



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL:  
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL**

**MICHELLE VIEIRA XAVIER DE OLIVEIRA**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS PROTENDIDAS**

**FORTALEZA**

**2017**

MICHELLE VIEIRA XAVIER DE OLIVEIRA

ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS PROTENDIDAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior.

Coorientador: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- O48a Oliveira, Michelle Vieira Xavier de.  
Análise Numérica de Vigas Mistas Protendidas / Michelle Vieira Xavier de Oliveira. –  
2017. 82 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós- Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2017.  
Orientação: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior.  
Coorientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.
1. Vigas mista de aço e concreto. 2. Protensão externa. 3. Vigas mistas protendidas. 4. Método dos Elementos Finitos. 5. Análise numérica. I. Título.

CDD 624.1

---

MICHELLE VIEIRA XAVIER DE OLIVEIRA

ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS PROTENDIDAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Aprovada em: 29/11/2017.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Evandro Parente Junior (Coorientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo (Membro Interno)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Eduardo de Moraes Barreto Campello (Membro Externo)  
Universidade de São Paulo (USP)

Ao meu pai, Francisco Belo de Oliveira Neto,  
por me mostrar o caminho do bem e da  
caridade, pela excelência na condução dos  
trabalhos, pelas virtudes e pelas boas  
lembranças. Você é nosso exemplo! Tenho  
orgulho de lhe chamar de Pai!

À minha mãe, Micheline Vieira Xavier de  
Oliveira, por toda vida dedicada a minha  
existência, por acreditar fielmente nos meus  
esforços, pelo amor e carinho destinados a  
minha formação, pelo apoio e compreensão em  
todos os momentos de minha vida.

## AGRADECIMENTOS

Ao Meu Deus, agradeço por tudo que tens me proporcionado. Pelo dom da vida, pela família que me acolhe, pela minha essência, por todos grandiosos ensinamentos dia-a-dia, por me guiar para o caminho do bem, e principalmente, nesta ocasião, pela oportunidade de conseguir o tão desejado objetivo, ser mestre.

Aos meus pais, Neto (*in memoriam*) e Micheline, serei eternamente grata por todo amor, ensinamentos, confiança e, acima de tudo, por terem acreditado em mim e na minha capacidade alcançar cada objetivo traçado. Meu pai, o senhor é meu exemplo de sabedoria, de homem do bem, de pai, de amor pela família. Guardo em minhas lembranças todo o esforço que fazia para me acompanhar nas viagens semanais à Fortaleza, e por se dedicar incansavelmente aos projetos da nossa família. Com certeza, as minhas realizações só foram possíveis porque vocês estavam sempre por perto, me dando força e coragem para enfrentar os desafios da vida.

À minha irmã Marília, pela amizade, pela cumplicidade, por me ouvir e tentar compreender a área da engenharia como ninguém. Aos meus irmãos, Matheus e Dijon, obrigada pelo companheirismo e pelas ajudas constantes nas formatações e configurações dos computadores, no decorrer de todo o mestrado acadêmico.

Ao meu noivo, Lucas Silva, por estar sempre ao meu lado e pelo amor que transmite. Agradeço o seu carinho e atenção... Você sem dúvida é o responsável por todo meu crescimento e amadurecimento.

Aos meus amigos, Ada, Savanna, Daianne, Ana Tália e Jorge, agradeço pela amizade, pela companhia diária, pelas conversas, por todo apoio e força nos momentos em que mais precisei, e por todo o incentivo sempre.

Agradeço ao meu orientador, Prof. João Batista Marques Sousa Junior, inicialmente por conduzir esse estudo com muita sabedoria, mostrando tamanha compreensão, paciência e atenção diante a análise do referido trabalho.

Agradeço ao meu coorientador, Prof. Evandro Parente Junior, pelas contribuições relevantes para a realização da dissertação.

Aos colegas do Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV).

À Capes pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Em construções metálicas e/ou mistas, em geral utilizam-se soluções em vigas mistas de aço e concreto. Estas vigas são formadas pela associação de um perfil metálico com a laje superior, por meio de conectores de cisalhamento, trazendo um ganho significativo em relação à viga de aço isolada. A protensão é uma técnica tradicional em estruturas de concreto, e tem como objetivo melhorar o comportamento da estrutura ao introduzir um estado prévio de tensões por meio de cabos pré-tensionados posicionados internamente ou externamente ao perfil metálico. Trabalhos recentes indicam que a utilização de cabo de protensão pode trazer uma grande contribuição à capacidade de carga das vigas mistas, bem como a seu comportamento em serviço. Poucos trabalhos, no entanto, foram desenvolvidos a respeito da análise numérica destas estruturas. Diante disso, o presente trabalho visa apresentar o desenvolvimento de um modelo de elementos finitos de barra para vigas mistas biapoiadas protendidas por meio de cabos externos, considerando a não-linearidade física e geométrica na formulação. A metodologia baseia-se na combinação de um código computacional preexistente, capaz de simular numericamente estruturas de concreto protendido em análise não-linear, com os elementos de viga mista de aço e concreto desenvolvidos e implementados, e a avaliação dos resultados será feita por meio de comparações com resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura.

**Palavras-chave:** Vigas mista de aço e concreto, Protensão externa, Vigas mistas protendidas, Método dos Elementos Finitos, Análise numérica.

## ABSTRACT

In metal and/or mixed constructions, solutions are commonly used in composite steel and concrete beams. These beams are formed by the association of a metallic profile with the upper slab, by means of shear connectors, bringing a significant gain in relation to the isolated steel beam. Protension is a traditional technique in concrete structures, and aims to improve the behavior of the structure by introducing a previous state of stresses by means of pretensioned cables positioned internally or externally to the metal profile. Recent works indicate that the use of prestressing steel can make a great contribution to the load capacity of the composite beams, as well as their behavior in service. Few studies, however, were developed regarding the numerical analysis of these structures. Therefore, the present work aims to present the development of a finite bar element model for simply supported composite beams projected through external tendons, considering the physical and geometric nonlinearity in the formulation. The methodology is based on the combination of a preexisting computational code, able to numerically simulate prestressed concrete structures in non-linear analysis, with the composite steel and concrete beam elements developed and implemented, and the results evaluation will be done through comparisons with numerical and experimental results available in the literature.

**Keywords:** Composite steel and concrete beams, External protension, Prestressed composite beams, Finite element method, Numerical analysis.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Croqui esquemático de viga mista de aço e concreto protendida. ....	15
Figura 2 – Exemplos de viga mista de aço e concreto.....	16
Figura 3 – Elementos constituintes da viga mista de aço e concreto. ....	16
Figura 4 – Tipos de lajes que podem compor a viga mista de aço e concreto. ....	18
Figura 5 – Conectores de cisalhamento soldados a viga metálica.....	19
Figura 6 – Configuração deformada de uma viga mista simplesmente apoiada. ....	19
Figura 7 – Princípios da protensão em estruturas de concreto. ....	21
Figura 8 – Princípio da protensão em estruturas metálicas. ....	21
Figura 9 – Desenhos esquemáticos de cabos de protensão. ....	23
Figura 10 – Exemplos de traçados do cabo de protensão.....	24
Figura 11 – Tipos de desviadores do cabo de protensão. ....	24
Figura 12 – Geometria e deformação do sistema. ....	29
Figura 13 – Viga mista sujeita a um momento negativo e sua seção transversal.....	29
Figura 14 – Equipamento de teste e instrumentação. ....	30
Figura 15 – Geometria das vigas analisadas por Lorenc e Kubica (2006).....	30
Figura 16 – Equipamentos de teste de vigas mistas contínuas com dois e três vãos.....	31
Figura 17 – Modelo analítico de viga mista protendidas com conexão de cisalhamento deformáveis.....	33
Figura 18 – Modo de flambagem em uma viga contínua protendida. ....	34
Figura 19 – Elemento de viga e do segmento do cabo de protensão externo.....	35
Figura 20 – Exemplos numéricos de vigas mistas protendidas com traçado reto e poligonal. ....	36
Figura 21- Graus de liberdade dos elementos. ....	38
Figura 12 – Deformação do cabo de protensão e elemento de viga. ....	46
Figura 23 – Modelo construtivo para o concreto segundo Hognestad (1951).....	54
Figura 24 – Modelo elasto-plástico com endurecimento linear. ....	54
Figura 25 – Diagrama tensão-deformação do aço de protensão (Menegotto e Pinto, 1973). ..	55
Figura 26 – Nomenclatura para as dimensões geométricas das seções transversais de vigas mistas protendidas. ....	56
Figura 27 – Seção transversal das vigas A e B ensaiadas por Saadatmanesh et al (1989).....	57
Figura 28 – Elevação da viga A ensaiada por Saadatmanesh et al (1989). ....	57
Figura 29 – Curva de equilíbrio da viga A ensaiada por Saadatmanesh et al (1989).....	58

Figura 30 – Comparação do comportamento da viga A (Saadatmanesh et al,1989) considerando dois estágios: sem protensão e com protensão externa. ....	59
Figura 31 – Configuração deformada da viga A ensaiada por Saadatmanesh et al (1989). ....	59
Figura 32 – Elevação da viga B ensaiada por Saadatmanesh et al (1989). ....	60
Figura 33 – Curva de equilíbrio da viga B ensaiada por Saadatmanesh et al (1989). ....	60
Figura 34 – Comparação do comportamento da viga B (Saadatmanesh et al,1989) considerando dois estágios: sem protensão e com protensão externa. ....	61
Figura 35 – Configuração deformada da viga B ensaiada por Saadatmanesh et al (1989). ....	62
Figura 36 – Incremento de tensão no cabo das vigas A e B ensaiadas por Saadatmanesh et al (1989). ....	62
Figura 37 – Detalhamento da seção transversal das vigas A, B e C testadas por Ayyub et al.	63
Figura 38 – Elevação das vigas A e B ensaiada por Ayyub et al (1989). ....	63
Figura 39 – Elevação da viga C ensaiada por Ayyub et al (1989). ....	64
Figura 40 – Curva de equilíbrio da viga A ensaiada por Ayyub et al (1989). ....	65
Figura 41 – Incremento de tensão no cabo da viga A ensaiada por Ayyub et al (1989). ....	66
Figura 42 – Curva de equilíbrio da viga B ensaiada por Ayyub et al (1989). ....	66
Figura 43 – Incremento de tensão no cabo da viga B ensaiada por Ayyub et al (1989). ....	67
Figura 44 – Curva de equilíbrio da viga C ensaiada por Ayyub et al (1989). ....	67
Figura 45 – Incremento de tensão no cabo da viga C ensaiada por Ayyub et al (1989). ....	68
Figura 46 – Comparação do comportamento das vigas analisadas por Ayyub et al (1989) considerando dois estágios: sem protensão e com protensão externa. ....	69
Figura 47 – Configuração deformada para as vigas ensaiada por Ayyub et al (1989). ....	69
Figura 48 – Detalhamento da seção transversal e elevação das vigas BS1 e BS2 ensaiadas por Chen e Gu (2005). ....	71
Figura 49 – Curva de equilíbrio das vigas BS1 e BS2 ensaiada por Chen e Gu (2005). ....	71
Figura 50 – Configuração deformada para as vigas ensaiada por Chen e Gu (2005). ....	72
Figura 51 – Curva de equilíbrio da viga BS2 ensaiada por Chen e Gu (2005) e comparada com resultados numéricos de outros autores. ....	73

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Dimensões geométricas das vigas ensaiadas por Saadatmanesh et al. ....	57
Tabela 2 – Especificações das vigas A, B e C testadas por Ayyub et al. ....	63
Tabela 3 – Dimensões geométricas das vigas ensaiadas por Chen e Gu.....	70

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivo .....</b>	<b>13</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização da dissertação .....</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>VIGAS MISTAS DE AÇO E CONCRETO COM PROTENSÃO EXTERNA ....</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Componentes das vigas mistas protendidas .....</b>	<b>16</b>
<b>2.1.1</b>	<b><i>Perfil de aço .....</i></b>	<b><i>17</i></b>
<b>2.1.2</b>	<b><i>Lajes de concreto .....</i></b>	<b><i>17</i></b>
<b>2.1.3</b>	<b><i>Conectores de cisalhamento .....</i></b>	<b><i>18</i></b>
<b>2.1.4</b>	<b><i>Protensão.....</i></b>	<b><i>20</i></b>
<b>2.2</b>	<b>Histórico de pesquisas relacionadas a vigas mistas com protensão externa .....</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>37</b>
<b>3.1</b>	<b>Formulação do elemento finito da viga mista de aço e concreto .....</b>	<b>39</b>
<b>3.2</b>	<b>Contribuição da armadura passiva.....</b>	<b>44</b>
<b>3.3</b>	<b>Formulação do elemento finito do cabo de protensão .....</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>ANÁLISE NUMÉRICA DAS ESTRUTURAS .....</b>	<b>51</b>
<b>4.1</b>	<b>Método do traçado do caminho de equilíbrio .....</b>	<b>51</b>
<b>4.1.1</b>	<b><i>Controle de carga (aplicação da protensão) .....</i></b>	<b><i>52</i></b>
<b>4.1.2</b>	<b><i>Controle de deslocamentos (aplicação da carga externa).....</i></b>	<b><i>52</i></b>
<b>4.2</b>	<b>Modelo constitutivos dos materiais .....</b>	<b>53</b>
<b>4.2.1</b>	<b><i>Concreto .....</i></b>	<b><i>53</i></b>
<b>4.2.2</b>	<b><i>Aço de armadura passiva.....</i></b>	<b><i>54</i></b>
<b>4.2.3</b>	<b><i>Aço de protensão .....</i></b>	<b><i>55</i></b>
<b>5</b>	<b>EXEMPLOS DE APLICAÇÕES .....</b>	<b>56</b>
<b>5.1</b>	<b>Vigas bi apoiadas (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989).....</b>	<b>56</b>
<b>5.2</b>	<b>Vigas bi apoiadas (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990) .....</b>	<b>63</b>
<b>5.3</b>	<b>Vigas bi apoiadas (Chen e Gu, 2005) .....</b>	<b>70</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>74</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>75</b>
	<b>APÊNDICE A – Dados de entrada para a análise de viga mista protendida submetida a momento positivo .....</b>	<b>77</b>
	<b>APÊNDICE B – Dados de entrada para a análise de viga mista protendida submetida a momento negativo .....</b>	<b>80</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os sistemas estruturais mistos aço-concreto têm sido largamente utilizados nas obras civis. Em construções metálicas e/ou mistas, em geral, utilizam-se soluções em vigas mistas de aço e concreto, que surgem como consequência natural da utilização de vigas de aço sob a laje, proporcionando um melhor aproveitamento das características de cada material constituinte. Além disso, este tipo de estrutura permite reduzir os custos e aprimorar o comportamento estrutural.

A princípio, a viga era projetada de forma a suportar o peso da laje sobre ela apoiada, no entanto, mais tarde a contribuição da laje passou a ser considerada, caracterizando um sistema misto. Na prática, pode-se dizer que cada elemento é utilizado buscando-se explorar o máximo das suas propriedades relacionadas à resistência e rigidez, o que por sua vez torna a estrutura mista uma solução econômica e eficiente.

Sabe-se que o concreto resiste a altas tensões em compressão, já o aço é considerado um material dúctil e apresenta um excelente desempenho quando submetido à tração. Ou seja, nessa estrutura, a laje é submetida ao esforço compressivo, enquanto que a viga de aço é empregada por ser mais eficiente na absorção dos esforços de tração. Portanto, é preferível empregar ambos materiais e usufruir de seus melhores atributos de forma conjunta.

Contudo, para se alcançar um comportamento estrutural misto, é necessário que a associação de um perfil metálico com a laje superior (maciça, treliçada ou em steel deck) seja eficiente, de forma a restringir o escorregamento longitudinal, isto é, permitir a transferência do esforço cortante entre os componentes, e evitar que ocorra a separação vertical na interface aço-concreto. Assim, a interação entre laje e viga é garantida por meio de elementos metálicos denominados conectores de cisalhamento.

De acordo com Oehlers e Bradford (1995), os conectores de cisalhamento garantem um comportamento conjunto entre os componentes da seção transversal, compatibilizando as deformações entre os materiais constituintes (aço e concreto). Entretanto, vale ressaltar, que ainda assim podem surgir fenômenos que devem ser levados em conta na análise estrutural de vigas mistas, dentre eles, o tipo de interação entre os componentes.

As vigas mistas, quando comparadas a outros elementos estruturais, apresentam grande rigidez e podem suportar carregamentos elevados, consequentemente conseguem vencer grandes vãos. Todavia, trabalhos recentes indicam que a utilização de cabos de protensão pode trazer uma grande contribuição à capacidade de carga das vigas mistas, bem como a seu comportamento em serviço.

A busca de novos materiais e novas tecnologias construtivas, juntamente com o potencial de consumo de aço nas construções atuais e as vantagens do seu emprego, favorece a utilização da técnica de protensão. Esta técnica é considerada um método comumente adotado para melhorar o comportamento estrutural, e seu uso tem sido largamente difundido em estruturas de concreto, porém sua aplicação vai bem além, podendo ser aplicada a diferentes tipos de materiais.

Nas estruturas de concreto, a protensão é utilizada com o propósito de reduzir os esforços de tração, ou até mesmo fazer a peça trabalhar apenas à compressão, proporcionando um maior aproveitamento da capacidade resistente da seção de concreto. Por outro lado, a protensão em vigas de aço pode ser usada com a finalidade de atender imposições arquitetônicas ou construtivas, como por exemplo a limitação da altura da viga, ou ainda tornar possíveis projetos arquitetônicos mais modernos e arrojados. (FERREIRA, 2007).

Com o princípio de gerar na estrutura solicitações opostas às das cargas que vão surgir em decorrência dos carregamentos externos, a utilização de cabos de protensão propicia o ganho de resistência devido ao estado prévio de tensões que é introduzido à estrutura, favorecendo a redução das dimensões transversais dos perfis metálicos. Além disso, essa tecnologia é indicada para reforçar e recuperar estruturas metálicas existentes, como passarelas e, principalmente, pontes metálicas, que apresentam problemas de deterioração decorrentes de agentes ambientais ou devido ao acréscimo de cargas resultante do aumento do tráfego com o passar dos anos.

Os benefícios do uso de protensão externa em estruturas mistas de aço e concreto, aliados ao potencial de utilização em grandes obras de infraestrutura, constitui mais uma alternativa para projetos estruturais que poderá contribuir na busca por eficiência construtiva, sobretudo no sentido da redução do consumo de materiais, custos totais do empreendimento e até prazos de execução (NELSEN, 2013).

Com base nos aspectos mencionados, e dada a pouca difusão de estudos que abordem a utilização de ferramentas computacionais capazes de simular numericamente estruturas de vigas mistas protendidas, no âmbito nacional, o presente trabalho visa formular um modelo de elementos finitos e sua implementação numérica de forma a analisar o comportamento estrutural de vigas biapoiadas mistas de aço e concreto formadas por perfis tipo I e protendidas externamente com cabo de aço de alta resistência.

Espera-se colaborar efetivamente para o estado da arte sobre o tema proposto, para que possa subsidiar futuras investigações experimentais, como também, o desenvolvimento de projetos de novas estruturas e reforço/reabilitação de estruturas existentes.

## **1.1 Objetivo**

O objetivo geral do presente trabalho é expandir um código computacional preexistente, de forma a obter um modelo de elementos finitos capaz de representar com confiabilidade o comportamento estrutural de vigas mistas de aço e concreto em análise não-linear física e geométrica, quando submetidas a protensão externa.

Os objetivos específicos são:

- Implementar no software MATLAB®, um modelo de elementos finitos que simule numericamente o comportamento de vigas mistas protendidas.
- Avaliar os aspectos fundamentais do comportamento estrutural e da utilização de protensão externa em vigas mistas de aço e concreto;
- Analisar as deformações resultantes nas vigas e as tensões nos cabos de protensão;
- Comprovar a diferença entre o comportamento estrutural de vigas mistas sem protensão e vigas mistas protendidas.
- Validar o modelo proposto através da comparação com os resultados experimentais e analíticos disponíveis na literatura.

## **1.2 Organização da dissertação**

A dissertação foi dividida em sete capítulos. O capítulo 2 apresenta uma introdução sobre as estruturas de vigas mistas de aço e concreto com protensão externa, mostrando os conceitos básicos e seus componentes (o perfil de aço, a laje de concreto, os conectores de cisalhamento e o sistema de protensão). Aborda também a evolução das pesquisas que tratam de vigas mistas protendidas, dando enfoque para os trabalhos que utilizam a análise numérica a fim de simular o comportamento dessas estruturas.

No capítulo 3 é apresentada a formulação do modelo de elementos finitos para análise de vigas mistas com protensão externa. Dois tipos de elementos são empregados: o elemento de viga (utilizado para representar a estrutura mista) e o elemento de cabo de protensão.

Os modelos constitutivos dos materiais concreto, armadura passiva e aço de protensão são mostrados no capítulo 4. No capítulo 5, é dissertado sobre o método de traçado do caminho do equilíbrio para a análise numérica das estruturas em estudo, elencando o método do controle de carga (aplicação da protensão) e o método do controle de deslocamento (aplicação da carga externa).

No capítulo 6, o modelo de elementos finitos desenvolvido para a análise numérica de vigas mistas de aço e concreto com protensão externa é avaliada por meio de comparações com resultados experimentais, analíticos e numéricos de exemplos específicos disponíveis na literatura, que levam em consideração a análise não-linear física e geométrica destas estruturas.

