidade de vigas-colunas no estado limite último com o uso de microcomputadores**. Rio de Janeiro: Departamento de Engenharia Civil da PUC/RJ, 1987.

DUNDAR, C., SAHIN, B. Arbitrarily Shaped Reinforced Concrete Members Subject To Biaxial Bending And Axial Load. **Computer & structures**. V. 49. No. 4. p.643-662, Reino Unido, 1993

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings.** EN 1992-1-1. Brussels. 2004.

FAFITIS, A. Interaction surfaces of reinforced-concrete sections in biaxial bending. **Journal of Structural Engineering**, Arizona, v. 127, n. 7, p. 840-846, July, 2001.

FONSECA, Marcos Torres. **Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas.** 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

GALGOUL, N. S. Dimensionamento de seção qualquer à flexão composta. **Revista Estrutura**, vol. 86, pp. 99–112, 1979.

HOLANDA, A. S. PARENTE Jr, E., MELO, L. T. B., SILVA, H. N., SOUSA, S. C. **Utilização de Modelos Resilientes na Análise de Pavimentos Asfálticos.** 2010. Disponível em: <<http://www.redeasfalto.org.br>>. Acessado em: 17 de Jun. de 2013.

KWAN, K. H., LIAUW, T. C. Computerized Ultimate Strength Analysis Of Reinforced Concrete Sections Subjected To Axial Compression And Biaxial Bending. **Computer & Structures**, Vol. 21, No. 6, p. 1119-1127, 1985.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v.1.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com geometria analítica.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v.2.

MELO, Antônio Macário Cartaxo de. **Projeto ótimo de pórticos planos de concreto armado.** 2000. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.

NOGUEIRA, G. V. **Análise Não Linear Física de Pórticos Planos de Concreto Armado.** Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

PAPANIKOLAOU, Vassilis K. Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load. **Computers and Structures**, Thessaloniki, Greece, v. 98-99, p. 33-54, May, 2012.

PALLARÉS L., MIGUEL, P. F., FERNANDEZ M. A. A numerical method to design reinforced concrete sections subjected to axial forces and biaxial bending based on ultimate strain limits. **Eng Struct**, v. 31, p. 3065–3071, 2009.

ROMERO, M. L., MIGUEL, P. F. e CANO, J. J. A parallel procedure for nonlinear analysis of reinforced concrete three-dimensional frames. **Computers and Structures**, vol. 80, pp.

1337–1350, 2002.

ROMERO, M. L., BONET, J. L., BARROS, M. H. F. M. Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending. **Computers and Structures**, Valencia, v. 84, p. 2184-2193, Out. 2006.

ROTTER, J. M. Rapid Exact Inelastic Biaxial Bending Analysis. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 111, No. 12, Dez, 1985.

SFAKIANAKIS, M. G. Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics. **Advances in Engineering Software**, Patras, Greece, v. 33, p. 227-242, Apr. 2002.

SILVA, A. A. E. F. **Contribuições Ao Estudo Da Não-Linearidade Física Em Vigas De Concreto Armado**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2012.

SOUSA JR., João Batista de; CALDAS, Rodrigo Barreto. Numerical Analysis of Composite Steel-Concrete Columns of Arbitrary Cross Section. **Journal of Structural Engineering**, Minas Gerais, v. 131, n. 11, p. 1721-1730, Nov. 2005.

SOUSA JR., João Batista de; MUNIZ, Cereno F. D. G. Analytical integration of cross section properties for numerical analysis of reinforced concrete, steel and composite frames. **Engineering Structural**, Minas Gerais, v. 29, p. 618-625, July. 2006.

STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelos De Elementos Finitos Para Análise Não Linear Física E Geométrica De Vigas E Pórticos Planos De Concretoarmado**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

STEWART, James. **CÁLCULO**, Vol. 2, 5^a Ed., Brasil: Thomson, 2007.

YAU, C. Y., CHAN, S. L., So, A. K. W. Biaxial bending design of arbitrarily shaped reinforced concrete column. **ACI Struct J**. v. 90, p. 269–278, 1993.

YEN, J. Y. R. Quasi-Newton Method For Reinforced-Concrete Column Analysis And Design. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 117, No. 3, Mar, 1991.

ZUPAN, D., SAJE, M. Analytical integration of stress field and tangent material moduli over concrete cross-sections. **Computers and Structures**, v. 83, p. 2368-2380, Mar. 2005.