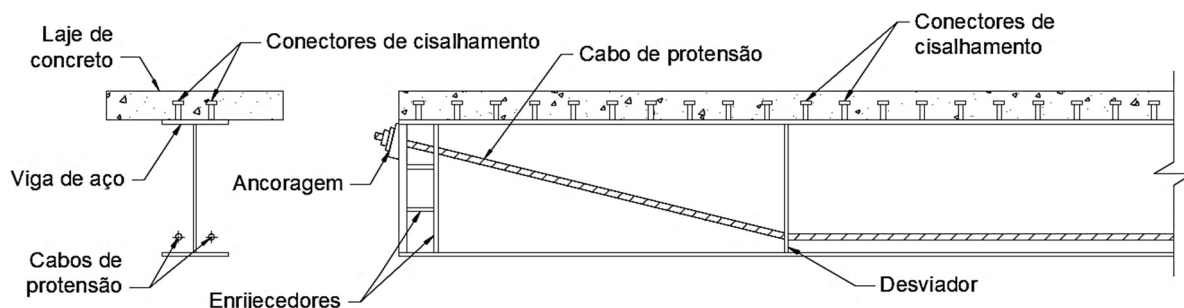


## 2 VIGAS MISTAS DE AÇO E CONCRETO COM PROTENSÃO EXTERNA

A protensão em vigas mistas de aço e concreto tem como propósito melhorar a resistência devido ao estado prévio de tensões que é introduzido na estrutura, mas também é indicada para reforçar e recuperar estruturas existentes. De acordo com Lorenc e Kubica (2006), as vigas mistas de aço e concreto protendidas externamente oferecem várias vantagens importantes: comportamento elástico sob cargas mais elevadas, o aumento da capacidade última e melhor comportamento à fadiga e fratura.

As vigas mistas protendidas podem ser concebidas de diferentes formas em função da posição do concreto em relação ao perfil de aço, da geometria da seção, da posição do cabo de protensão e do tipo de protensão. A tipologia tradicional de uma viga mista de aço e concreto protendida é formada por uma laje de concreto, que pode ser armada ou protendida, sendo moldada in loco ou pré-fabricada e ancorada à viga de aço por meio de conectores de cisalhamento, além dos cabos de aço de alta resistência para a protensão da viga de aço, como pode ser visto na Figura 1 (NELSEN, 2013).

Figura 1 – Croqui esquemático de viga mista de aço e concreto protendida.



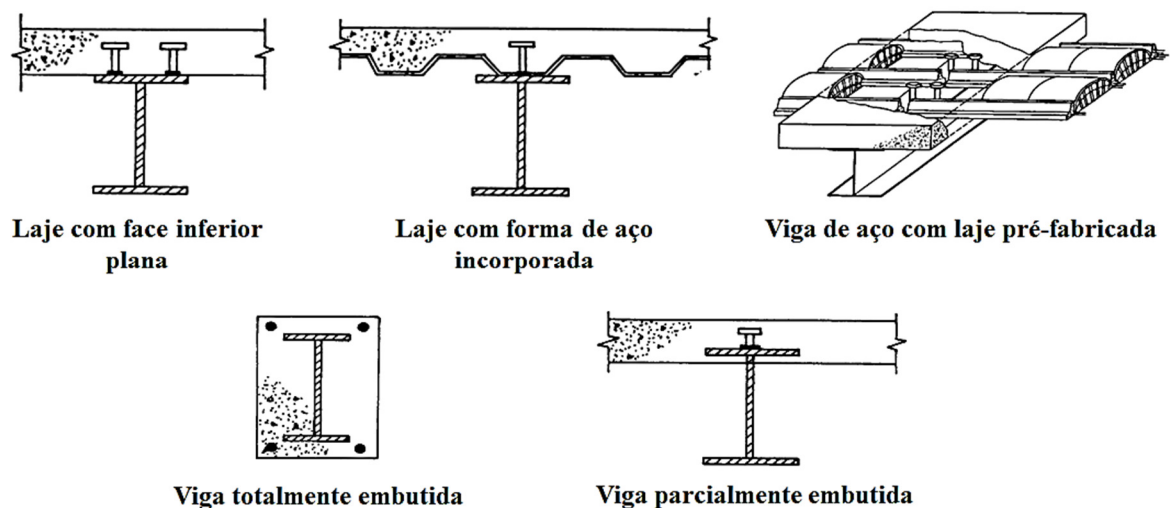
Fonte: Autoria própria (2017).

Observa-se que a técnica de protensão aplicada a vigas mistas de aço e concreto conduz a um aproveitamento das características positivas de cada material: aço estrutural, concreto e aço de protensão. Segundo Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989), a protensão externa em vigas mistas de aço e concreto apresenta muitas vantagens, tais como: melhora o comportamento elástico, aumenta a capacidade final, limita as deformações sob cargas de serviço, controla as fissuras na laje de concreto quando a estrutura encontra-se em regiões de momento negativo, melhora o comportamento à fadiga, reduz o peso estrutural com benefícios na economia do valor da construção.

## 2.1 Componentes das vigas mistas protendidas

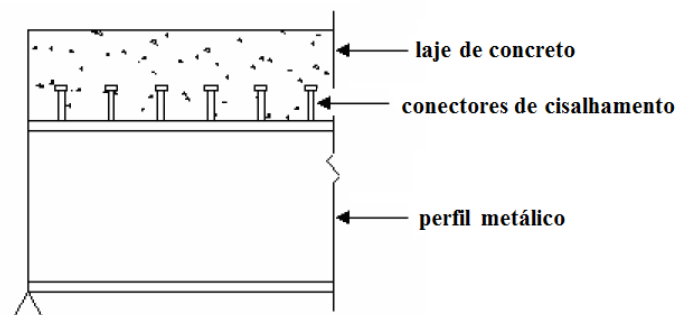
As vigas mistas de aço e concreto consistem de um perfil de aço (laminado, soldado ou formado a frio) associado a uma laje de concreto para resistir aos esforços de flexão. Esta associação se dá por meio de elementos metálicos soldados à mesa superior da viga e embutidos na laje de concreto, denominados conectores de cisalhamento (KOTINDA, 2006). A Figura 2 especifica alguns modelos de vigas mistas. A Figura 3 esquematiza os três componentes para a construção da viga mista de aço e concreto.

Figura 2 – Exemplos de viga mista de aço e concreto.



Fonte: MALITE (1990) apud KOTINDA (2006).

Figura 3 – Elementos constituintes da viga mista de aço e concreto.



Fonte: Adaptado KOTINDA (2006).

Em seguida serão descritas, para um melhor entendimento dos elementos que compõe a seção transversal da viga mista de aço e concreto, os principais aspectos relacionados: ao perfil de aço; à laje de concreto; e, aos conectores de cisalhamento, que garantem o funcionamento da seção como mista.

### **2.1.1 Perfil de aço**

As vigas mistas podem apresentar perfis de aço do tipo laminado, soldado ou formado a frio, constituídos por aço estrutural convencional e não necessariamente de alta resistência. Ao contrário das vigas metálicas, estas são dimensionadas com perfis simétricos em um eixo. Para Chaves (2009) as vigas mistas em perfis formados a frio apresentam particularidades em relação às vigas mistas em perfis laminados e soldados, que vão desde os conectores de cisalhamento até a pequena capacidade de rotação da viga de aço.

Conforme demonstrado por Kim et al. (2011), as vigas mistas podem ser revestidas ou parcialmente revestidas com protensão externa, tornando-a mais resistente, bem como capaz de evitar problemas relacionados a instabilidades do perfil. Além disso, há outras maneiras de associação de aço e concreto com protensão para vigas mistas que garantem a melhoria da seção e o adequado aproveitamento dos diversos materiais aço, concreto e cabos de protensão. Assim sendo, os variados arranjos para vigas mistas de aço e concreto protendidas procuram cumprir as exigências arquitetônicas e/ou funcionais das estruturas como também favorecem o uso dos materiais e tornam mais econômico o processo construtivo.

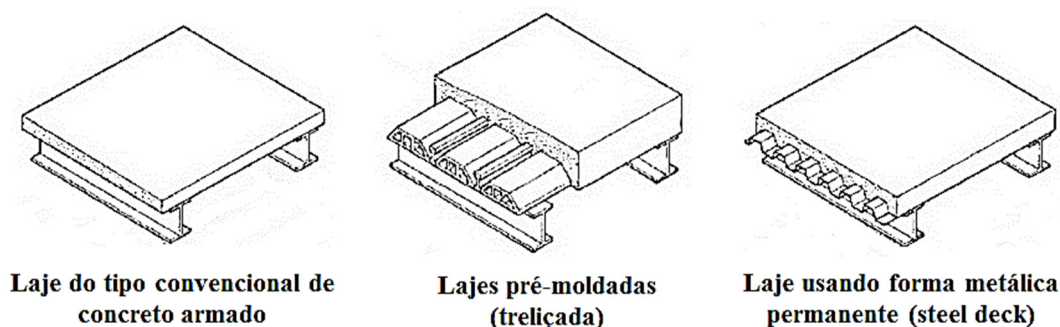
### **2.1.2 Lajes de concreto**

As lajes são elementos estruturais que, quando adequadamente dimensionadas, garantem a estabilidade e travamento da estrutura. Por isso, a escolha do sistema estrutural adequado para cada situação é primordial para a redução de custos e do tempo de construção, assim como com a produtividade, precisão e segurança da obra (COELHO, 2005).

Segundo Nelsen (2013), qualquer tipo de laje pode ser utilizando em conjunto com vigas de aço, embora as mais usuais sejam em concreto armado ou protendido, moldadas no local ou pré-moldadas, como ilustrado na Figura 4 e exemplificado a seguir:

- Laje convencional em concreto armado ou protendido;
- Laje de concreto com vigas metálicas, trabalhando como viga mista de aço e concreto;
- Lajes em elementos pré-fabricados de concreto, servindo de forma e trabalhando como laje mista aço e concreto;
- Laje com forma metálica trabalhando como laje mista aço-concreto.

Figura 4 – Tipos de lajes que podem compor a viga mista de aço e concreto.



Fonte: SILVA (2010).

O autor afirma também que alguns destes tipos de laje, como as pré-fabricadas e com forma de aço metálica, são mais indicados para a utilização com vigas de aço por apresentarem algumas vantagens em relação às lajes convencionais, tais como:

- Vencer maiores vãos;
- Maior resistência às solicitações de flexão quando os materiais aço e concreto trabalham solidariamente;
- Redução na altura da estrutura, da seção transversal dos pilares e das cargas nas fundações devido ao menor peso da laje;
- Rapidez e facilidade de montagem com a racionalização de materiais e mão de obra, pois o processo de fabricação é industrializado, obtendo-se uma maior precisão construtiva, qualidade e segurança;
- Após o posicionamento e fixação dos painéis metálicos sobre as vigas da estrutura, os mesmos podem ser utilizados como plataforma de serviço para executar eventuais trabalhos no nível da construção desse pavimento.

### 2.1.3 Conectores de cisalhamento

Em relação aos conectores de cisalhamento, estes influenciam largamente no comportamento estrutural da viga mista, haja vista que contribuem para o trabalho conjunto da seção. Tais conectores se classificam como rígidos ou flexíveis, sendo esta classificação estabelecida de acordo com a resposta do conector à ação do fluxo de cisalhamento longitudinal que surge da ação mista entre o perfil de aço e a laje de concreto (KOTINDA, 2006). Na Figura 5 são mostrados dois tipos de conectores e o comportamento da seção quando os conectores resistem aos esforços de cisalhamento.

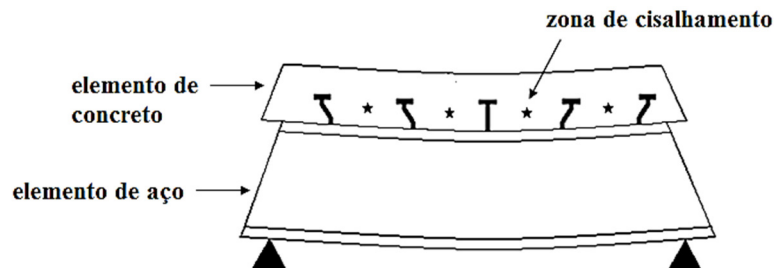
Figura 5 – Conectores de cisalhamento soldados a viga metálica.



Fonte: NELSEN (2013).

No que tange à compatibilidade de deformações entre aço e concreto, no caso de vigas, são os conectores de cisalhamento soldados ao perfil metálico, que têm como função transmitir os esforços de cisalhamento longitudinal entre a viga de aço e a laje de concreto, além de buscar evitar a separação transversal na interface dos materiais. Na Figura 6 a fibra de concreto adjacente à interface aço-concreto tende a se expandir, enquanto a fibra de aço adjacente à mesma interface tende a se contrair. Essa deformação relativa faz com que os conectores se deformem, aplicando uma força sobre o concreto em direção ao meio do vão, sendo considerada uma viga mista com interação parcial.

Figura 6 – Configuração deformada de uma viga mista simplesmente apoiada.



Fonte: Adaptado OEHLERS; BRADFORD (1995).

Quando a interface não possui ação de forças restringindo a deformação relativa entre laje de concreto e viga de aço (interfase sem conectores e com graxa, por exemplo) tem-se a deformação relativa na interface caracterizando uma interação nula, ou seja, os elementos trabalham de forma independente, cada um resistindo a uma parcela dos esforços de flexão. Quando a deformação relativa na interface é totalmente impedida, possibilitando a resistência aos esforços de flexão em forma conjunta, como um único elemento, tem-se uma viga mista com interação total.

Neste sentido, a fim de que seja analisado o número de conectores, há a necessidade de saber o tipo de interação que se deseja obter na interface aço e concreto, que pode abranger a interação total (completa) ou parcial. Na interação total o número de conectores de cisalhamento deve ser o suficiente para absorver totalmente o fluxo de cisalhamento horizontal na interface aço e concreto. Desse modo, assume-se que na seção mais solicitada não há deslocamento entre os materiais e o cálculo do momento resistente considera a plastificação da seção. Assim, o número de conectores é função do resultado da divisão de todo o fluxo de cisalhamento. Enquanto que na interação parcial a quantidade de conectores é calculada para absorver apenas uma parte desse fluxo e o momento resistente calculado em função da resistência ao cisalhamento horizontal dos conectores (NELSEN, 2013).

Com relação à ruptura dos conectores de cisalhamento existem duas formas: por esmagamento do concreto e por ruptura do conector (cisalhamento). Para as verificações dos modos de falha dos conectores de cisalhamento adotam-se as recomendações da norma ABNT NBR 8800:2008.

As vigas mistas, quando comparadas a outros elementos estruturais, apresentam grande rigidez e podem suportar carregamentos elevados. A aplicação da protensão ao perfil de aço nesse tipo de estrutura, utilizando cabos de aço de alta resistência, pode trazer uma grande contribuição na sua capacidade de carga, bem como a seu comportamento em serviço.

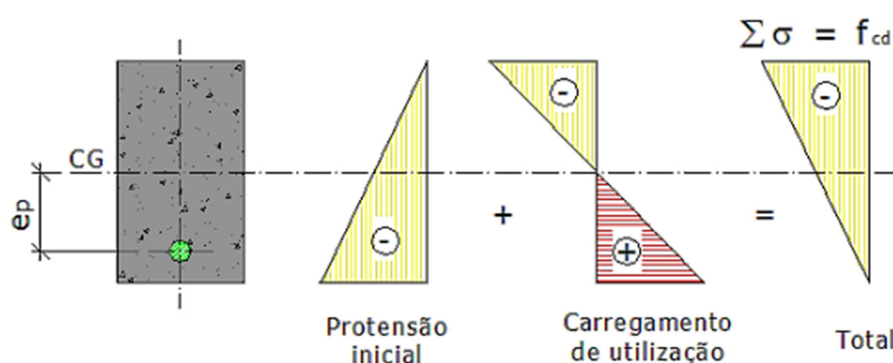
#### **2.1.4 Protensão**

A protensão é uma técnica adotada para melhorar a resistência ou o comportamento estrutural e consiste basicamente em gerar na estrutura solicitações opostas às das cargas decorrentes de seu uso. Lin e Burns (1982), apresenta uma das melhores definições de concreto protendido, dada pela Comitê de ACI, “o concreto submetido a tensões internas de tal magnitude e distribuição que as tensões resultantes do carregamento externo são neutralizadas a um grau desejado.

Tal aplicação tem a finalidade de evitar que em serviço, o concreto não apresente tensões de tração (protensão total), ou que essa tensão de tração seja limitada a um valor admissível, de maneira que o concreto não fissure, o que conseqüentemente diminui as flechas, garantindo elementos estruturais com maiores vãos e menores alturas (MOREIRA, 2016). Assim, é garantido o aproveitamento máximo da capacidade resistente da seção de concreto, além de evitar ou minimizar a fissuração.

Nas estruturas de concreto, a protensão é utilizada com o propósito de reduzir ou até mesmo anular os esforços de tração provocadas pelas solicitações de utilização da estrutura, ou seja, objetiva melhorar a deficiência à tração, já que a protensão cria tensões de compressão prévias nas regiões onde o concreto seria tracionado (LEONHARDT, 1983). O princípio da protensão pode ser visto no esquema apresentado na Figura 7, onde é perceptível que o elemento estrutural passa a ter a seção totalmente comprimida, garantindo maior eficiência e melhor aproveitamento dos materiais.

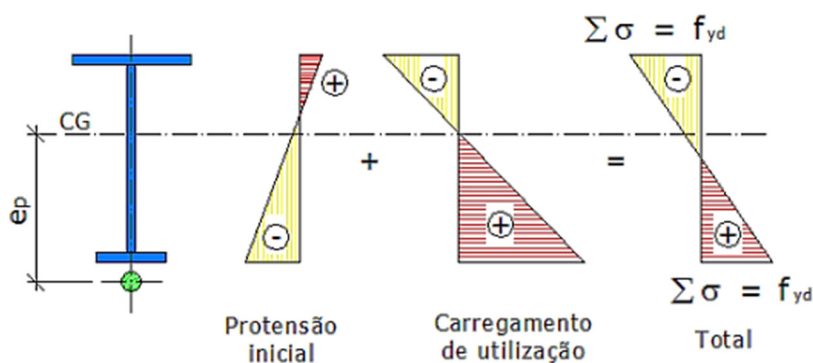
Figura 7 – Princípios da protensão em estruturas de concreto.



Fonte: NELSEN (2013).

Por outro lado, a protensão em estruturas metálicas, conforme apresenta Nelsen (2013), possibilita atingir as tensões máximas admissíveis de projeto nas duas mesas da viga quando submetida a ações externas, ou seja, em uma mesma seção transversal existem tensões de tração e compressão, conforme ilustrado, de modo esquemático na Figura 8. Dessa forma, é possível obter economia de material, uma vez que podem ser adotados perfis mais leves.

Figura 8 – Princípio da protensão em estruturas metálicas.



Fonte: NELSEN (2013).

A tecnologia da protensão já é amplamente utilizada no concreto em diversos tipos de obras, no entanto, são raros os exemplos de aplicação da protensão em outros tipos de materiais, embora se saiba que muitos deles podem tirar proveito do uso dessa técnica. O aço, em especial, é um material que pode apresentar características bastante favoráveis quando protendido, oferecendo desempenhos satisfatórios principalmente pela sua capacidade de resistir bem à compressão e à tração.

Sabe-se que o principal material a ser considerado para a técnica de protensão são os aços de alta resistência. Além deste, devem ser observados também os diferentes tipos de acessórios, como os dispositivos de ancoragem e desviadores. A seguir serão mostradas as principais características de cada um desses materiais, além da aplicação da protensão e enfatizar sobre as perdas de protensão que podem ocorrer ao aplicar protensão aos perfis metálicos que compõe as vigas mistas.

#### *2.1.4.1 Tecnologia da protensão: cabos, acessórios e aplicação*

A tecnologia da protensão é caracterizada por utilizar aços que apresentam elevada resistência, aproximadamente três vezes maior que os aços que costumam ser empregados no concreto armado, e pela ausência de patamar de escoamento. Conforme Ferreira (2007), esse tipo de aço deve apresentar boa ductilidade, para que não tenham uma ruptura frágil por danos mecânicos ou por deformações junto às ancoragens.

Os aços de alta resistência podem ser encontrados em formas de fios de aço carbono trefilados, cordoalhas de dois, três e de sete fios, e barras de aço laminadas a quente. A aquisição desse material é por meio de fios ou cordoalhas, disponíveis em grandes comprimentos, eliminado assim o problema de emendas do aço para estruturas de grandes vãos. (VERÍSSIMO; CÉSAR JR, 1998).

Devido ao processo de revenimento, onde os fios de aço são aquecidos a fim de elevar os valores de deformação de escoamento, tornando-os mais dúcteis, os aços de protensão ganham características específicas, podendo assim classifica-los segundo a sua modalidade de tratamento, em:

- Aço de relaxação normal (RN) ou aliviados – aços retificados por um tratamento térmico que alivia as tensões internas de trefilação;
- Aço de relaxação baixa (RB) ou estabilizados – aços que recebem um tratamento termomecânico que melhora as características elásticas e reduz as perdas de tensão por relaxação.

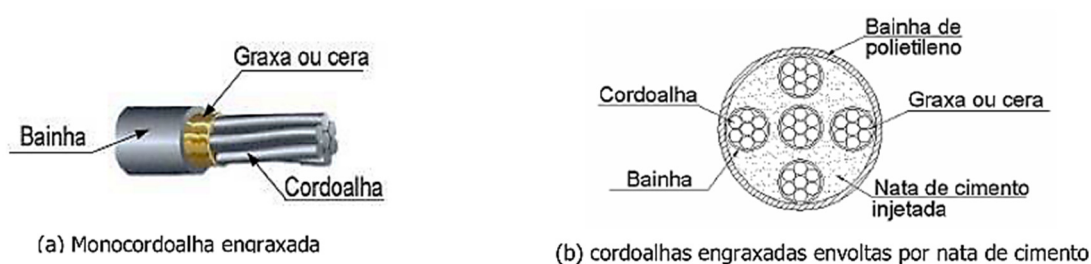


Os aços de protensão apresentam como as principais propriedades mecânicas: a resistência característica à ruptura por tração do aço ( $f_{ptk}$ ); o limite de escoamento convencional ( $f_{pyk}$ ), o qual corresponde à deformação residual de 0,2%; e, o valor médio do módulo de elasticidade ( $E_p$ ).

Vale salientar que, para fios e cordoalhas, o módulo de elasticidade, de acordo com a NBR 6118/2014 e na falta de dados específicos, pode ser considerado o valor de 200.000 MPa, enquanto que o limite de escoamento é aproximadamente igual a tensão, para que ocorra uma deformação de 1%. Essas tensões limites devem ser atendidas com o propósito de evitar a ruptura do cabo durante a protensão, reduzir a perda por relaxação do aço e evitar tensões excessivas que aumentam a probabilidade à corrosão do aço de protensão (FERREIRA, 2007).

O conjunto de fios ou cordoalhas de aço protendido, dispostos dentro de uma bainha de polietileno de alta densidade, é denominado cabo de protensão. Quando o cabo é formado por várias cordoalhas, agrupadas e envolvidas por uma outra bainha, denomina-se cordoalhas engraxadas. A cordoalha engraxada possui em seu interior uma injeção de nata de cimento, para preencher os vazios do cabo de protensão e assegurar a proteção contra corrosão. Na Figura 9 pode ser vista os desenhos esquemáticos de uma cordoalha de sete fios (Figura 9a) e uma cordoalha engraxada, formada por cinco cordoalhas (Figura 9b).

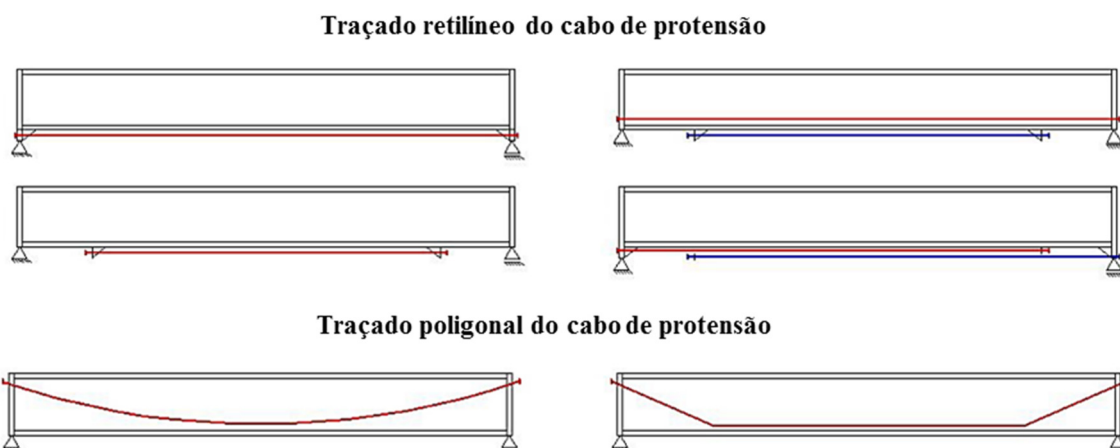
Figura 9 – Desenhos esquemáticos de cabos de protensão.



Fonte: FERREIRA (2007).

Neste sentido, o traçado dos cabos possui relevância para a configuração final de esforços numa peça de concreto protendido, haja vista que o escopo inicial da protensão é atuar em sentido oposto aos esforços produzidos pelo carregamento externo, o traçado dos cabos precisa ser projetado em função das cargas atuantes na peça, e posteriormente ajustado, de modo a satisfazer aos requisitos construtivos peculiares de cada situação de projeto. (VERÍSSIMO; CÉSAR JR, 1998). Na Figura 10, pode ser visto exemplos de traçados retilíneos e poligonais do cabo de protensão, verifica-se também que o cabo de protensão também pode ser posicionado abaixo da seção transversal do perfil metálico.

Figura 10 – Exemplos de traçados do cabo de protensão.

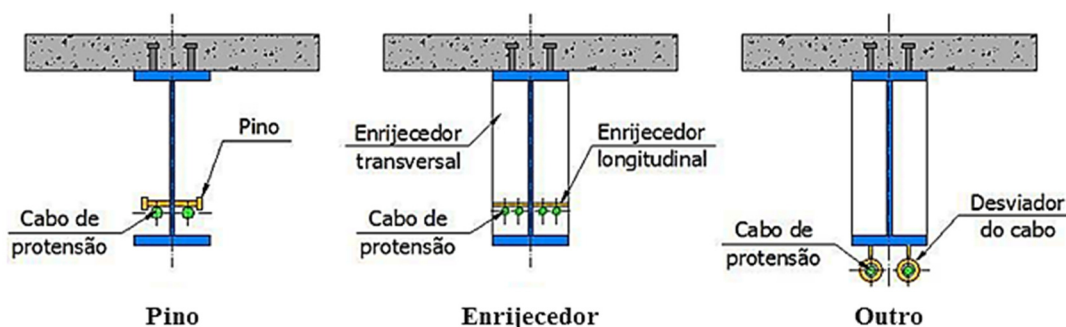


Fonte: NELSEN (2013).

Com relação aos acessórios para a protensão em vigas mistas, podem ser utilizados as mesmas especificações para protensão em estruturas de concreto, porém é necessário um detalhamento adequado em se tratando de ancoragens e desviadores.

Os desviadores são utilizados para manter o traçado desejado do cabo e podem ser constituídos por chapas ou pinos soldados no perfil metálico (Figura 11), enquanto as ancoragens atuam na estrutura fixando os cabos de protensão tensionados, de forma a manter a carga aplicada pelo macaco hidráulico, impedindo assim que o cabo retorne ao seu estado original, isto é, sem tensão. Para o sistema de ancoragem são utilizadas cunhas ou porca e rosca, além de enrijecedores para prevenir falhas localizadas na seção de aço.

Figura 11 – Tipos de desviadores do cabo de protensão.



Fonte: Adaptado NELSEN (2013).

A protensão pode ser aplicada com os cabos de protensão dispostos fora da área física ocupada pela seção transversal da estrutura. Essa aplicação é usualmente empregada em perfis metálicos, e apresenta uma série de vantagens como: traçado dos cabos e detalhes construtivos mais simplificados; favorece a substituição do cabo de protensão quando

necessário e previsto em projeto; além de apresentar uma facilidade de inspeção e manutenção. Entretanto, algumas desvantagens estão relacionadas à exposição dos cabos às influências ambientais e às possíveis vibrações que os mesmos podem sofrer, mas que podem ser solucionados com a proteção e a redução do comprimento livre do cabo, respectivamente.

A aplicação da protensão resume-se em produzir altas tensões no cabo a ser protendido por meio de macacos hidráulicos e bombas de alta pressão. O processo de protensão geralmente é composto pelas seguintes etapas (NELSEN, 2013):

- Preparação: consiste no posicionamento dos cabos e sistema de ancoragem;
- Colocação do equipamento: acoplamento do macaco hidráulico aos cabos de protensão;
- Protensão das cordoalhas: aplicação de tensões de tração nas cordoalhas através do acionamento do macaco por meio da bomba de alta pressão;
- Cravação das cunhas: ao atingir a carga e/ou alongamento indicados no projeto estrutural, a pressão do macaco é aliviada e as cordoalhas são ancoradas;
- Acabamento: com a liberação da protensão, realizam-se o corte das pontas das cordoalhas e os devidos acabamentos.

#### *2.1.4.2 Perdas de protensão*

A força de protensão introduzida na estrutura não é constante ao longo do espaço e do tempo. Tal força inicial está diretamente relacionada com o alongamento ocorrido na armadura ativa. O acionamento dos macacos, a liberação dos cabos e a transferência da força de protensão, entre outros fatores, originam uma série de efeitos que levam a uma redução da força de protensão com o passar do tempo. Portanto, tem-se as chamadas perdas de protensão.

Por este fato é que torna-se indispensável, no dimensionamento de peças protendidas, estimar essas perdas para que se possa encontrar o valor da tensão adicional a ser aplicada na estrutura, de forma que após todas as perdas, a força de protensão efetivamente atuante na peça seja a força desejada (FERREIRA, 2007).

Garantindo a estimativa das perdas é possível determinar uma sobretensão que deve ser aplicada à peça, tal que, após as perdas, a força de protensão efetivamente atuante seja a força calculada, suficiente para neutralizar, em parte ou no todo, os esforços de tração provocados pelas cargas de utilização.

Geralmente as perdas imediatas ocorrem no momento da protensão e seu efeito é sentido imediatamente após a ancoragem do cabo. Pode-se dizer que são consequências da forma como se procede a protensão e das propriedades elásticas dos materiais, e classificam-se em:

- Perda por atrito: manifesta-se nas peças pós-tracionadas, em que a armadura ativa ao ser posta em tensão pelo macaco sofre um alongamento gradativo. Em decorrência disso, surgem perdas para cabos externos, resultado do atrito entre o cabo de protensão e os desviadores, e acarretando uma variação angular não intencionadas ao longo do cabo.
- Perdas por protensão sucessiva: ocorre no caso das vigas em que existem diversos cabos a serem protendidos sucessivamente, resultando na perda da força de protensão devida à deformação elástica do cabo já protendido, em virtude da deformação elástica da viga.
- Perdas nas ancoragens: depois que é feita a aplicação da protensão, ocorre uma acomodação das peças de ancoragem, e em face desse processo, aparecem perdas de protensão nas ancoragens devido aos deslocamentos, causadas pela transferência da força nos macacos para as ancoragens e pela penetração das cunhas no momento da cravação (perda por encunhamento).

As perdas progressivas são aquelas que ocorrem ao longo da viga útil da estrutura, depois que os cabos já estão protendidos e ancorados, se devem às propriedades viscoelásticas dos materiais. Para o caso de protensão em vigas metálicas, as perdas progressivas são causadas pela relaxação do aço de protensão.

Assim, observa-se que a relaxação do aço compreende a redução da tensão no aço, que ocorre quando a armadura, deformada por uma solicitação inicial, permanece com comprimento ou deformação constante, resultando em um alívio de tensão na armadura. Segundo Leonhardt (1983), para minimizar os efeitos desse fenômeno, são fabricados aços tipo RB, isto é, de baixa relaxação.

## 2.2 Histórico de pesquisas relacionadas a vigas mistas com protensão externa

É perceptível que existe um grande interesse na comunidade científica internacional no estudo e nas aplicações de protensão em estruturas mistas de aço e concreto. Muitas pesquisas são realizadas com o objetivo de buscar o desenvolvimento de técnicas de projeto e tecnologias construtivas para o emprego em reforço e reabilitação estrutural, além da aplicação no projeto de novas edificações e pontes de grande porte.

No início do século XX, com as primeiras investigações do emprego de aço e concreto na construção mista, e com seu desenvolvimento, houve uma tendência a estudos sobre a aplicação da protensão em estruturas mistas. Vários artigos foram publicados propondo a utilização de cabos de alta resistência, de forma a aplicar protensão em vigas mistas de aço e concreto, e obter a caracterização do comportamento estrutural.

Esses estudos iniciais confirmam a viabilidade desta técnica, como também algumas vantagens que ela propõe. Desta forma, o interesse por esse sistema construtivo foi sendo impulsionado, fazendo surgir pesquisas teóricas e experimentais com o intuito de compreender o comportamento estrutural de vigas mistas de aço e concreto com a aplicação de protensão. Destarte, foram investigadas as suas aplicações práticas principalmente na recuperação e reabilitação de estruturas existentes.

Para dar embasamento a esse trabalho foi realizado um estudo do estado da arte acerca do tema em apreço. Alguns dos autores que publicaram trabalhos com este enfoque são: Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989); Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990); Dall'Asta e Dezi (1998); Chen (2005); Lorenc e Kubica (2006); e Chen, Wang e Jia (2009).

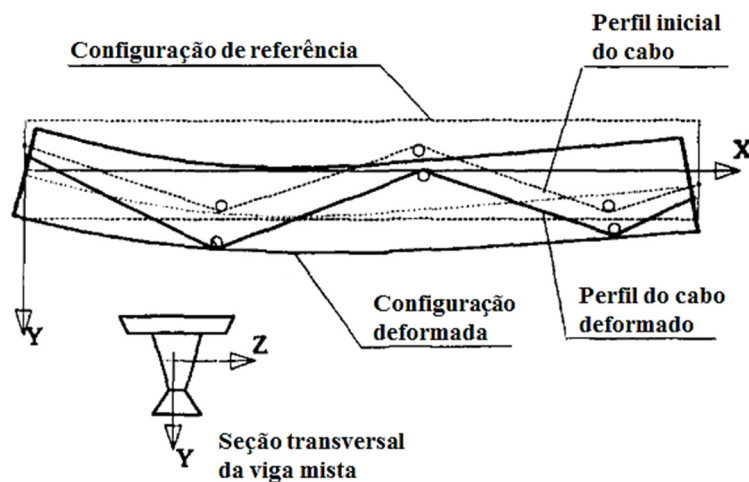
Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989) desenvolveram um estudo que analisa experimentalmente o comportamento de vigas mistas de aço e concreto protendidas submetidas a momento fletor positivo e negativo. Após a análise dos resultados, os autores chegaram às seguintes conclusões: a aplicação da protensão em vigas mistas leva a um aumento significativo na capacidade resistente; a adição de barras de aço protendidas a qualquer das regiões de momento positivo ou negativo reduz o esforço na laje de concreto; a protensão na região do momento negativo pode impedir que o concreto fissure sob cargas de serviço, tornando a estrutura mais rígida, reduzindo a deflexão e prolongando a sua vida útil. Outros trabalhos foram realizados com o propósito de elaborar modelos que representem o comportamento elástico e inelástico de vigas mistas protendidas, como também o comportamento dessas estruturas à fadiga e fratura.

Com enfoque na utilização da técnica de protensão externa para reabilitação de pontes existentes formadas por estrutura mista, Ayyub, Sohn & Saadatmanesh (1990) estudaram o comportamento de vigas mistas de aço e concreto por meio de ensaios e modelos analíticos para determinar as tensões no cabo de protensão e na estrutura, quando solicitada a um momento de flexão positivo. Os benefícios de diferentes tipos de protensão são comparados, incluindo o tipo (barra ou cordoalha) e o traçado (retilíneo ou poligonal) do cabo de protensão.

Fundamentado nos resultados experimentais, os autores do trabalho supracitado concluíram que efetivamente a protensão em uma viga mista pode aumentar a resistência final da estrutura, e quanto maior a excentricidade maior será a capacidade resistente, sendo recomendado a colocação do cabo de protensão abaixo da mesa inferior. Em relação ao tipo de cabo, verificaram que para a mesma força de protensão, o cabo de protensão com maior área reduz a deformação e aumenta a carga última da viga, ou seja, as cordoalhas são preferíveis às barras. Em se tratando do traçado do cabo de protensão, apesar do traçado retilíneo ser preferível devido a exigir menos detalhes construtivos, o cabo com traçado poligonal aumenta a ductilidade da viga. Outra conclusão bastante relevante refere-se à interação entre a laje de concreto e a mesa superior da viga metálica, pois observaram que não justifica assumir que não existe deslizamento entre essas estruturas, uma vez que nos ensaios os desvios foram maiores do que o previsto. (AYYUB; SOHN; SAADATMANESH, 1990).

Dall'Asta e Dezi (1998) apresentam um modelo analítico sobre o comportamento não linear de vigas mistas com protensão externa, atuando como ferramenta para análise do cabo de protensão desde a pré-tração até a falha. O modelo fornece uma descrição linear das leis da cinemática e considera os materiais como sendo não-lineares, para o exemplo de uma viga simplesmente apoiada, como pode ser visto na Figura 12. Os autores realizaram a solução numérica e expõem as estratégias adotadas para resolução de equações não-lineares. Relatam ainda sobre a tensão, o esforço e o deslocamento progressivo relativo à carga aplicada, bem como desenvolvem algumas comparações entre diferentes sequências construtivas, e investigam a influência de alguns parâmetros de projeto diante a capacidade final da estrutura.

Figura 12 – Geometria e deformação do sistema.

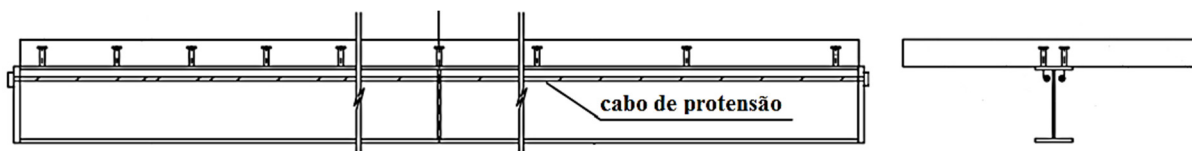


Fonte: Adaptado ASTA; DEZI (1998).

Outros ensaios experimentais, com o objetivo de analisar o desempenho de vigas mistas de aço e concreto protendidas externamente, também foram realizados por Chen (2005) e Lorenc e Kubica (2006).

Chen (2005) desenvolveu um estudo experimental em vigas mistas sujeitas a momento negativo, onde foram testados o momento de fissuração e as resistências últimas desses elementos estruturais. Foram estudadas duas vigas mistas com protensão externa, a fim de investigar o comportamento de flambagem e para a determinação das tensões na região elástica, considerou-se uma distribuição de tensão linear em toda a espessura da seção mista, e nenhum deslizamento entre a laje e viga. Os detalhes da seção da viga e o traçado do cabo de protensão são apresentados na Figura 13 e uma visão geral dos ensaios realizados é apresentada na Figura 14.

Figura 13 – Viga mista sujeita a um momento negativo e sua seção transversal.



Fonte: Adaptado CHEN (2005).

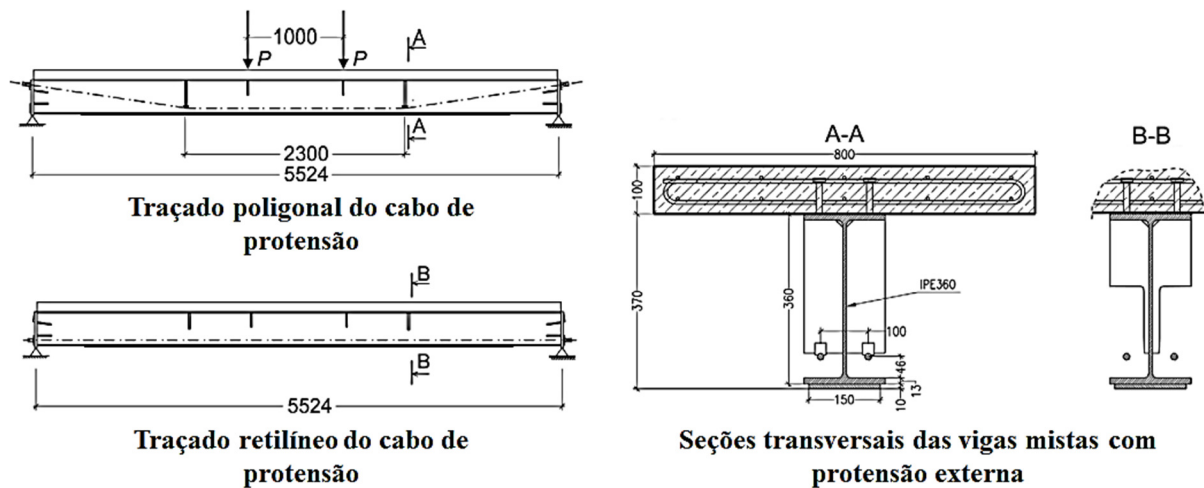
Figura 14 – Equipamento de teste e instrumentação.



Fonte: Adaptado CHEN (2005).

Lorenc e Kubica (2006) analisaram experimentalmente os mecanismos de falha e o comportamento de vigas mistas protendidas e não protendidas submetidas a momento fletor positivo, considerando dois traçados dos cabos de protensão: poligonal e retilíneo, como pode ser visto na Figura 15. Nesse estudo, foi considerado a influência da flexibilidade da conexão de cisalhamento e medido o deslizamento ao longo do eixo da viga, a fim de determinar a força de cisalhamento em função da curva de deslizamento.

Figura 15 – Geometria das vigas analisadas por Lorenc e Kubica (2006).



Fonte: LORENC E KUBICA (2006).



Lorenc e Kubica (2006) Com base nos dados experimentais, concluiu-se que:

- A protensão externa aumenta em torno de 25% o rendimento e a carga final de vigas mistas sujeitas a um momento positivo;
- O traçado do cabo de protensão não tem efeito significativo sobre o comportamento e resistência última de vigas mistas;
- O mecanismo de falha consistiu na plastificação da parte inferior da seção de aço sob tensões de tração, seguido pelo esmagamento da laje de concreto devido à compressão. Por conseguinte as vigas se deformaram em virtude da força significativa nos cabos de protensão, todavia não houve rompimento desses cabos;
- Os cabos de protensão não romperam em qualquer dos casos;
- A aderência aço-concreto pode influenciar significativamente o comportamento da ligação de cisalhamento em vigas mistas.

Chen, Wang e Jia (2009) desenvolveram um programa experimental comparando o desempenho estrutural, a capacidade resistente, os modos de falha, a redistribuição de momentos e os efeitos da protensão externa nas vigas mistas contínuas de aço e concreto. Também foram discutidos a influência da curvatura local e distorcional sobre os comportamentos. Quatro vigas mistas contínuas em grande escala foram testadas, entre as quais duas eram vigas de dois vãos sujeitas a momentos positivos e negativos e, duas eram vigas de três vãos, protendidas apenas nas regiões de momentos negativos. Na Figura 16 pode ser visto os dois tipos de vigas ensaiadas e os equipamentos de teste.

Figura 16 – Equipamentos de teste de vigas mistas contínuas com dois e três vãos.



**Viga de dois vãos**



**Viga de três vãos**

Fonte: CHEN; WANG; JIA (2009)

Os autores confirmaram as vantagens do uso da protensão, assim como verificaram que ao adicionar a protensão à viga mista sob o momento positivo, reduz a deflexão da viga mista sob carregamento de serviço e aumenta a capacidade final da estrutura, e que a adição de um cabo de protensão na região de momento negativo elimina as fissuras na laje de concreto. CHEN; WANG; JIA (2009)

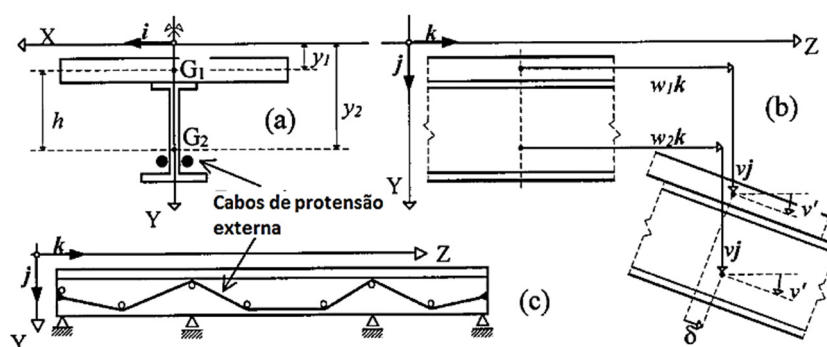
Diante das pesquisas apresentadas, é perceptível que a maioria se refere à análise do comportamento de vigas mistas de aço e concreto sendo realizadas por meio de modelos experimentais. No entanto, com o avanço dos microcomputadores, os estudos de caráter numérico têm ocorrido com maior frequência. Esse avanço tecnológico aplica-se a modelos construtivos, e utilizam técnicas numéricas computacionais capazes de traduzir o comportamento dos materiais. Além disso, possibilita o desenvolvimento de modelos confiáveis em elementos finitos para análise não linear de estruturas.

Metodologias para análise numéricas a fim de simular o comportamento das vigas mistas protendidas foram temas de trabalhos desenvolvidos por: Dall'Asta e Zona (2005); Zona, Ragni e Dall'Asta (2009); Chen e Jia (2010); Nie et al (2011); Lou, Lopes e Lopes (2015); e, Lou, Lopes e Lopes (2016). Nesses estudos foram analisados numericamente algumas variáveis como: modos de colapso, previsão de deformações em serviço; flambagem inelástica e avaliação da influência dos conectores de cisalhamento, ou seja, o comportamento misto com protensão.

Um modelo de elemento finito para a análise não linear de vigas mistas protendidas por meio de cabos externos foi proposto por Dall'Asta e Zona (2005). A formulação envolve vigas mistas protendidas com conexão de cisalhamento deformável, ou seja, representa o comportamento dessas estruturas considerando a interação parcial dos conectores de cisalhamento. A abordagem proposta foi implementada em programa de elementos finitos e utilizaram-se as leis constitutivas não lineares gerais a fim de descrever os materiais, isto é, o concreto, o aço, o reforço da viga, os conectores de cisalhamento e os cabos de protensão.

Nesse estudo, uma viga mista contínua protendida externamente foi analisada, com o objetivo de mostrar o comportamento complexo de estruturas reais e a necessidade de análise numérica em prever as modalidades de falha. O modelo analítico utilizado no estudo trata-se de uma viga mista protendida por cabos externos, Figura 17, que apresenta seção transversal simétrica (Figura 17a), campo de deslocamento (Figura 19b) e seção longitudinal (Figura 17c).

Figura 17 – Modelo analítico de viga mista protendida com conexão de cisalhamento deformáveis.



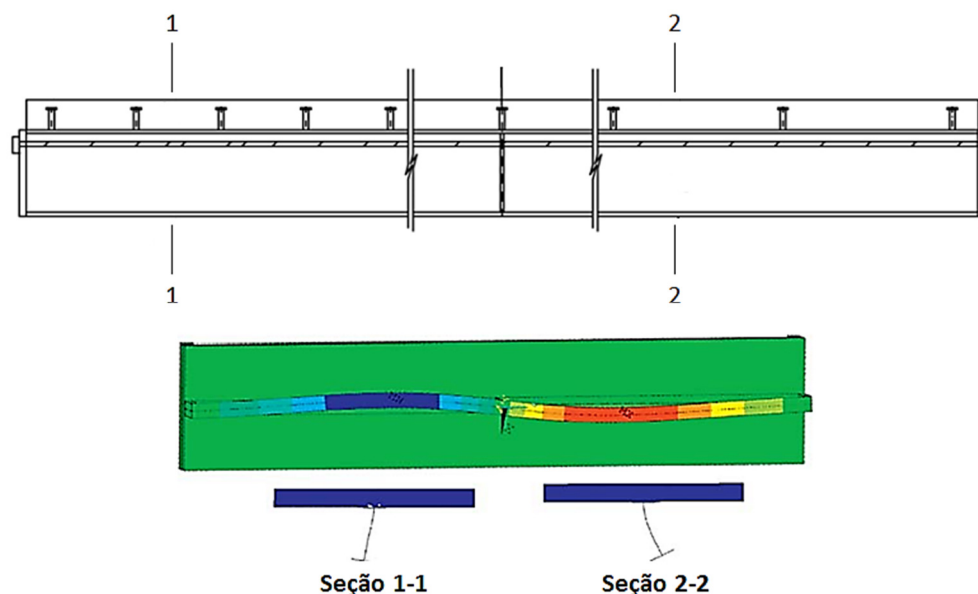
Fonte: DALL'ASTA; ZONA (2005).

A eficácia do procedimento numérico para descrever o comportamento estrutural à falha foi verificada por comparação com os testes experimentais disponíveis na literatura técnica. Desta forma, Dall'Asta e Zona (2005) observaram que os cabos podem ter caminhos gerais e pode deslizar sem atrito com os desviadores.

A capacidade final de vigas mistas com protensão externas não pode ser avaliada por uma análise local dos pontos críticos, é necessário fazer uma análise não linear de todo o sistema estrutural para avaliar corretamente a tensão no cabo de protensão até a falha e, conseqüentemente, a resistência à flexão da viga. Assim, Zona, Ragni e Dall'Asta (2009) apresentaram em seu trabalho um método simplificado para avaliar o colapso do cabo de protensão através do incremento de carga e, portanto, a resistência à flexão da viga sem a necessidade de uma análise não linear de todo o sistema estrutural. Para a análise de vigas mistas de aço e concreto protendidas externamente, os autores analisaram alguns casos práticos e forneceram uma boa aproximação quando comparados aos resultados obtidos a partir de uma formulação de elemento finito não linear, anteriormente introduzido e validado com base em testes experimentais.

Ainda no que diz respeito à abordagem descrita, Chen e Jia (2010) realizaram um estudo numérico para investigar o comportamento de flambagem inelástica de vigas mistas contínuas protendidas com cabos externos, considerando imperfeições geométricas iniciais, a tensão residual no perfil de aço, a razão de carga e a esbeltez da alma, mesa e viga. A influência da instabilidade da seção de aço na capacidade resistente de vigas protendidas foi abordada e os resultados encontrados a partir do modelo obtiveram boa concordância com os resultados experimentais. Na Figura 18 encontram-se os modos de falhas ocorridos nas vigas analisadas, por flambagem lateral da mesa inferior e flambagem distorcional da alma.

Figura 18 – Modo de flambagem em uma viga contínua protendida.



Fonte: CHEN; JIA (2010).

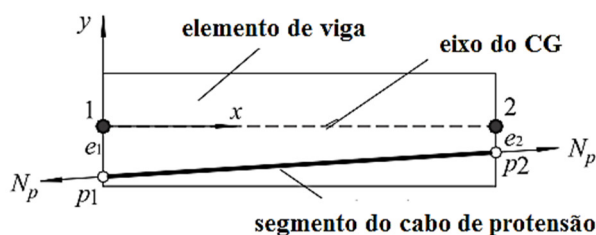
É bem sabido que as vigas mistas contínuas possuem vantagens económicas e menos deflexão em comparação com vigas mistas simplesmente apoiadas. Diante disso, a análise da capacidade de carga para vigas mistas contínuas protendidas foi feita por Nie et al (2011). Um modelo de elemento finito foi elaborado para simular o comportamento não linear de vigas mistas contínuas protendidas usando o pacote comercial de elementos finitos MSC.Marc (2005r2). A abordagem numérica proposta considera tanto a não linearidade física, quanto a não linearidade geométrica da estrutura durante todo o processo de carregamento.

Com o estudo paramétrico do modelo numérico, os autores observaram que vigas mistas contínuas protendidas têm demonstrado o comportamento complexo no que diz respeito ao incremento das forças, deslizamento, distribuição da curvatura, formação de rótulas plásticas, redistribuição de forças internas, e a distribuição de tensões. O método analítico proposto e o modelo numérico podem modelar com precisão tal comportamento complexo observada no programa experimental, aumentar a compreensão do mecanismo estrutural, e fornecer ferramentas poderosas para o projeto e pesquisa.

Lou, Lopes e Lopes (2015) avaliaram os efeitos dependentes do tempo resultantes da fluência do concreto e relaxação do cabo, bem como destes com os efeitos de segunda ordem decorrentes da mudança nas excentricidades do cabo de protensão. O comportamento dependente do tempo de membros de concreto protendido externamente foi avaliado, concentrando-se como parâmetros de investigação, o número de desviadores e a quantidade de aço não protendido.

O método numérico proposto nesse estudo foi formulado utilizando a teoria de flexão de viga em combinação com a descrição de modelos dos materiais, onde considerou-se um elemento de viga de dois nós a ser descrito no sistema de coordenadas local (X, Y), como mostrado na Figura 19.

Figura 19 – Elemento de viga e do segmento do cabo de protensão externo.



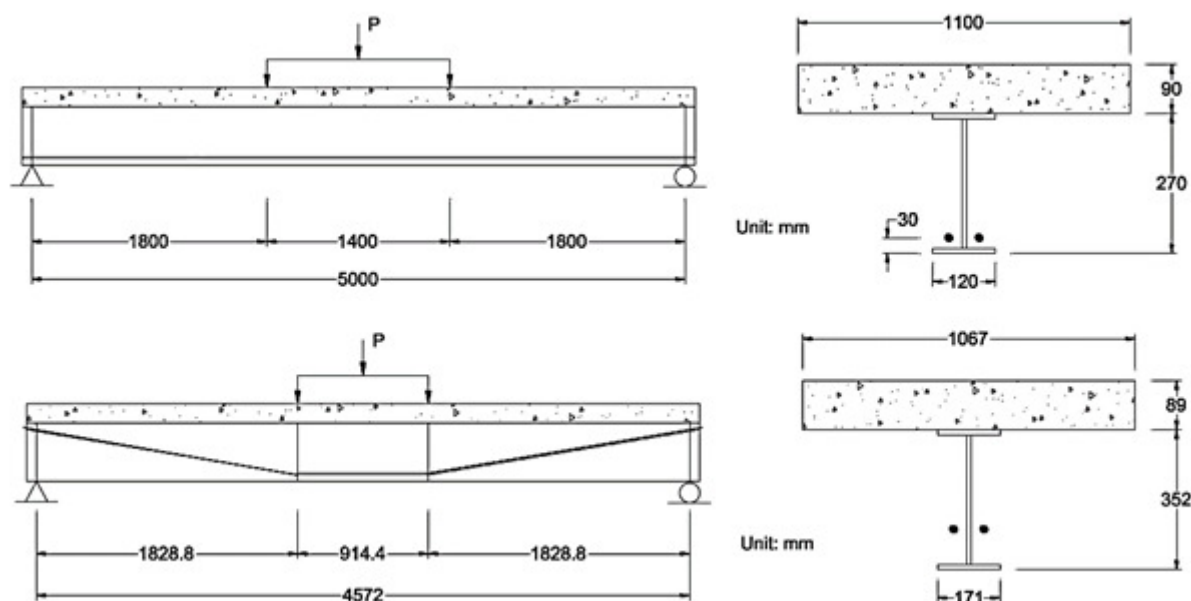
Fonte: LOU; LOPES; LOPES (2015).

Os autores concluíram que os efeitos de segunda ordem podem resultar em mudanças significativas ao comparar com a perda de protensão em resposta a longo prazo. Verificou-se também que o comportamento a longo prazo do elemento com dois desviadores é muito semelhante à do elemento com armaduras internas não aderentes, indicando que os efeitos de segunda ordem são minimizados pela disposição dos desviadores.

Mais recentemente Lou, Lopes e Lopes (2016) analisaram numericamente, pelo método dos elementos finitos, o comportamento estrutural de vigas mistas de aço-concreto protendida externamente sob cargas de curto prazo para quaisquer incrementos, bem como considerando as cargas de serviço em respostas a longo prazo. O efeito geométrico não linear foi considerado na formulação, bem como a variação das excentricidades nos cabos de protensão.

Os modelos foram validados por meio de dois exemplos de vigas mistas protendidas com diferenciação nos traçados do cabo de protensão, como pode ser visto na Figura 20. Desta forma, os resultados confirmam que a protensão externa pode melhorar significativamente o comportamento de curta duração de uma viga mista (isto é, um aumento substancial no rendimento e cargas finais, bem como uma redução na deformação e no nível de tensão de aço). Por outro lado, as respostas de longa duração devido aos efeitos dependentes do tempo para as vigas mistas com e sem protensão externa não apresentaram qualquer diferença significativa.

Figura 20 – Exemplos numéricos de vigas mistas protendidas com traçado reto e poligonal.



Fonte: LOU; LOPES; LOPES (2016).

Diante dos trabalhos apresentados, verifica-se que é possível e viável a utilização de vigas mistas protendidas tanto para estruturas novas como para reforço e reabilitação de estruturas existentes. O uso dessa solução é comumente empregado em obras do exterior, isso explica a existência de mais pesquisas e literaturas técnicas internacionais sobre o tema.

No Brasil, apesar de algumas aplicações práticas, as pesquisas se concentram no reforço e recuperação de estruturas existentes, sobretudo em estruturas de concreto. Porém, existem algumas pesquisas recentes desenvolvidas no sentido de compreender e introduzir o uso de protensão em estruturas metálicas e mistas de aço e concreto, podendo citar os trabalhos de Ferreira (2007) e Nelsen (2013), respectivamente.

Considerada uma técnica nova para a grande maioria dos países, a aplicação da protensão em estruturas metálicas foi abordada por Ferreira (2007). O autor analisa o comportamento estrutural de vigas de aço protendidas, em perfil tipo I, indicando diretrizes para a utilização dessa técnica. Para isso, foi desenvolvido um aplicativo destinados à projetos e verificações de tais elementos, que além de avaliar o perfil metálico de acordo com a NBR 8800/1986, calcula a força e as perdas de protensão, o número de cabos e as possíveis instabilidades. Nesse trabalho, realiza-se também a análise do comportamento dinâmico por meio do método dos elementos finitos e formulações analíticas, onde são determinadas as frequências naturais e seus respectivos modos de vibração numa simulação de rompimento súbito dos cabos de protensão.

Em relação ao uso de protensão externa em vigas mistas de aço e concreto, Nelsen (2013) discorre sobre o comportamento estrutural, procedimentos de análise e dimensionamento de vigas mistas de aço e concreto protendidas externamente. O autor apresenta um procedimento de cálculo com o propósito de dimensionar essas estruturas quando solicitadas por um momento fletor positivo, de forma a analisar os principais modos de colapso globais, destacando os estados limites últimos. Além disso, apresenta um estudo paramétrico no que diz respeito à influência da variação do nível de protensão e da excentricidade dos cabos de protensão; bem como da metodologia construtiva (pré-tração e pós-tração) adotada para a protensão do perfil de aço que compõe a viga mista de aço e concreto.

Acreditando na potencialidade dessa técnica construtiva e direcionamento para a realidade e necessidade da construção civil brasileira, espera-se contribuir para o estado da arte do conhecimento no que se refere à análise numérica da protensão externa aplicada a vigas mistas de aço e concreto.

### **3 FORMULAÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS**

O Método dos Elementos Finitos (*MEF*) apresenta atualmente um nível de desenvolvimento que permite a sua utilização para resolução de problemas relacionados à análise estrutural. É uma técnica bastante versátil e fácil de adaptar a diferentes tipos de elementos estruturais e variados regimes de comportamento. Permite modelar com simplicidade estruturas com geometria, condições de apoio e carregamentos perfeitamente gerais.

A análise por meio de elementos finitos permite solucionar numericamente problemas de campo, que exige a determinação da distribuição espacial de uma ou mais variáveis dependentes, como por exemplo, a obtenção de deslocamentos e tensões de elementos estruturais. Matematicamente, um problema é descrito por equações diferenciais ou por expressões à base de integrais, dessa forma, é possível elaborar a formulação para qualquer que seja o elemento. (COOK; MALKUS; PLESHA, 1989).

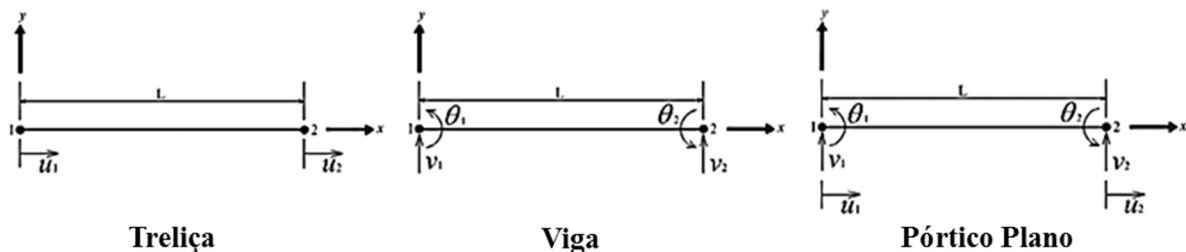
A utilização deste método está associada à obtenção de soluções aproximadas, devendo sempre efetuar uma análise crítica cuidadosa dos resultados obtidos, bem como possibilita reproduzir numericamente o comportamento de uma estrutura, evitando os custos inerentes à realização de ensaios.

Para a solução deste tipo de problema usando o MEF, utilizou-se o modelo baseado em deslocamentos, por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), onde foram desenvolvidos, implementados e testados elementos unidimensionais de viga, considerando:

- a não-linearidade física dos materiais;
- a não-linearidade geométrica, com a possibilidade de grandes deslocamentos, mas em regime de pequenas deformações;
- a possibilidade de seções transversais genéricas formadas a partir de diferentes materiais, com e sem a aplicação da protensão externa.

A formulação desenvolvida para análise de vigas mistas de aço e concreto com protensão externa, emprega dois tipos de elementos. O elemento de viga é utilizado para representar a estrutura mista, enquanto que, o elemento de treliça retrata o cabo de protensão. Assim, o comportamento da viga mista sob o efeito da protensão é representado pelo elemento finito de pórtico plano, de forma que os graus de liberdade do elemento trata-se da combinação de um elemento de treliça e de um elemento de viga, relacionados respectivamente às parcelas de membrana e de flexão, conforme mostrado na Figura 21.

Figura 21- Graus de liberdade dos elementos.



Fonte: Nogueira (2012).

O desenvolvimento dos modelos numéricos partirá da definição, para cada elemento a ser implementado, da sua formulação básica, geralmente utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais que, após adequada discretização do modelo, permite a dedução da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas de cada elemento finito. Estas operações são essenciais para a implementação de novos elementos em uma plataforma existente, e no caso da plataforma computacional empregada, são praticamente suficientes para se efetuar novas análises.



### 3.1 Formulação do elemento finito da viga mista de aço e concreto

Na formulação do elemento finito que irá simular as vigas mistas, utilizou-se as hipóteses cinemáticas fundamentadas com base na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, ou Teoria Clássica de Vigas (TCV), usualmente empregada em implementações computacionais em análises de peças lineares correntes em Engenharia Civil. Considerou-se o modelo de barras submetidas à flexão e os efeitos axiais devidos aos esforços normais à seção transversal.

O comportamento de um elemento finito de viga é caracterizado por um conjunto de grandezas e de equações, regidas pela teoria de Euler-Bernoulli, que estabelece a formulação considerando as seguintes hipóteses simplificadores:

- Pequenos deslocamentos em relação à seção transversal;
- As seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da viga após a deformação;
- O ângulo de rotação é pequeno tal que as hipóteses para pequenos ângulos podem ser assumidas;
- A deformação causada por cisalhamento é desprezada.

Considera-se a viga como sendo uma estrutura linear retilínea sujeita apenas à flexão, de forma que as forças exteriores atuam perpendicularmente ao eixo da peça, não sendo consideradas quaisquer forças atuantes com componentes não nulas segundo a direção desse eixo. Ou seja, devido à dimensão na direção axial ser consideravelmente maior que às demais dimensões, pode-se dizer que as tensões perpendiculares ao eixo da viga ( $\sigma_y$ ) são desprezíveis, já que apresentam valores bem inferiores aos das tensões na seção transversal da viga. Nesse contexto, devido às características do material, o efeito de Poisson ( $\nu$ ) é desprezado, fazendo com que as deformações perpendiculares ao eixo da viga ( $\varepsilon_y$ ) sejam nulas.

Matematicamente, essa formulação pode ser escrita como:

$$\sigma_y = 0, \nu = 0 \rightarrow \varepsilon_y = 0 \quad (1)$$

De acordo com essas hipóteses, o campo de deslocamento pode ser escrito como:

$$u(x, y) = u_0(x) - y \cdot \frac{dv}{dx} \quad (2)$$

$$v(x) = v_0(x) \quad (3)$$

onde  $u$  e  $v$  são os deslocamentos axiais e transversais e o subscrito 0 refere-se a deslocamentos no centroide da seção transversal.

Na formulação, o elemento finito é Lagrangeano Total. Utilizando a deformação de Green-Lagrange, a expressão de deformação longitudinal é definida ao desconsiderar o termo quadrático da derivada do deslocamento horizontal ( $u$ ) em relação a  $x$ . Então:

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} - y \cdot \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv_0}{dx} \right)^2 \quad (4)$$

O termo  $v_{,x}^{0^2}$  é responsável pelos efeitos não lineares geométricos, e com a introdução da parte referente à membrana e à flexão, a deformação pode ser expressa como

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 - y \cdot \kappa \quad (5)$$

onde  $\varepsilon_0 = \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv_0}{dx} \right)^2$  é a deformação de membrana e  $\kappa = \frac{d^2 v}{dx^2}$  é a curvatura.

Assim, define-se o vetor de deformações generalizadas ( $\varepsilon$ ), como sendo o vetor constituído pela deformação de membrana ( $\varepsilon_0$ ) e pela curvatura ( $\kappa$ ):

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (6)$$

O vetor de deformações generalizadas pode ainda ser decomposto em duas parcelas: linear ( $\varepsilon_L$ ) e não linear ( $\varepsilon_{NL}$ ):

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix} = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL} = \begin{bmatrix} u'_0 \\ v''_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_0'^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Pela TCV o efeito do cisalhamento é desprezado e os esforços internos de interesse, esforço normal ( $N$ ) e momento fletor ( $M$ ), são calculados a partir da integração de tensões na seção transversal. Estes esforços definem o vetor de tensões generalizadas ( $\sigma$ ):

$$\sigma = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde  $N = \int_A \sigma_x \cdot dA$  e  $M = \int_A (-y \cdot \sigma_x) \cdot dA$ .

Na análise, para obter esses esforços é necessário considerar o equilíbrio das tensões em cada seção da barra, sendo as equações determinadas pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Este princípio afirma que o trabalho realizado pelas forças internas devido a um deslocamento virtual arbitrário, imaginário e possível é o mesmo trabalho realizado pelas forças externas. Desta forma:

$$\delta U = \delta W_{ext} \quad (9)$$

onde  $\delta U$  é o trabalho virtual interno e  $\delta W_{ext}$  é o trabalho virtual externo

O trabalho virtual interno, para um corpo qualquer é dado pela seguinte expressão genérica:

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot dV \quad (10)$$

Sabendo que a única tensão e deformação correspondente que atua no elemento de pórtico plano são ao longo do eixo  $x$ , e sendo a deformação virtual  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_x = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_0 - y \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}$ , tem-se:

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_x \cdot \boldsymbol{\sigma}_x \cdot dV = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_x \cdot dV + \int_V -y \cdot \delta \boldsymbol{\kappa}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_x \cdot dV \quad (11)$$

Decompondo a integral do volume em integrais ao longo do comprimento e sobre a área  $A$ , e substituindo os termos da integral na área pelos esforços internos, obtém-se a expressão do trabalho virtual interno de forma compacta:

$$\delta U = \int_L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot dx \quad (12)$$

onde:  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor de tensões generalizadas e  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  é o vetor de deformações virtuais generalizadas.

Já o trabalho virtual externo ( $\delta W_{ext}$ ) é dado pela soma do trabalho realizado pelas forças de campo, de superfície e pelas forças aplicadas diretamente sobre os nós do elemento, podendo ser expresso matematicamente pela expressão:

$$\delta W_{ext} = \int_V (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}) dV + \int_S (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}) dS + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{P} \quad (13)$$

onde  $\mathbf{u}$  representa o vetor de deslocamento no interior do elemento e  $\mathbf{u}_e$  representa o vetor de deslocamentos nodais.

Para calcular o trabalho virtual interno é imprescindível ter conhecimento dos deslocamentos no interior do elemento, que se dá em função da coordenada do ponto e dos deslocamentos nodais. Na aplicação do *MEF*, devem ser definidos os polinômios de interpolação para os deslocamentos, bem como aspectos relacionados à não linearidade do material e a rigidez geométrica.

Os deslocamentos relativos à parcela de membrana ( $u$ ) serão interpolados com uma função linear, sendo necessários apenas dois graus de liberdade para compor o polinômio de interpolação.

$$u = L_1 \cdot u_1 + L_2 \cdot u_2 \quad (14)$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são os deslocamentos nodais axiais e  $L_1$  e  $L_2$  são polinômios lineares.

Já os deslocamentos verticais ( $v$ ) serão interpolados por meio dos polinômios de Hermite

$$v = H_1 \cdot v_1 + H_2 \cdot \theta_1 + H_3 \cdot v_2 + H_4 \cdot \theta_2 \quad (15)$$

onde  $v_1$  e  $v_2$  são os deslocamentos verticais nodais,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações nodais e  $H_1, H_2, H_3$  e  $H_4$  são os polinômios de Hermite.

Com a substituição dos deslocamentos longitudinais e transversais, tem-se:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & H_2 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}_e \quad (16)$$

onde  $\mathbf{N}$  é a matriz das funções que transformam os deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}_e$ ) nos deslocamentos no interior do elemento ( $\mathbf{u}$ ).

A partir do campo de deslocamentos relativos à parcela de membrana ( $u$ ) e à parcela de flexão ( $v$ ), pode-se obter os dois termos do vetor de deformações generalizadas linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ ), derivando-se em relação a  $x$ , conforme as expressões dos termos da deformação de membrana linear ( $\varepsilon_{0L}$ ) e curvatura ( $\kappa$ )

$$\varepsilon_{0L} = \mathbf{B}_{0L} \cdot \mathbf{u}_e \quad (17)$$

$$\kappa = \mathbf{B}_b \cdot \mathbf{u}_e \quad (18)$$

onde  $\mathbf{B}_{0L}$  é a parcela de membrana da matriz deformação-deslocamento linear e  $\mathbf{B}_b$  é a parcela de flexão da matriz deformação-deslocamento.

Assim, o vetor de deformação linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ ) pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,x} & 0 & 0 & L_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & H_{1,xx} & H_{2,xx} & 0 & H_{3,xx} & H_{4,xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{B}_L \cdot \mathbf{u}_e \quad (19)$$

onde  $\mathbf{B}_L$  é a matriz deformação-deslocamento linear, que transforma os deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}_e$ ) no vetor de deformações generalizadas linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ ).

A parcela não linear do vetor de deformações generalizadas ( $\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}$ ), também pode ser desenvolvida derivando-se os deslocamentos verticais ( $v$ ).

$$\frac{dv}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & H_{1,x} & H_{2,x} & 0 & H_{3,x} & H_{4,x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{dv}{dx} = \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{u}_e \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_1 \mathbf{u}_e \quad (21)$$

Logo, a parcela não linear do vetor de deformações generalizadas ( $\boldsymbol{\varepsilon}_{NL}$ ) fica sendo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_e \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \cdot \mathbf{u}_e \quad (22)$$

onde  $\mathbf{B}_{NL}$  é a matriz deformação-deslocamento não linear.

O vetor de deformações generalizadas ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \left( \mathbf{B}_L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \right) \cdot \mathbf{u}_e = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_e \quad (23)$$

onde  $\mathbf{B}$  é matriz deformação-deslocamento, que transforma os deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}_e$ ) no vetor de deformações generalizadas ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ).

O vetor de força interna do elemento ( $\mathbf{g}_e$ ) pode ser obtido a partir do trabalho virtual interno:

$$\delta U = \int_L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot dx = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{g}_e \quad (24)$$

$$\mathbf{g}_e = \int_L \overline{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot dx \quad (25)$$

onde  $\overline{\mathbf{B}}$  é a matriz deformação-deslocamento virtual, que transforma os deslocamentos nodais virtuais ( $\delta \mathbf{u}_e$ ) no vetor de deformações generalizadas virtual ( $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ), é dada por:

$$\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL} \quad (26)$$

A matriz de rigidez do elemento ( $\mathbf{K}_t$ ) pode ser obtida pela diferenciação das forças internas em relação aos deslocamentos nodais:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{g}_e(\mathbf{u}_e)}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{K}_{Et} + \mathbf{K}_{Gt} \quad (27)$$

$$\mathbf{K}_{Et} = \int_L \overline{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}_e} \cdot dx = \int_L \overline{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}_e} \cdot dx = \int_L \overline{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_t \overline{\mathbf{B}} dx \quad (28)$$

$$\mathbf{K}_{Gt} = \int_L \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{x} = \int_L \left( \frac{\partial \mathbf{B}_L^T}{\partial \mathbf{u}_e} + \frac{\partial \mathbf{B}_{NL}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{x} = \int_L N \cdot \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{x} \quad (29)$$

onde  $\mathbf{K}_{Et}$  é a matriz de rigidez elástica e  $\mathbf{K}_{Gt}$  é a matriz de rigidez geométrica.

Diferenciando-se o vetor de tensões generalizadas ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) em relação ao vetor de deformações generalizadas ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ), a matriz constitutiva tangente ( $\mathbf{C}_t$ ) pode ser escrita como:

$$\mathbf{C}_t = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial N}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial M}{\partial \kappa} \end{bmatrix} \quad (30)$$

O vetor de força interna e a matriz de rigidez tangente podem ser avaliadas usando o operador clássico de montagem de elementos finitos:

$$\mathbf{g}_b = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_e \\ \vdots \end{pmatrix}_e \quad K_{Tb} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} K_{Te} \\ \vdots \end{pmatrix}_e$$

onde  $n_e$  é o número de elementos da viga.

O cálculo da matriz de rigidez tangente ( $\mathbf{K}_t$ ) e do vetor de forças internas ( $\mathbf{g}_e$ ) do elemento de viga envolve cálculo de integrais ao longo do eixo longitudinal do elemento e ao longo da área da seção transversal, como é o caso do cálculo do vetor de tensões generalizadas ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) e da matriz constitutiva tangente ( $\mathbf{C}_t$ ).

Nesse modelo proposto, as integrações ao longo do eixo longitudinal do elemento são realizadas por meio dos métodos das quadraturas de Gauss ou Lobatto. Em cada ponto de integração de Gauss ou Lobatto, são feitas as integrações ao longo da seção transversal pelo método das fatias, onde a seção transversal é dividida em  $n$  fatias horizontais de mesma altura e em cada uma dessas fatias toma-se a deformação e consequentemente, a tensão constantes e iguais aos valores correspondentes ao ponto no centro da fatia.

### 3.2 Contribuição da armadura passiva

Para a contribuição da armadura passiva, considera-se que cada barra é um ponto discreto com sua respectiva área, coordenadas e tensão, correspondente ao centróide da armadura. Esta contribuição pode ser descrita, conforme Moreira (2016), por meio de um simples somatório:

$$N_s = \sum_{j=1}^{N_b} A_{sj} \sigma_s(\varepsilon_j(y_{sj})) \quad (31)$$

$$M_s = \sum_{j=1}^{N_b} y_{sj} A_{sj} \sigma_s(\epsilon_j(y_{sj})) \quad (32)$$

onde  $N_b$  é o número de barras da seção transversal,  $A_{sj}$  é a área de cada barra,  $y_{sj}$  é a ordenada de cada barra em relação ao sistema de eixos global e  $\sigma_s$  é a tensão na armadura de aço passiva.

Vale ressaltar a necessidade de subtrair a contribuição da área de concreto que fora ocupada pela barra de aço para os esforços internos e a matriz constitutiva tangente. Assim, o cálculo das parcelas do aço e do concreto na seção transversal é dada por:

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_s \quad (33)$$

$$C_t = C_{tc} + C_{ts} \quad (34)$$

onde  $\sigma_c$  e  $\sigma_s$  representam os vetores das parcelas das tensões generalizadas do concreto e do aço, respectivamente, e,  $C_{tc}$  e  $C_{ts}$  representam as parcelas das matrizes constitutivas tangentes do concreto e do aço, respectivamente.

### 3.3 Formulação do elemento finito do cabo de protensão

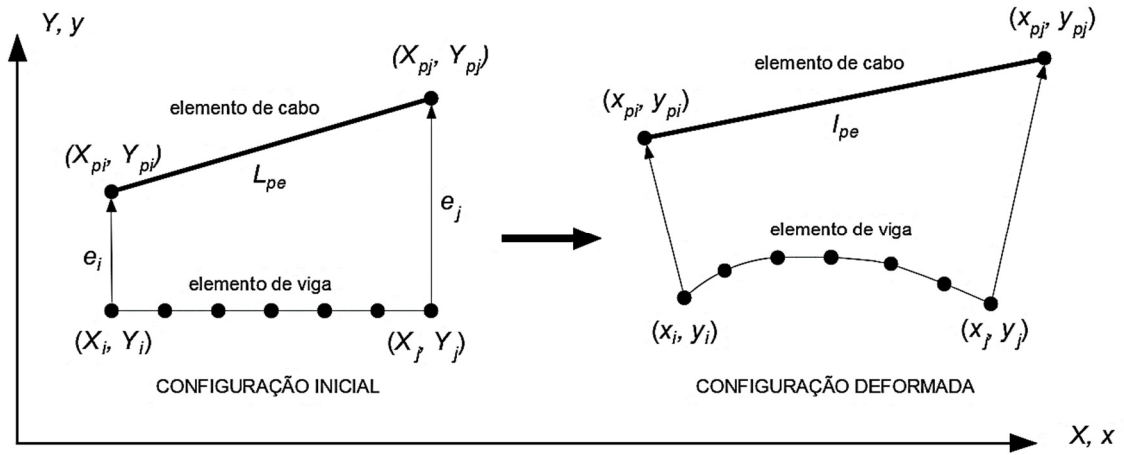
Para a formulação do elemento finito do cabo de protensão considera-se apenas a compatibilidade de deslocamentos nas extremidades da viga ou em pontos intermediários de ancoragem, visto que o aço de protensão pode se deslocar livremente no interior dos desviadores, fazendo com que ocorra uma incompatibilidade de deformações entre a estrutura em estudo e o aço de protensão.

Dessa forma, o modelo proposto considera nulo o atrito entre os desviadores e o aço de protensão, o que reduz significativamente a perda de protensão ao longo do cabo, tornando a deformação constante. Assim, vale ressaltar que a deformação da armadura de protensão em uma determinada seção não depende apenas da deformação naquela seção, mas da deformação de membrana ( $\epsilon_m$ ) e da curvatura ( $\kappa$ ) da estrutura como um todo.

As principais hipóteses empregadas para a análise do cabo de protensão são: o cabo de protensão compreende uma série de segmentos retos, conectados à viga por pontos discretos, denominados de pontos de ancoragem e de desvio; e, a deformação, força e tensão são considerados constantes ao longo do cabo. No trabalho de Lou, Lopes e Lopes (2016), o cabo é considerado como uma força externa, enquanto no presente trabalho pressupõe que o cabo de protensão seja um elemento finito, contribuindo não só para o vetor de força interna, mas também para a matriz de rigidez tangente, seguindo o procedimento desenvolvido por Moreira (2016) para a análise de vigas de concreto protendido.

Os pontos extremos de cada elemento de cabo estão ligados aos graus de liberdade do elemento de viga correspondentes, como mostrado na Figura 22. As coordenadas finais de cada segmento do cabo de protensão nas seções do desviador, não correspondem ao mesmo ponto material, que desliza em relação à seção da viga. Estas coordenadas são então empregadas para avaliar a variação do comprimento do cabo e subsequentemente a sua tensão. Por conseguinte, é possível avaliar a contribuição do cabo para o trabalho virtual total da viga protendida e obter o vetor de força interna e a rigidez tangente consistente do elemento do cabo, que é mostrado a seguir.

Figura 12 – Deformação do cabo de protensão e elemento de viga.



Fonte: Autoria própria (2017).

Os deslocamentos nodais dos elementos são obtidos a partir do deslocamento dos dois elementos (viga e cabo) definidos por:

$$\begin{aligned}
 u_{pi} &= u_i - e_i \theta_i \\
 v_{pi} &= v_i \\
 u_{pj} &= u_j - e_j \theta_j \\
 v_{pj} &= v_j
 \end{aligned} \tag{35}$$

onde  $u_{pi}$ ,  $u_{pj}$  são os deslocamentos axiais e  $v_{pi}$ ,  $v_{pj}$  são os deslocamentos verticais dos pontos extremos do segmento reto. Os índices  $i$  e  $j$  referem-se às coordenadas finais do elemento de cabo.

Escrevendo os deslocamentos nodais ( $u_p$ ,  $v_p$ ) matricialmente, tem-se:



$$\begin{bmatrix} u_{pi} \\ v_{pi} \\ u_{pj} \\ v_{pj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -e_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (36)$$

ou em forma compacta

$$\mathbf{u}_{pe} = \mathbf{T}_e \mathbf{u}_e \quad (37)$$

onde  $\mathbf{u}_{pe}$  é o vetor de deslocamento nodal do elemento do cabo,  $\hat{\mathbf{u}}_e$  é o vetor de deslocamento dos nós de viga associados aos nós do elemento de cabo e  $\mathbf{T}_e$  é a respectiva matriz de transformação. Por outro lado, os deslocamentos dos elementos correspondentes podem estar relacionados ao vetor de deslocamento global ( $\mathbf{u}$ ) por:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{u} \quad (38)$$

onde  $\mathbf{L}_e$  é uma matriz de incidência cinemática que relaciona os graus de liberdade de um elemento de cabo com os graus de liberdade globais. Desta forma, os deslocamentos do elemento podem estar diretamente relacionados aos deslocamentos globais:

$$\mathbf{u}_{pe} = \mathbf{T}_e \mathbf{L}_e \mathbf{u} \quad (39)$$

À medida que a tensão é assumida constante ao longo do comprimento do cabo, o trabalho virtual interno associado à sua deformação é dado por:

$$\delta U_p = \int_{L_p} \int_{A_p} \delta \varepsilon_p \sigma_p dA dS = \delta \varepsilon_p F_p L_p \quad (40)$$

onde  $F_p = A_p \sigma_p$  é a força do cabo e  $L_p$  é o comprimento inicial do cabo de protensão (isto é, não deformado). A deformação do cabo é dada pela soma de uma constante inicial constante ( $\varepsilon_{p0}$ ) e a deformação dependente do deslocamento incremental ( $\Delta \varepsilon_p$ ):

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \Delta \varepsilon_p \quad (41)$$

A deformação inicial  $\varepsilon_{p0}$  é a deformação que seria teoricamente encontrada no cabo após a aplicação da protensão, onde não tem um significado físico no caso de pós-tensão e corresponde a um valor de tensão de referência que permite as avaliações subsequentes da tensão do cabo (Moreira, 2016). Diferentes medidas de deformação podem teoricamente ser empregadas na definição da protensão do cabo. Por simplicidade, e de acordo com outras formulações como a desenvolvida por Lou, Lopes e Lopes (2016), a deformação incremental é definida convenientemente como a deformação de engenharia, levando a:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \frac{l_p - L_p}{L_p} = \varepsilon_{p0} + \frac{\sum_{e=1}^{n_p} (l_{pe} - L_{pe})}{\sum_{e=1}^{n_p} L_{pe}} \quad (42)$$

onde  $L_{pe}$  e  $l_{pe}$  são os comprimentos de segmento inicial e deformado, como mostrado na Figura 22, e  $n_p$  é o número de elementos de cabo.

A variação da deformação para a expressão de trabalho virtual pode ser obtida a partir da equação anterior como

$$\delta \varepsilon_p = \frac{\delta l_p}{L_p} \quad (43)$$

A variação do comprimento final de cada elemento de cabo, pode ser escrita como:

$$\delta l_{pe} = \frac{(x_{pj} - x_{pi})}{l_{pe}} (\delta x_{pj} - \delta x_{pi}) + \frac{(y_{pj} - y_{pi})}{l_{pe}} (\delta y_{pj} - \delta y_{pi}) \quad (44)$$

ou

$$\delta l_{pe} = \cos \beta (\delta u_{pj} - \delta u_{pi}) + \sin \beta (\delta v_{pj} - \delta v_{pi}) \quad (45)$$

onde  $\beta$  é o ângulo final formado com o eixo horizontal do elemento de cabo deformado. Na forma da matriz, tem-se

$$\delta l_{pe} = \begin{bmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta & \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{pi} \\ \delta v_{pi} \\ \delta u_{pj} \\ \delta v_{pj} \end{bmatrix} = \mathbf{r}_e^T \delta \mathbf{u}_{pe} \quad (46)$$

onde  $\delta \mathbf{u}_{pe}$  é a variação do vetor de deslocamentos nodais do elemento de cabo. Resumindo, as contribuições para todos os elementos que formam o cabo produz a variação do comprimento final como sendo:

$$\delta l_p = \sum_{e=1}^{n_p} \delta l_{pe} = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \delta \mathbf{u}_e \quad (47)$$

Portanto, o trabalho virtual interno do cabo de protensão é dado por

$$\delta U_p = \delta l_p F_p = \sum_{e=1}^{n_p} \delta l_{pe} F_p = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \delta \mathbf{u}_e F_p \quad (48)$$

Esta equação pode ser escrita de forma compacta como

$$\delta U_p = \sum_{e=1}^{n_p} \mathbf{g}_{pe}^T \delta \mathbf{u}_e \quad (49)$$

onde  $\mathbf{g}_{pe}$  é o vetor de força interna de cada elemento de cabo dado por

$$\mathbf{g}_{pe} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{r}_e F_p \quad (50)$$

ou

$$\mathbf{g}_{pe} = \mathbf{w}_e F_p = \begin{bmatrix} -\cos \beta \\ -\sin \beta \\ Y_i \cos \beta \\ \cos \beta \\ \sin \beta \\ -Y_j \cos \beta \end{bmatrix} F_p \quad (51)$$

onde  $\mathbf{w}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{r}_e$ . É importante notar que, na Equação (50), o vetor  $\mathbf{r}_e$  depende apenas dos deslocamentos do elemento, enquanto a força do tendão  $F_p$  depende do vetor de deslocamento global.

Em trabalhos anteriores, foram propostas equações semelhantes para levar em consideração as forças exercidas pelo cabo de protensão sobre a viga, que então entra na formulação FE como força externa. A abordagem adotada aqui segue o procedimento desenvolvido recentemente por Moreira (2016), no qual o tendão é considerado um elemento resistente e a força interna do cabo depende dos deslocamentos globais. Desta forma, há uma contribuição para a matriz de rigidez a partir da derivada das forças do cabo. A consideração deste termo na matriz de rigidez torna consistente a abordagem numérica, otimizando as taxas de convergência do processo não-linear.

A matriz de rigidez tangente global ( $\mathbf{K}_{Tp}$ ) é obtida a partir da diferenciação do vetor de força interna global ( $\mathbf{g}_p$ ) em relação aos deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}$ ):

$$\mathbf{K}_{Tp} = \frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{L}_e^T \frac{\partial \mathbf{g}_{pe}}{\partial \mathbf{u}} \quad (52)$$

Diferenciando a força interna do elemento em relação aos deslocamentos nodais, obtém-se

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{pe}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{T}_e^T \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} F_p + \mathbf{T}_e^T \mathbf{r}_e \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} \quad (53)$$

Portanto, a matriz de rigidez tangente do cabo é dada por

$$\mathbf{K}_{Tp} = \sum_{e=1}^{np} \left( \mathbf{L}_e^T \mathbf{T}_e^T \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} F_p + \mathbf{L}_e^T \mathbf{T}_e^T \mathbf{r}_e \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} \right) \quad (54)$$

Desenvolvendo o primeiro termo da Equação (54), correspondente a à matriz de rigidez geométrica do elemento de cabo, tem-se a derivada do vetor  $\mathbf{r}_e$  em relação ao vetor de deslocamento global:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}_e} \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}_e} \mathbf{L}_e \quad (55)$$

onde a derivada de  $\mathbf{r}_e$  em relação  $\mathbf{u}_e$  é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}_e} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \frac{\partial \mathbf{u}_{pe}}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{z}_e \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \mathbf{T}_e \quad (56)$$

$$\text{com } \mathbf{z}_e^T = [\sin \beta \quad -\cos \beta \quad -\sin \beta \quad \cos \beta] \text{ e } \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} = \frac{\mathbf{z}_e^T}{l_{pe}}$$

A matriz de rigidez geométrica do cabo de protensão é então dada por

$$\mathbf{K}_{Gp} = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{L}_e^T \mathbf{K}_{Gpe} \mathbf{L}_e = \mathbf{A}(\mathbf{K}_{Gpe}) \quad (57)$$

onde

$$\mathbf{K}_{Gpe} = \left( \frac{F_p}{l_{pe}} \right) \mathbf{T}_e^T \mathbf{z}_e \mathbf{z}_e^T \mathbf{T}_e \quad (58)$$

corresponde à matriz de rigidez geométrica do elemento de cabo.

Desenvolvendo o segundo termo da Equação (54), a derivada da força de protensão no cabo ( $F_p$ ) em função do vetor de deslocamentos nodais é dado por

$$\frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} = A_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{u}} = \frac{A_p E_{pt}}{L_p} \sum_{a=1}^{np} \mathbf{r}_a^T \mathbf{T}_a \mathbf{L}_a \quad (59)$$

onde o índice  $A_p$  foi introduzido porque a força de protensão  $F_p$  depende dos deslocamentos de todo o cabo e não apenas dos elementos. Portanto, a matriz de rigidez elástica do elemento de cabo pode ser escrita como

$$\mathbf{K}_{Ep} = \left( \frac{E_{pt} A_p}{L_p} \right) \mathbf{w} \mathbf{w}^T \quad (60)$$

onde

$$\mathbf{w} = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{L}_e^T \mathbf{w}_e = \mathbf{A}(\mathbf{w}_e) \quad (61)$$

Assim,  $\mathbf{K}_{Ep}$  é uma matriz simétrica e densa cuja dimensão depende da discretização da viga, uma vez que conecta os graus de liberdade dos nós de todos os elementos.

Finalmente, a matriz de rigidez tangente do cabo de protensão é a soma das matrizes de rigidez elástica e geométrica:

$$\mathbf{K}_{Tp} = \mathbf{K}_{Ep} + \mathbf{K}_{Gp} \quad (62)$$

## 4 ANÁLISE NUMÉRICA DAS ESTRUTURAS

### 4.1 Método do traçado do caminho de equilíbrio

A análise não linear de vigas mistas protendidas é, no presente trabalho, realizada em duas etapas. Inicialmente, há a etapa de aplicação da protensão, onde um dispositivo (geralmente um macaco hidráulico) aplica tensão ao cabo de protensão e compressão à viga. Quando é alcançado um certo nível de força ou tensão no cabo, o dispositivo é removido e os sistemas de ancoragem mantêm o cabo em pontos fixos, ou seja, a estrutura apresenta-se em estado de equilíbrio. A segunda etapa consiste na aplicação de carga externa, assumida como um conjunto de cargas proporcionais a um único parâmetro  $\lambda$ .

O equilíbrio da estrutura se dá, segundo o Princípio dos Trabalhos Virtuais, quando o trabalho realizado pelas forças internas devido a um deslocamento arbitrário pequeno, imaginário e possível é igual ao trabalho realizado pelas forças externas. Desta forma, o equilíbrio na forma matricial é dado por:

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \quad (67)$$

onde  $\mathbf{g}$  é a soma dos vetores de forças internas global referente ao elemento de viga e ao elemento de cabo e  $\mathbf{f}$  é o vetor de forças externas global.

No entanto, para o cálculo do equilíbrio, é necessário definir o vetor resíduo ( $\mathbf{r}$ ), como sendo a diferença entre o vetor de forças internas e o vetor de forças externas, que equivale ao desequilíbrio nodal:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{q} \quad (68)$$

onde  $\mathbf{q}$  é o vetor de cargas externas de referência e  $\lambda$  é o fator de carga que multiplica este vetor, considerado também como variável ao longo do equilíbrio.

A solução das equações de equilíbrio deve ser realizada por meio de um processo iterativo, visto que a relação entre o vetor de forças internas ( $\mathbf{g}$ ) e os deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}$ ) é não linear. Assim, em uma estrutura com  $n$  graus de liberdade, existem inicialmente  $n$  incógnitas, que são os deslocamentos de cada grau de liberdade, e o equilíbrio é representado por um sistema com  $n$  equações para um valor de fator de carga conhecido. Desse modo, mais uma equação é necessária para determinar o caminho de equilíbrio da estrutura (raiz da função resíduo), já que existem  $n + 1$  incógnitas, ou seja, o vetor de deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ), que representa a configuração de equilíbrio da estrutura, bem como o fator de carga correspondente.

Na análise atual, é procurado o comportamento geral da viga, desde os estágios elásticos iniciais até a carga final. Para resolver as duas etapas do problema, devem ser empregadas estratégias numéricas adequadas. Assim, para a determinação do equilíbrio da estrutura, serão utilizados dois métodos: o método de controle de carga e o método de controle de deslocamentos.

#### **4.1.1 Controle de carga (aplicação da protensão)**

O método do controle de carga é adotado para determinar a deformação inicial teórica ( $\varepsilon_{p0}$ ), de modo que após a aplicação da protensão (ausência de carga externa) e perdas iniciais, a deformação efetiva ( $\varepsilon_{pe}$ ) seja igual à deformação dada no problema. Assim, para cada valor estimado da deformação inicial teórica, a deformação efetiva no cabo é calculada, por meio da solução do equilíbrio da viga, por um processo iterativo simples, onde a equação acrescida ao sistema de  $n$  equações para encontrar o caminho de equilíbrio da estrutura, é o valor fixo do fator de carga ( $\lambda$ ), no caso, igual a zero. Em geral, se esse método for adotado para encontrar todo o caminho de equilíbrio da estrutura, impõe-se incrementos de carga, que podem ser constantes ou não, em cada passo.

Geralmente, em aplicações experimentais ou numéricas, uma força de protensão inicial no cabo ( $F_{pe}$ ) é a informação disponível. Esta força de protensão é correspondente a um campo de deslocamento, que dá origem ao sistema equilibrado de carga. O modelo de elementos finitos aqui empregado considera a força que atua na viga como uma função da força do cabo e dos deslocamentos globais. Portanto, nenhuma informação sobre os deslocamentos relativos da viga e do cabo de protensão é conhecida, apenas a definição da deformação inicial teórica ( $\varepsilon_{p0}$ ) que é mantida constante ao longo da análise.

#### **4.1.2 Controle de deslocamentos (aplicação da carga externa)**

Após a aplicação da protensão, a carga externa é então aplicada, e o método adotado é o de controle de deslocamentos, que consiste em fixar determinado valor a uma das componentes do vetor de deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ), correspondente ao grau de liberdade escolhido, sendo esse deslocamento incrementado e fixado em cada passo. Ou seja, a carga aplicada é tomada como uma carga de referência proporcional a um único parâmetro de carga  $\lambda$ .

## 4.2 Modelo constitutivos dos materiais

Na análise numérica das estruturas, a não linearidade física será considerada na integração dos esforços resistentes e no cálculo da matriz constitutiva tangente, por meio do uso de relações tensão-deformação uniaxiais não lineares, para os materiais concreto, aço passivo e aço de protensão. Embora os modelos constitutivos dos materiais sejam não lineares, os materiais são considerados elásticos. Apesar de existir várias relações diferentes na literatura, não há uma relação única considerada como a melhor para cada aplicação.

### 4.2.1 Concreto

O concreto, mesmo antes de qualquer aplicação de carga, já apresenta microfissuras devido à retração e liberação de água, no próprio processo de cura. À medida que o carregamento é aplicado, essas microfissuras se propagam, acarretando diminuição gradativa da rigidez da estrutura, e confere ao concreto um comportamento não linear físico, mesmo quando submetido a baixos níveis de tensão. Além disso, o concreto tem baixa resistência à tração, quando comparada à resistência da armadura passiva, ou mesmo a sua resistência à compressão.

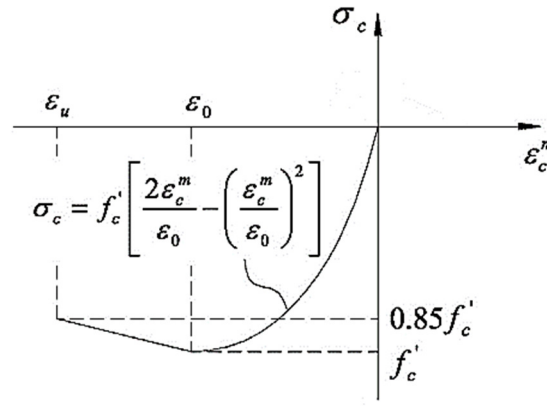
Desta forma, o diagrama de tensão-deformação do concreto é bastante importante para avaliar o comportamento da estrutura quando submetido à compressão. Apesar do diagrama tensão-deformação da NBR 6118:2014, mais conhecido como parábola-retângulo ( $f_{ck} < 50$ ), ser bastante conhecido e utilizado em projeto, outras normas apresentam um decaimento na curva, após o concreto ter atingido sua resistência máxima, devido ao amolecimento do concreto. A curva do modelo de Hognestad (1951) é um exemplo.

O modelo de Hognestad (1951) apresenta um diagrama de tensão-deformação para o concreto na compressão muito semelhante ao da NBR 6118:2014, conforme pode ser visto na Figura 23. O trecho descendente é dado por uma reta, como mostra a Equação (64), já o trecho ascendente da curva, que está no intervalo de 0 a  $\varepsilon_c$ , é parabólico, semelhante ao da NBR 6118:2003.

$$\sigma_c = f_c \left[ 1 - 0,15 \cdot \left( \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right]_u \quad (63)$$

$$\sigma_c = f_c' \left[ 2 \cdot \left( \frac{\varepsilon_c^m}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon_c^m}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (64)$$

Figura 23 – Modelo construtivo para o concreto segundo Hognestad (1951).

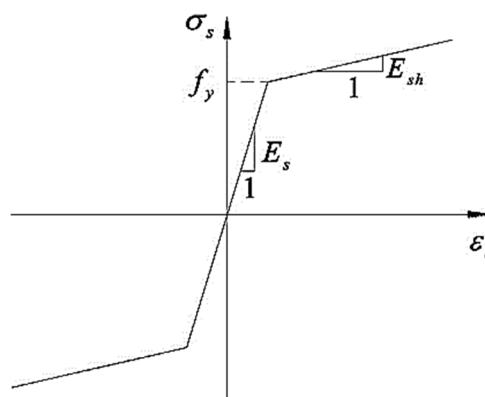


Fonte: Autoria própria (2017).

#### 4.2.2 Aço de armadura passiva

O aço de armadura passiva geralmente apresenta o mesmo comportamento na compressão e na tração e, como se trata de um material homogêneo e isotrópico, pode ser modelado considerando a relação tensão deformação linear até atingir o patamar de escoamento. É importante ressaltar também que após o escoamento este material sofre um fenômeno chamado encruamento, no qual a estrutura cristalina é modificada proporcionando um acréscimo de rigidez à estrutura. No modelo proposto, a armadura passiva foi modelada como modelo elasto-plástico perfeito com endurecimento linear, onde a curva apresentada na Figura 24 descreve o comportamento do material.

Figura 24 – Modelo elasto-plástico com endurecimento linear.



Fonte: Autoria própria (2017).

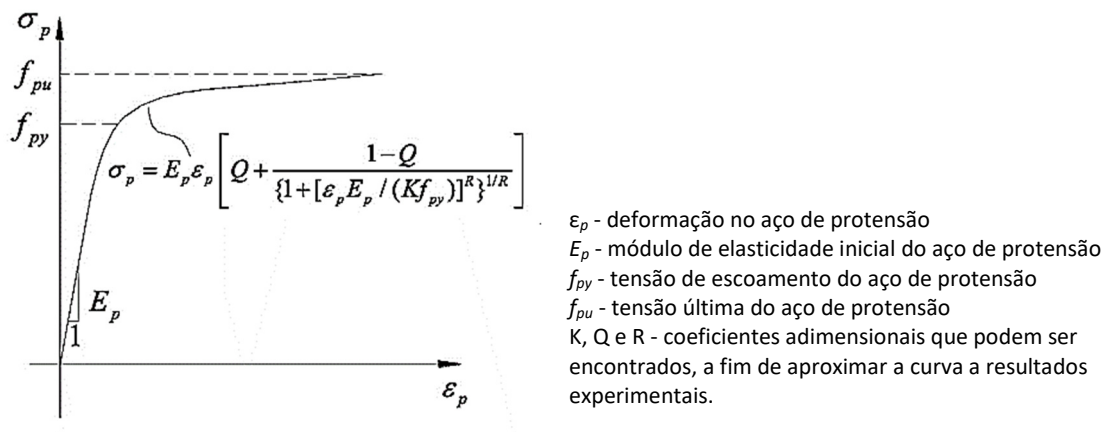


### 4.2.3 Aço de protensão

O aço de protensão é definido por um trecho inicial linear elástico, um segundo trecho na proximidade do escoamento do aço, onde o material vai perdendo gradativamente rigidez e um terceiro trecho novamente linear, onde o material apresenta uma pequena rigidez e escoa até a ruptura.

Menegotto e Pinto (1973) propuseram uma equação que representa bem esse comportamento do aço de protensão. A Equação pode ser vista na Figura 25.

Figura 25 – Diagrama tensão-deformação do aço de protensão (Menegotto e Pinto, 1973).



Fonte: Autoria própria (2017).

Utilizando uma simples relação trigonométrica, o coeficiente  $Q$  pode ser expresso por:

$$Q = \frac{f_{pu} - K f_{py}}{\varepsilon_{pu} - K f_{py}} \quad (65)$$

O coeficiente  $R$  pode ser determinado a partir de um processo iterativo, com a condição de que a tensão no aço de protensão ( $f_p$ ) deve ser igual à tensão de escoamento ( $f_{py}$ ) para deformação de 0,01, ou seja:

$$f_p (\varepsilon_p = 0,01) = f_{py} \quad (66)$$

O coeficiente  $K$  pode ser determinado caso se tenha uma curva experimental do aço de protensão, a fim de aproximar a curva experimental à curva teórica. Para cordoalhas de sete fios, na literatura é adotado o valor de  $K = 1,04$ , onde a expressão apresenta em geral boa concordância com resultados experimentais.

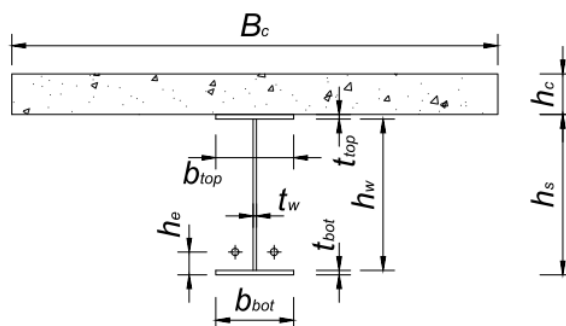
## 5 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES

Neste trabalho, foram feitas análises numéricas de vigas mistas de aço e concreto com protensão externa, a fim de validar o modelo proposto. A avaliação dos resultados deu-se por meio de comparações com resultados experimentais, analíticos e numéricos de exemplos específicos disponíveis na literatura técnica, principalmente em periódicos recentes, que levem em consideração a análise não-linear física e geométrica destas estruturas.

Na análise não-linear, a integração numérica ao longo do comprimento do elemento baseou-se na quadratura de Gauss com 3 pontos de integração, e adotou-se o método incremental-iterativo de controle de deslocamentos, com incremento de 0,5 mm para o deslocamento vertical no centro da viga, e para o método incremental-iterativo de controle de carga, com um incremento de 10 kN, ambos com tolerância para convergência de  $1 \times 10^{-5}$ .

Para melhor disposição dos dados referentes à seção transversal das vigas analisadas, utilizou-se a nomenclatura especificada na Figura 26, e suas respectivas dimensões serão apresentadas em forma de tabelas.

Figura 26 – Nomenclatura para as dimensões geométricas das seções transversais de vigas mistas protendidas.

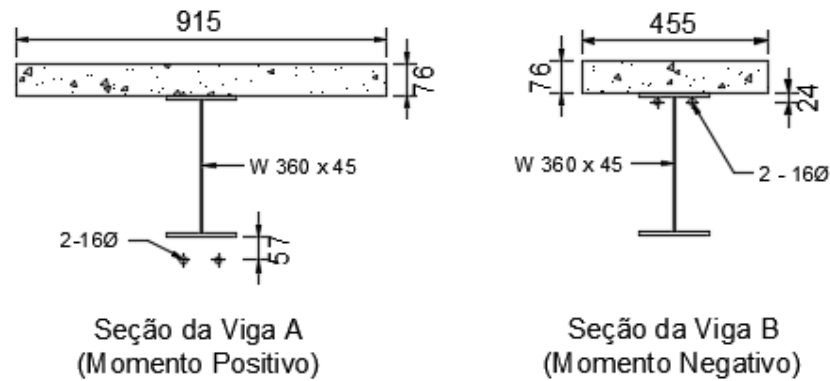


Fonte: Autoria própria (2017).

### 5.1 Vigas bi apoiadas (Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub, 1989)

Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989) desenvolveram um estudo que analisa experimentalmente o comportamento de vigas mistas de aço e concreto protendidas submetidas a momento fletor positivo e negativo. A Figura 27 apresenta as seções das vigas A e B ensaiadas. A Tabela 1 dispõe das dimensões da laje de concreto, do perfil de aço e a posição dos cabos de protensão.

Figura 27 – Seção transversal das vigas A e B ensaiadas por Saadatmanesh et al (1989).



Fonte: Adaptado SAADATMANESH; ALBRECHT; AYYUB (1989).

Tabela 1 – Dimensões geométricas das vigas ensaiadas por Saadatmanesh et al.

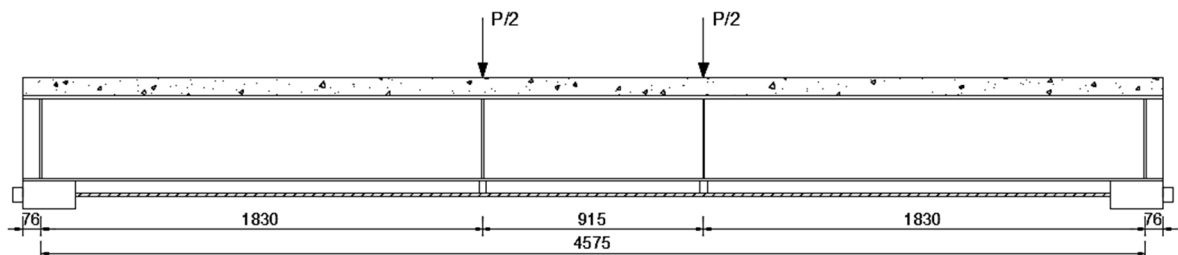
Viga	$B_c$	$h_c$	$b_{top}$	$t_{top}$	$h_w$	$t_w$	$h_{bot}$	$t_{bot}$	$h_e$
A	915	76	171	10	332	7	171	10	57
B	455	76	171	10	332	7	171	10	24

Fonte: SAADATMANESH; ALBRECHT; AYYUB (1989).

#### • Viga A

A viga A possui 4,57 m de comprimento e foi modelada utilizando-se 18 elementos de viga e 18 elementos de cabo, tendo os mesmos nós correspondentes. A seção composta de aço e concreto foi discretizada em 14 fatias, sendo 4 fatias de concreto e 10 camadas de aço. A protensão se deu por meio de cabos externos e retos, que consistem em dois cabos de aço de alta resistência 16 mm de diâmetro (7Ø5) colocados a 57 mm abaixo da superfície inferior da mesa do perfil de aço, e dois desviadores ao longo de seus comprimento. A força de protensão inicial foi de 98 kN. A estrutura da viga pode ser vista na Figura 28.

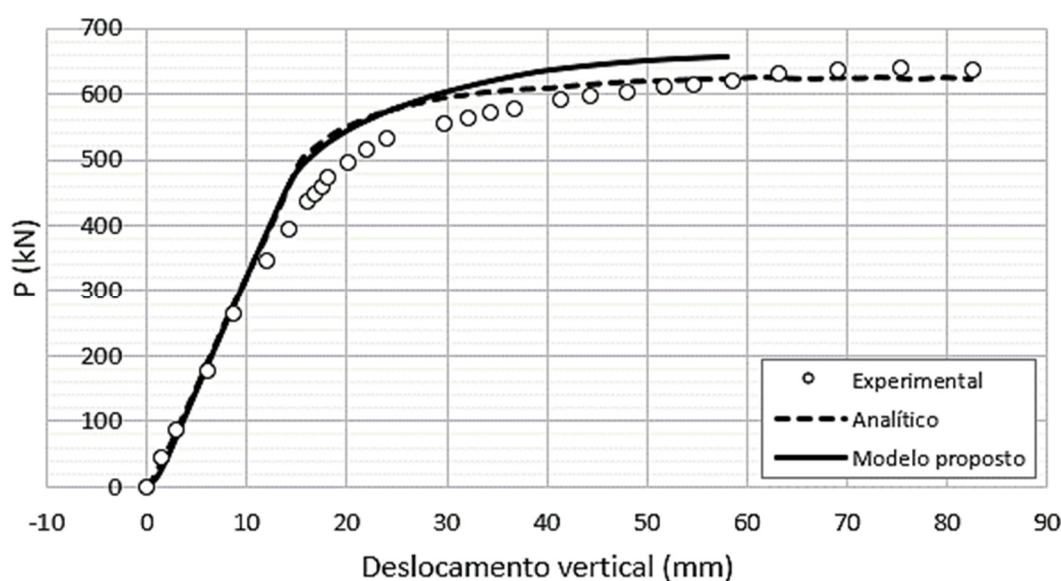
Figura 28 – Elevação da viga A ensaiada por Saadatmanesh et al (1989).



Fonte: Autoria própria (2017).

Os valores dos parâmetros do concreto foram:  $f_{cm} = 33,4$  Mpa,  $f_t = 3$  MPa,  $E_c = 36,0$  GPa. Para o material aço foi adotado o modelo elasto-plástico perfeito, com endurecimento linear, com uma tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual a 367 MPa, módulo de elasticidade longitudinal de 200 GPa, módulo de elasticidade de endurecimento ( $E_{sh}$ ) de 3 GPa e deformação última de 24%. As propriedades do aço de protensão, medidas em relação ao diâmetro total, apresenta tensão de escoamento ( $f_y$ ) igual a 910 MPa, tensão de última ( $f_u$ ) igual a 1090 MPa, módulo de elasticidade longitudinal de 195 GPa e deformação última de 9,7%.

Figura 29 – Curva de equilíbrio da viga A ensaiada por Saadatmanesh et al (1989).

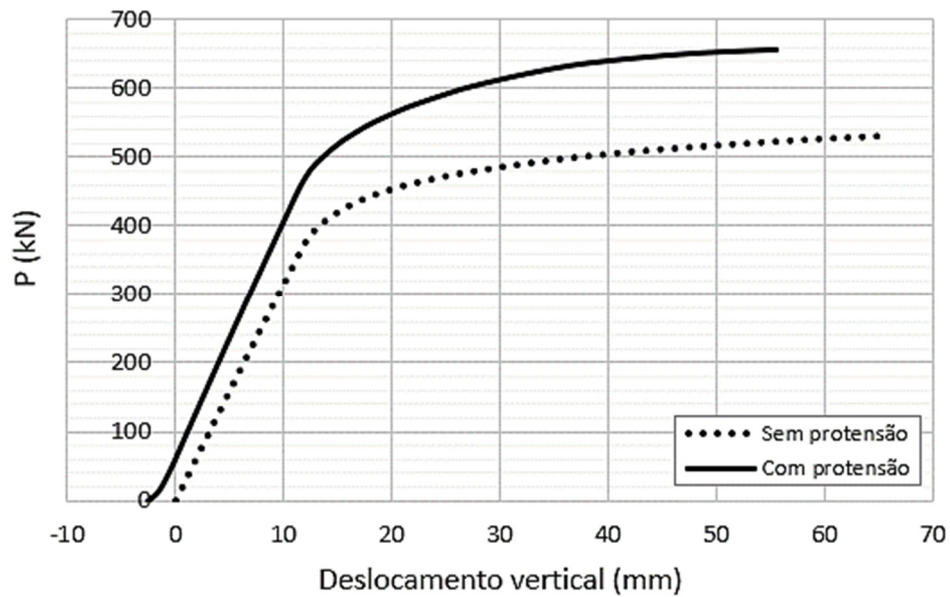


Fonte: Autoria própria (2017).

Os resultados obtidos através do modelo proposto em comparação com os apresentados Saadatmanesh et al (1989) foram satisfatórios. O modelo apresentou um comportamento ligeiramente mais rígido que o observado em laboratório, e o pico de carga (657 kN) foi similar ao observado no experimento (641 kN), muito embora o deslocamento máximo não tenha sido atingido.

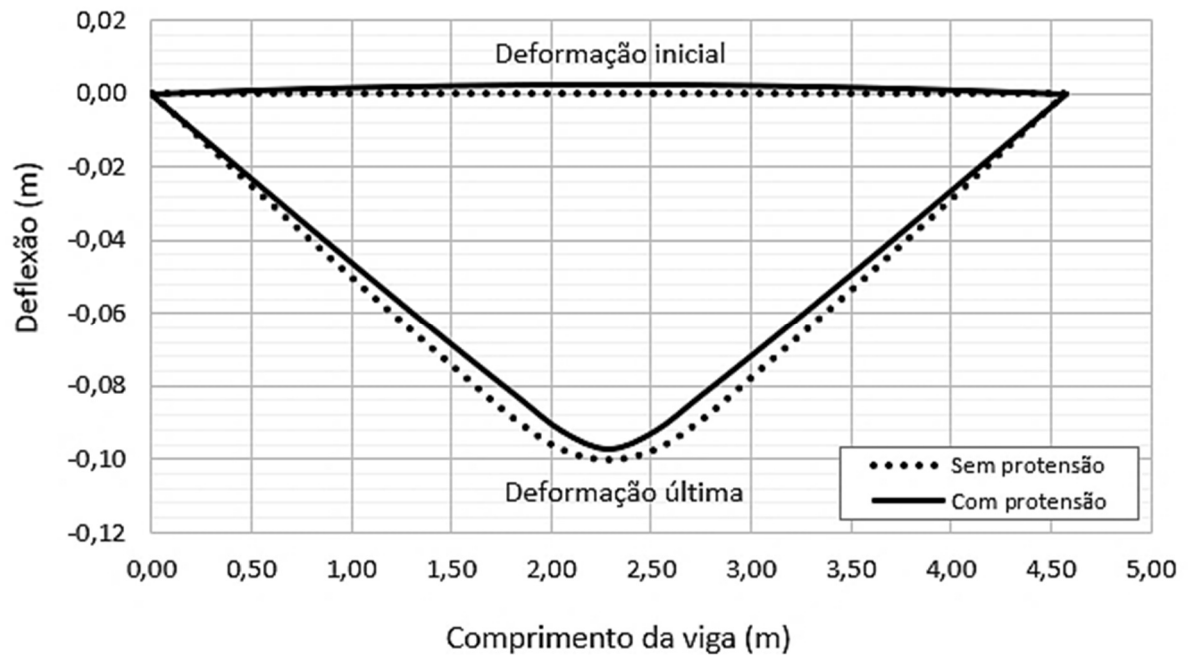
Na Figura 30 pode ser verificada a diferença entre o comportamento estrutural da viga analisada sem a protensão e quando submetida à protensão externa. É notório o quanto a estrutura ganha rigidez e ocorre o aumento de 23,9% no carregamento último o qual é suportado. A Figura 31 mostra a configuração deformada da viga no primeiro passo (aplicação da protensão) e a deformação última. A aplicação da protensão acarreta a redução da deflexão.

Figura 30 – Comparação do comportamento da viga A (Saadatmanesh et al,1989) considerando dois estágios: sem protensão e com protensão externa.



Fonte: Autoria própria (2017).

Figura 31 – Configuração deformada da viga A ensaiada por Saadatmanesh et al (1989).

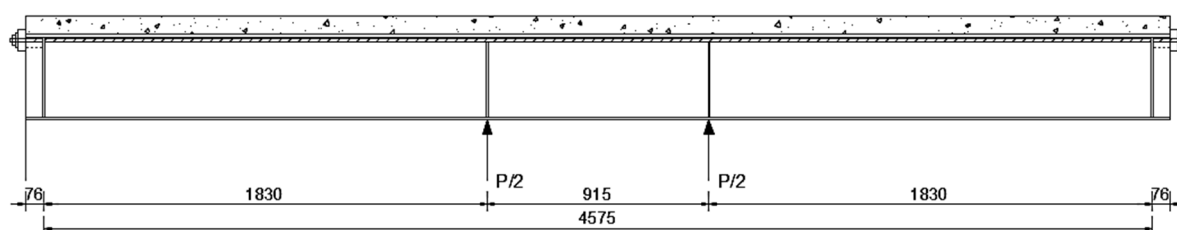


Fonte: Autoria própria (2017).

### • Viga B

A viga B simulou a região do momento negativo. A configuração é similar à viga A, em termos de comprimento, números de elementos de viga, elementos de cabos e, discretização da seção transversal. No entanto, foram utilizados dois cabos de aço de alta resistência de diâmetro 16 mm, localizados na região de momento negativo, a 24 mm da superfície superior da mesa do perfil de aço. A força de protensão inicial foi de 98 kN. A estrutura da viga pode ser vista na Figura 32.

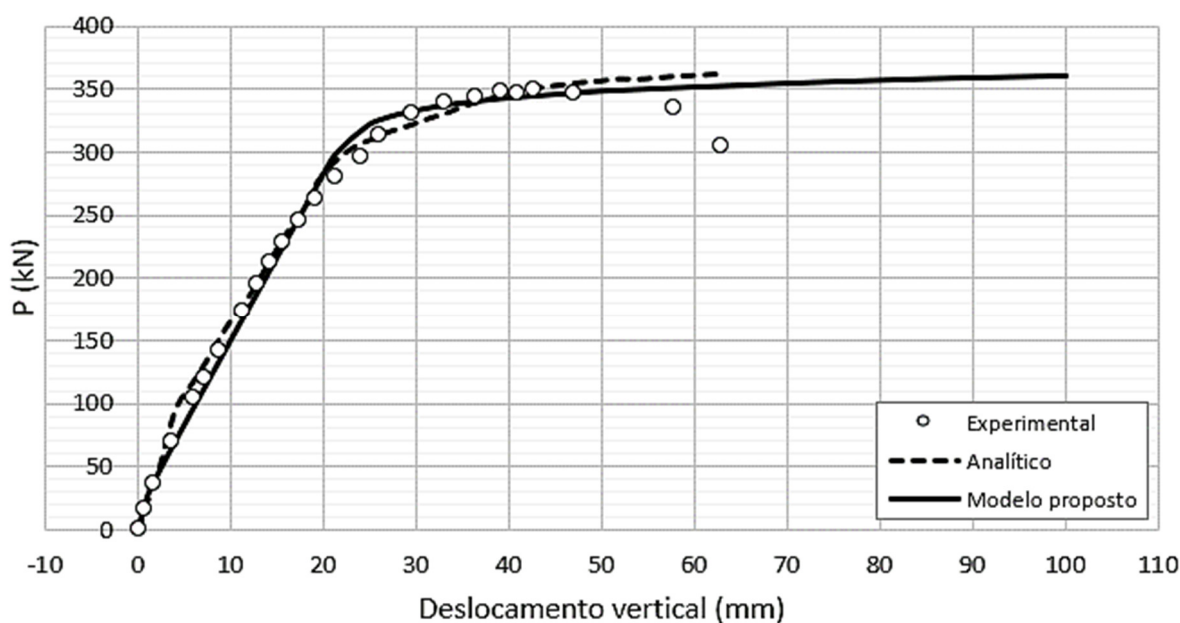
Figura 32 – Elevação da viga B ensaiada por Saadatmanesh et al (1989).



Fonte: Autoria própria (2017).

As propriedades mecânicas do cabo de protensão para a viga B foram os mesmos descritos anteriormente para a viga A. Para o concreto, a resistência à compressão foi de 32,4 MPa e a resistência à tração de 2,8 MPa. O perfil de aço apresentou tensão de escoamento de 379 MPa, resistência à tração de 530 MPa e 26% de alongamento.

Figura 33 – Curva de equilíbrio da viga B ensaiada por Saadatmanesh et al (1989).



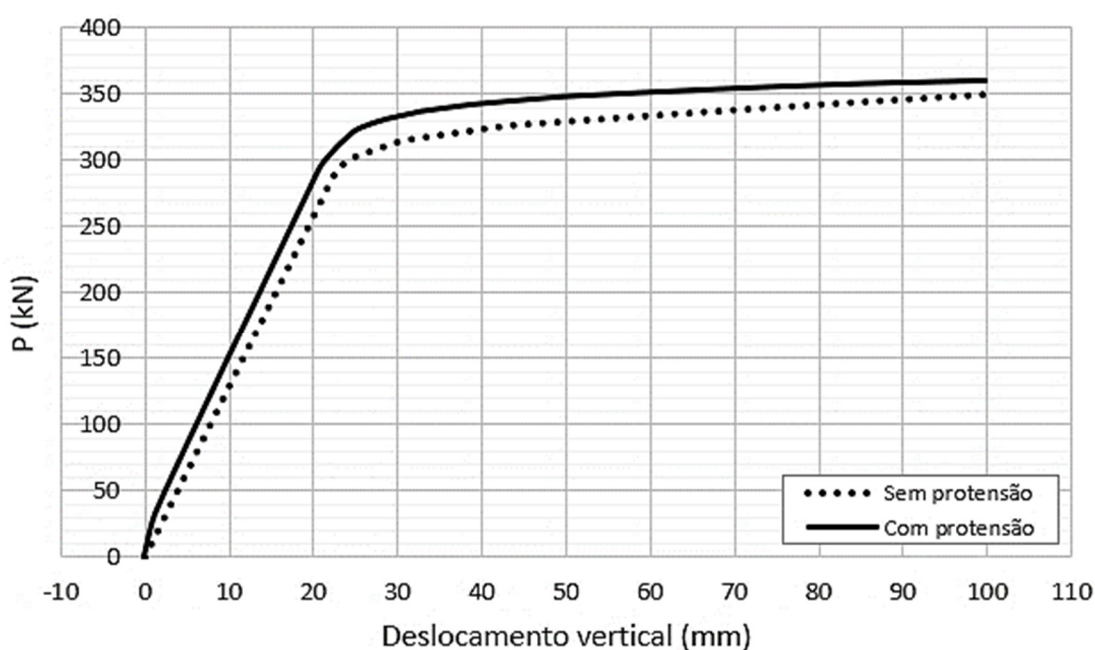
Fonte: Autoria própria (2017).

A Figura 33 mostra uma comparação entre os resultados da análise e experimento relativos à resposta de carga-deslocamento com a curva gerada pelo modelo proposto. Observa-se que a análise capta bem a tendência da evolução da deformação e do carregamento aplicado.

A técnica de protensão aplicada à viga B, a qual é submetida a momento negativo, proporcionou à estrutura um suave ganho de rigidez, no entanto, a deformação manteve-se constante, como pode ser visto nas Figuras 34 e 35. Isso mostra que, tanto a excentricidade do cabo de protensão, quanto as dimensões geométricas da seção transversal (por exemplo, laje de concreto), podem influenciar no comportamento da estrutura como um todo.

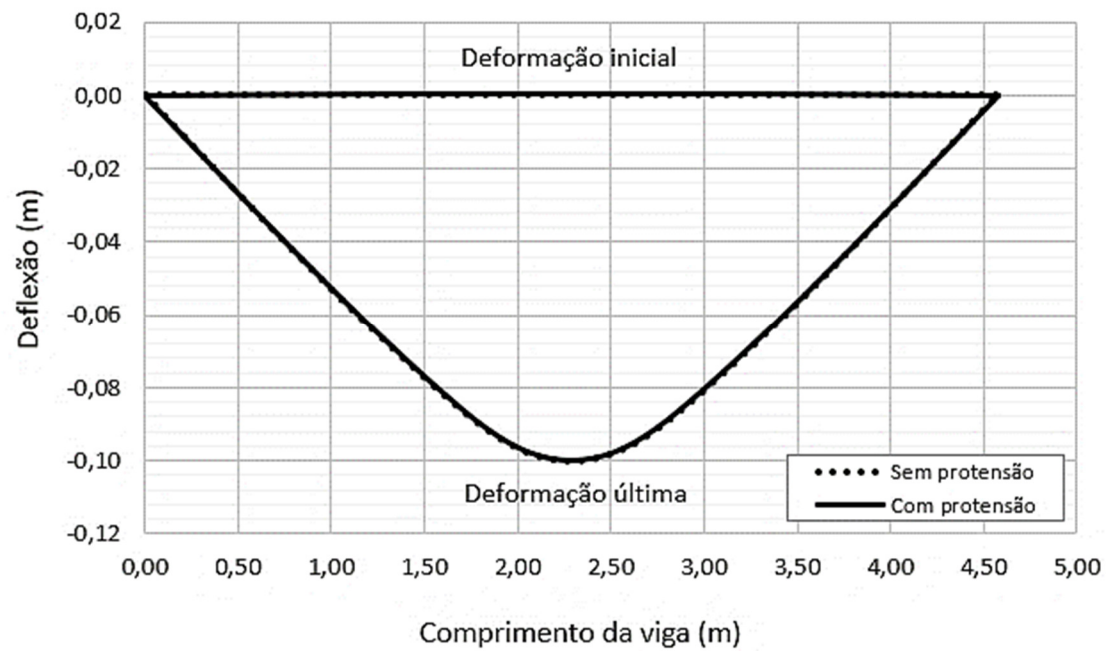
O gráfico da carga aplicada versus a resposta total da força do cabo de protensão para ambas as vigas ensaiadas por Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989), encontra-se disposto na Figura 36.

Figura 34 – Comparação do comportamento da viga B (Saadatmanesh et al,1989) considerando dois estágios: sem protensão e com protensão externa.



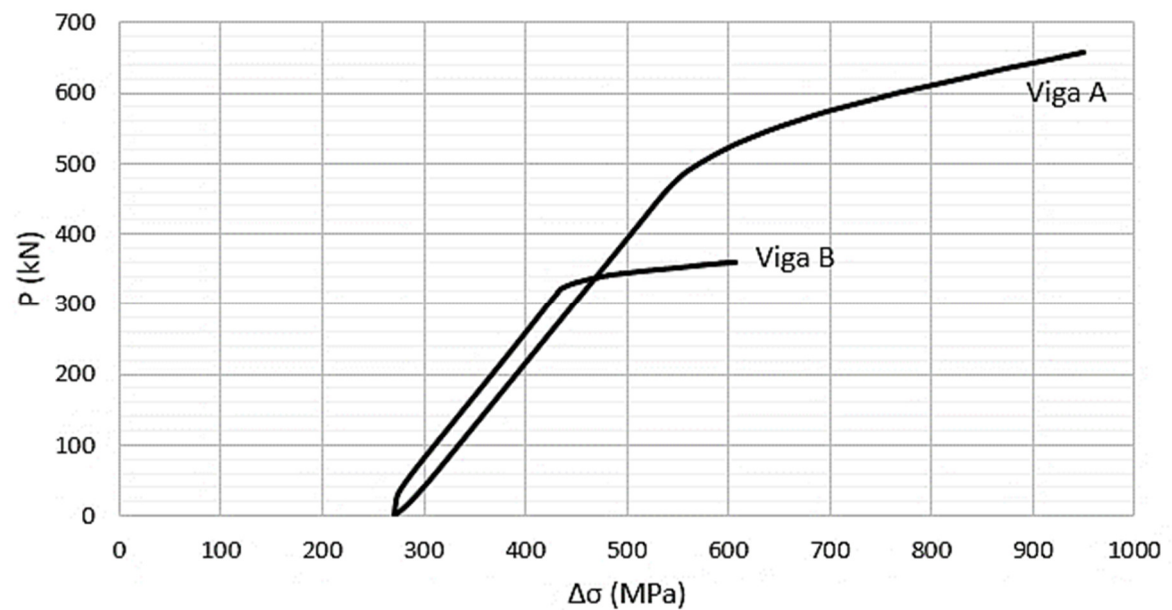
Fonte: Autoria própria (2017).

Figura 35 – Configuração deformada da viga B ensaiada por Saadatmanesh et al (1989).



Fonte: Autoria própria (2017).

Figura 36 – Incremento de tensão no cabo das vigas A e B ensaiadas por Saadatmanesh et al (1989).



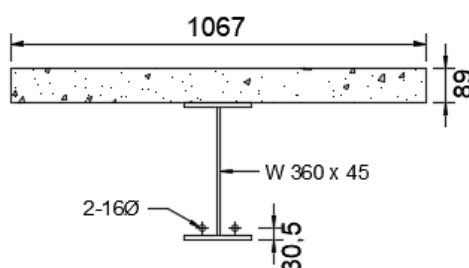
Fonte: Autoria própria (2017).



## 5.2 Vigas bi apoiadas (Ayyub, Sohn e Saadatmanesh, 1990)

Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990) analisaram o comportamento de vigas mistas de aço e concreto protendidas, como também os benefícios de utilizar diferentes tipos e perfis do cabo de protensão. Três vigas, A, B e C foram testadas para falhar em momento positivo de flexão. Todas as vigas estudadas possuem a mesma geometria. O detalhamento da seção transversal encontra-se ilustrada na Figura 37 e as elevações das vigas A e B e da viga C podem ser vistas, respectivamente, nas Figuras 38 e 39. A Tabela 2 especifica as características do cabo de protensão para cada viga analisada.

Figura 37 – Detalhamento da seção transversal das vigas A, B e C testadas por Ayyub et al.



Fonte: Autoria própria (2017).

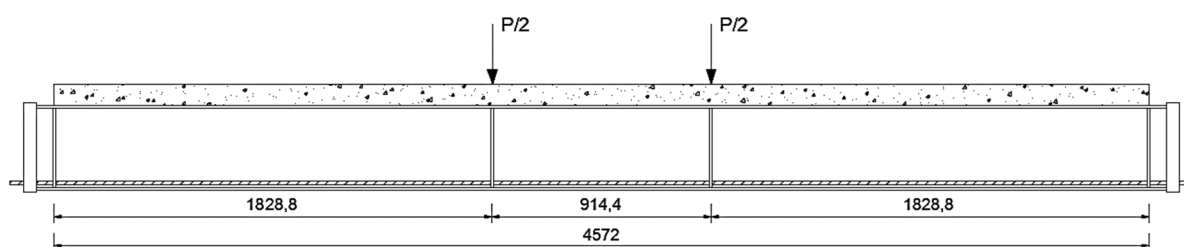
Tabela 2 – Especificações das vigas A, B e C testadas por Ayyub et al.

Viga	Perfil I	Cabos de Protensão				
		Tipo	Perfil	Posição* (mm)	Área (mm <sup>3</sup> )	Força (kN)
A	W 360 x 45	Barra	Retilíneo	30,5	361	267
B	W 360 x 45	Cabo	Retilíneo	30,5	279	289
C	W 360 x 45	Cabo	Poligonal	30,5	279	267

\* A posição do cabo de protensão é a distância da superfície inferior da mesa do perfil de aço para centro do cabo.

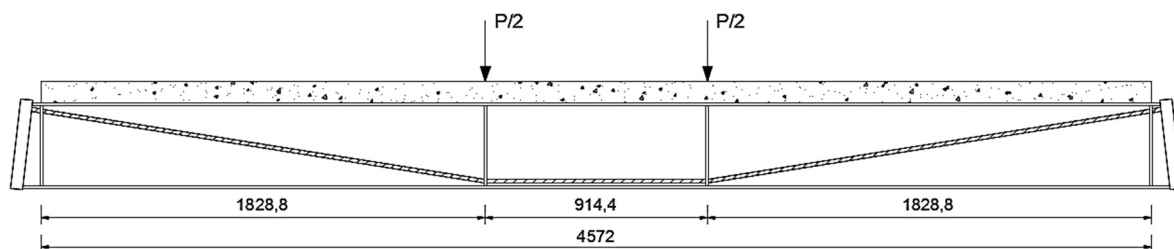
Fonte: AYYUB, SOHN E SAADATMANESH (1990).

Figura 38 – Elevação das vigas A e B ensaiada por Ayyub et al (1989).



Fonte: Autoria própria (2017).

Figura 39 – Elevação da viga C ensaiada por Ayyub et al (1989).



Fonte: Autoria própria (2017).

As propriedades mecânicas dos materiais são as seguintes: para concreto,  $f'_c = 40$  MPa,  $f_t = 4$  MPa,  $E_c = 36,0$  GPa; para a barra de protensão,  $f_{py} = 915$  MPa,  $f_{pu} = 1091$  MPa,  $E_b = 195$  GPa; para o cabo de protensão,  $f_{py} = 1620$  MPa,  $f_{yu} = 2017$  MPa,  $E_p = 195$  GPa; para o perfil de aço,  $f_y = 411,6$  MPa,  $E_s = 200$  GPa. Os alongamentos médios na falha de barras e cabos de protensão foram de 8,5% e 5,2%, respectivamente.

Na análise, as vigas A, B e C têm o comprimento total de 4,83 m (suportadas em uma extensão simples de 4,57 m) foram divididas em 18 elementos de viga (7 elementos para o intervalo de cisalhamento esquerdo, 4 elementos para a extensão de flexão e 7 elementos para o intervalo de cisalhamento direito) e a discretização da seção transversal compreende um total de 14 camadas (4 camadas de concreto e 10 camadas de aço).

Conforme mostrado nas Figuras 37 e 38, a protensão na viga A foi realizada por meio de duas barras de 16 mm de diâmetro, cada uma com seção transversal nominal de 180 mm<sup>2</sup>. As barras de protensão foram ancoradas nas duas extremidades da viga, a 30 mm da superfície inferior da mesa do perfil de aço.

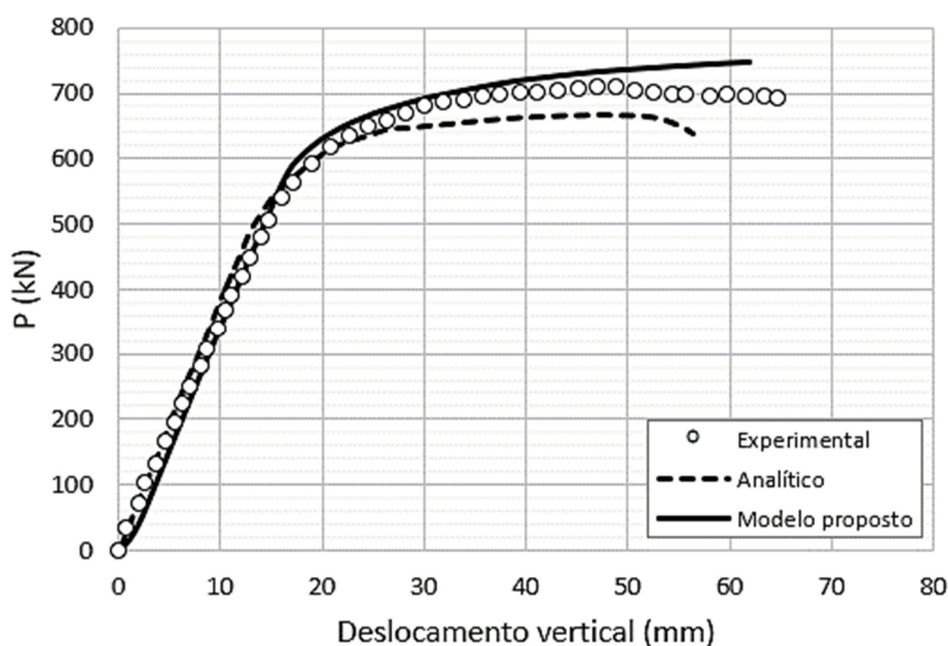
Em contrapartida, a viga B apresenta os mesmos detalhes de projeto da viga A, com exceção do tipo de protensão. A viga foi protendida por meio de dois cabos de protensão compostos por sete fios, de relaxação baixa, de 15 mm,.

A viga C foi testada com o propósito de estudar o efeito do traçado poligonal do cabo de protensão em comparação com o traçado retilíneo sobre o comportamento estrutural. A protensão se deu por meio de cabos de aço de baixa relaxação e ancorados em ambas as extremidades a 32 mm abaixo da mesa superior (compressão) do perfil de aço e a 30 mm acima da mesa inferior (tração) nos pontos dos desviadores.

Como pode ser observado, a força de protensão e as excentricidades dos cabos de protensão foram considerados parâmetros variáveis. Os resultados dessas análises foram comparados com os resultados experimentais e analíticos realizados por Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990) e estão dispostos a seguir, onde exibem dois gráficos para cada viga estudada, o que representa a evolução do deslocamento no centro da estrutura e a tensão no cabo de protensão com o valor da carga aplicada.

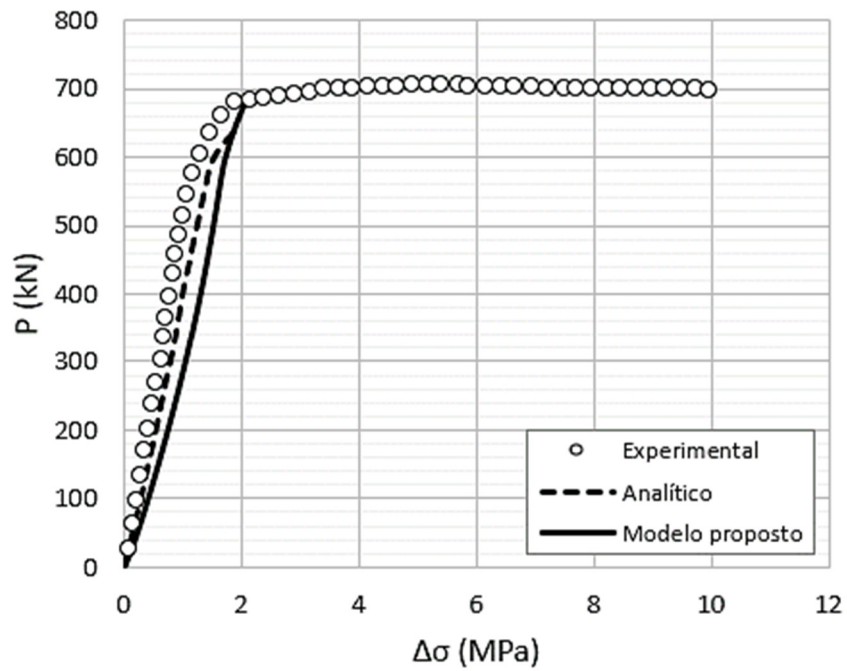
Em relação às curvas de equilíbrio carga-deslocamento, pode-se observar nas Figuras 40, 42 e 44 que tanto a análise do modelo proposto quanto a realizada pelos autores, são capazes de reproduzir de forma satisfatória as características de deflexão experimental. Inicialmente, as respostas carga-deslocamento são perfeitamente coincidentes. No entanto, quando a carga aplicada atingir 550 kN, observa-se que o comportamento das vigas pelo modelo proposto é um pouco mais rígido do que o experimental, possivelmente atribuído à negligência do deslizamento relativo entre a laje de concreto e a viga de aço.

Figura 40 – Curva de equilíbrio da viga A ensaiada por Ayyub et al (1989).



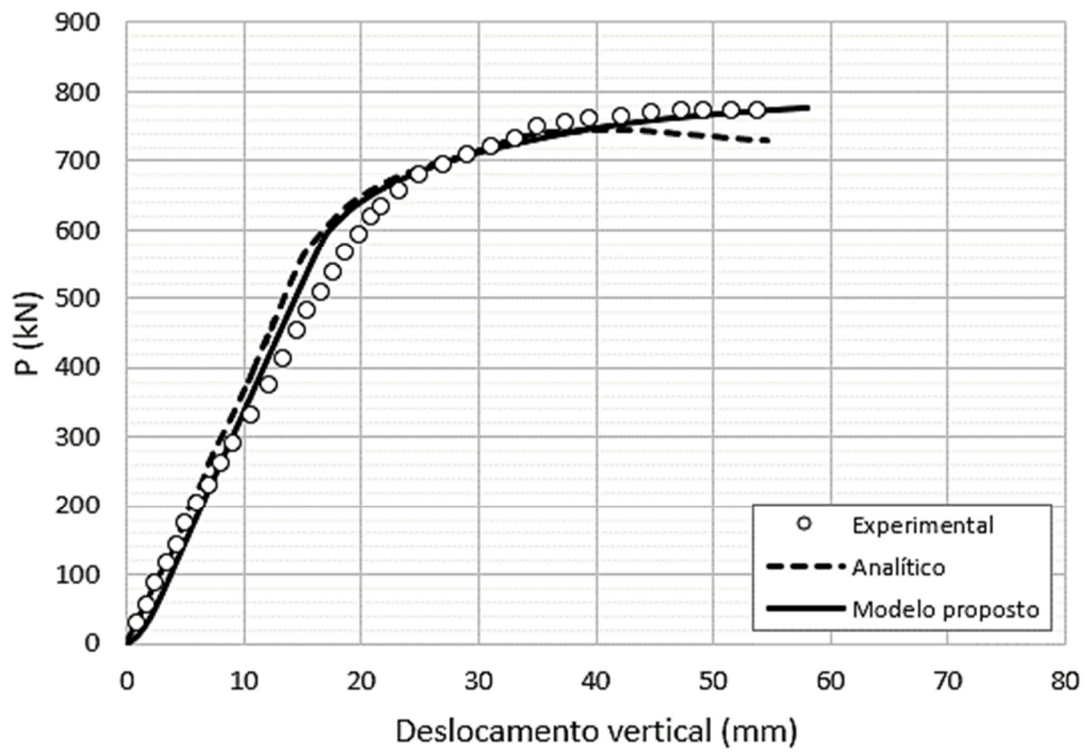
Fonte: Autoria própria (2017).

Figura 41 – Incremento de tensão no cabo da viga A ensaiada por Ayyub et al (1989).



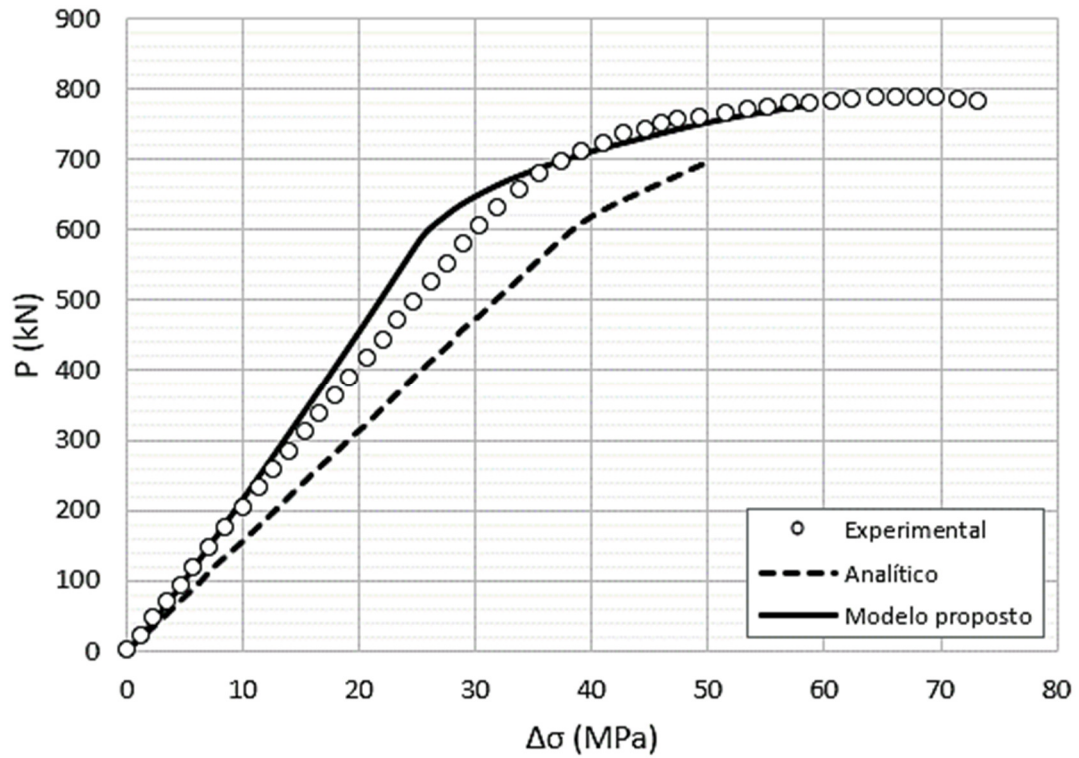
Fonte: Autoria própria (2017).

Figura 42 – Curva de equilíbrio da viga B ensaiada por Ayyub et al (1989).



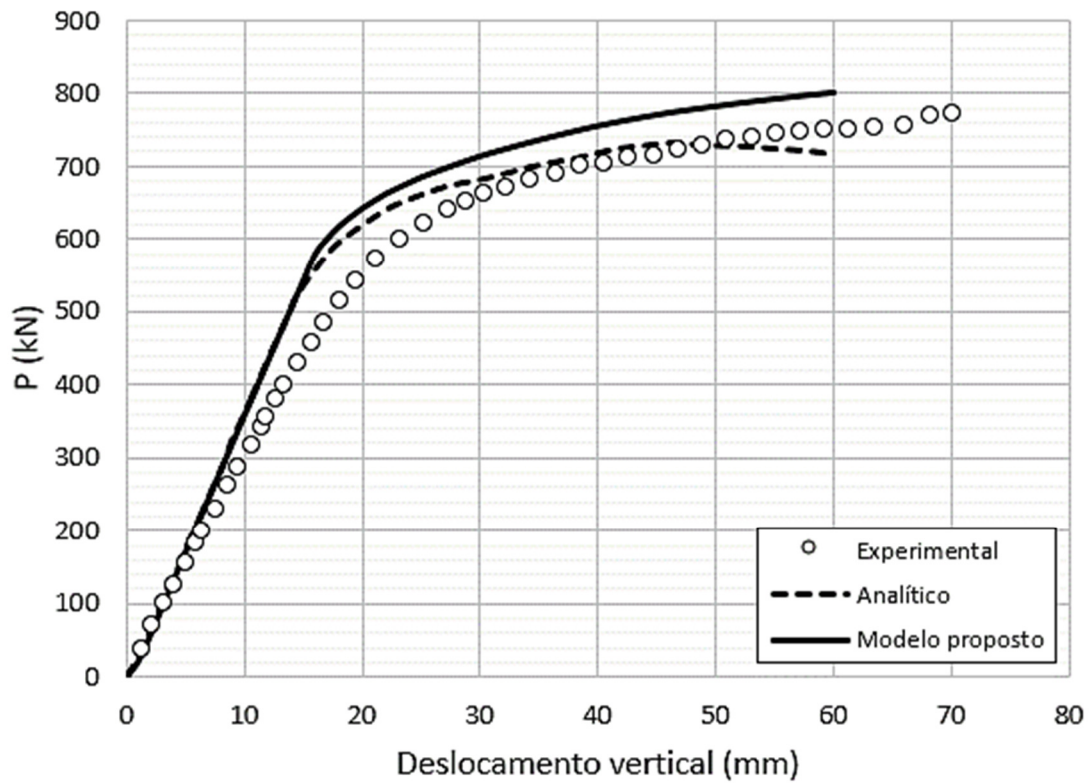
Fonte: Autoria própria (2017).

Figura 43 – Incremento de tensão no cabo da viga B ensaiada por Ayyub et al (1989).



Fonte: Autoria própria (2017).

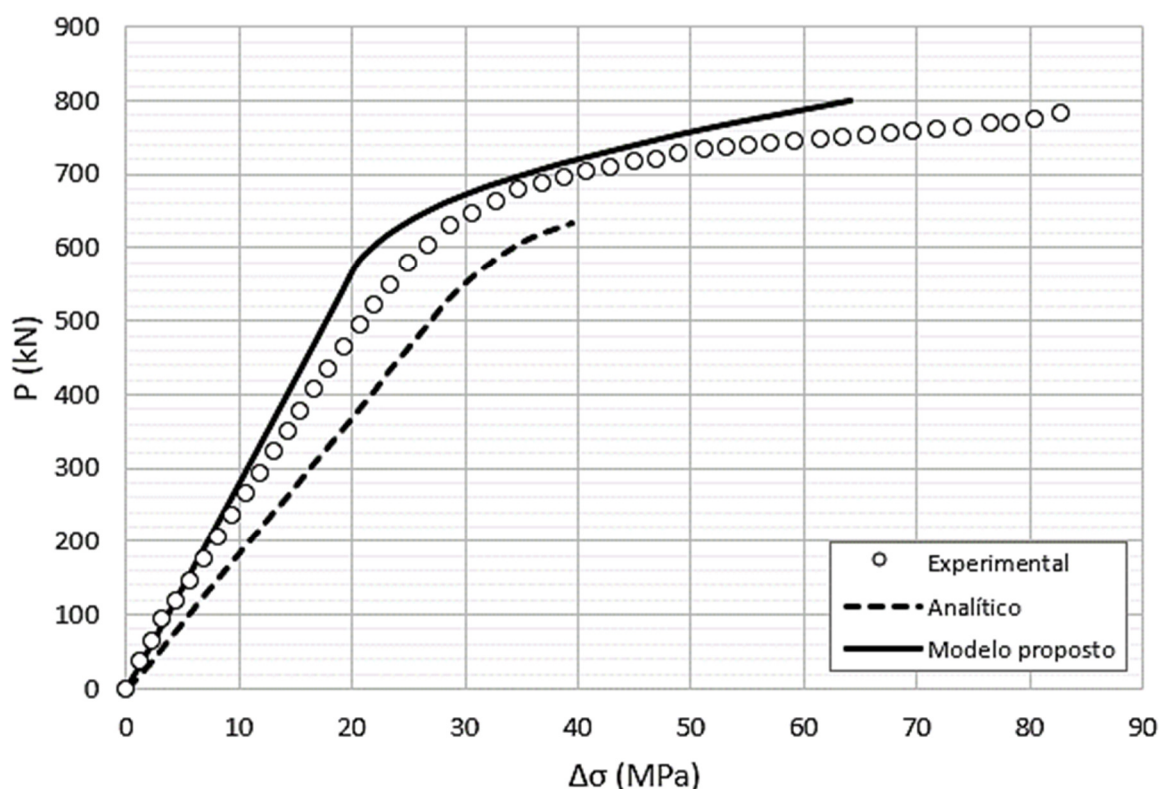
Figura 44 – Curva de equilíbrio da viga C ensaiada por Ayyub et al (1989).



Fonte: Autoria própria (2017).



Figura 45 – Incremento de tensão no cabo da viga C ensaiada por Ayyub et al (1989).

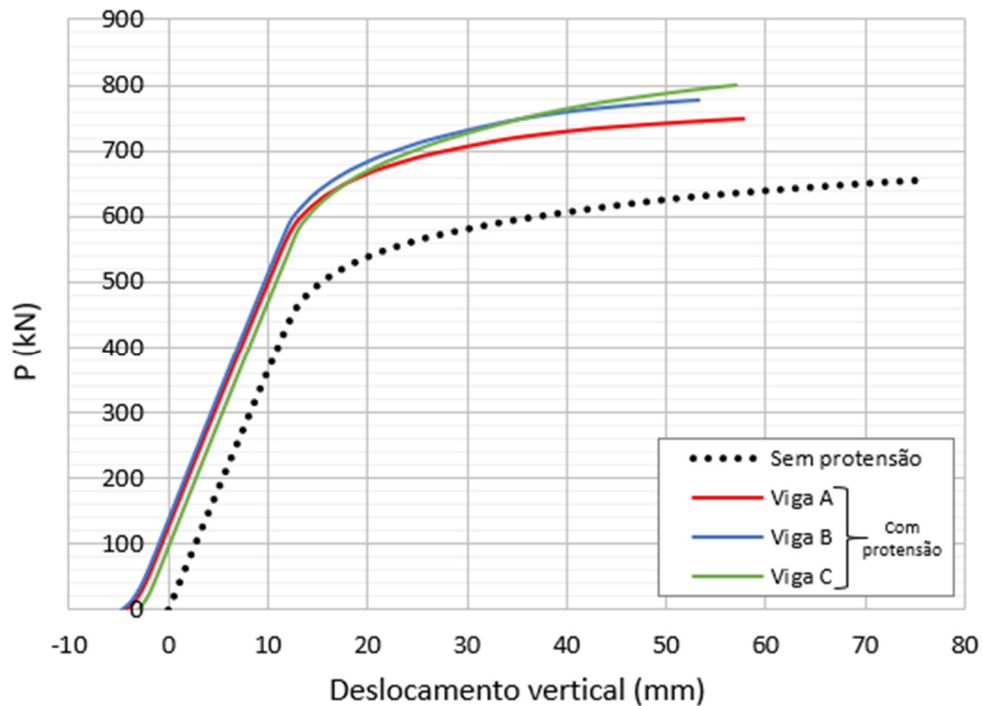


Fonte: Autoria própria (2017).

Em se tratando da relação incremento de tensão no cabo com a carga aplicada, observa-se para a viga A (Figura 41), que o aumento da carga proporciona uma leve redução da força do cabo prevista no modelo proposto quando comparada com os resultados obtidos pelos autores. Essa diferença pode ser justificada por considerar os coeficientes adimensionais K, Q e R os mesmos utilizados para o cabo de protensão, uma vez que a viga A é protendida por meio de barras. Para a viga B, Figura 43, a curva pelo modelo proposto mostra-se em boa concordância com o resultado experimental. Enquanto que, na análise proposta para viga C (Figura 45), a força no cabo de protensão aumenta de forma semelhante aos dados experimentais, mas leva a uma força no cabo significativamente maior ao final da análise, que pode ser atribuída as leis constitutivas adotadas para o cabo de protensão.

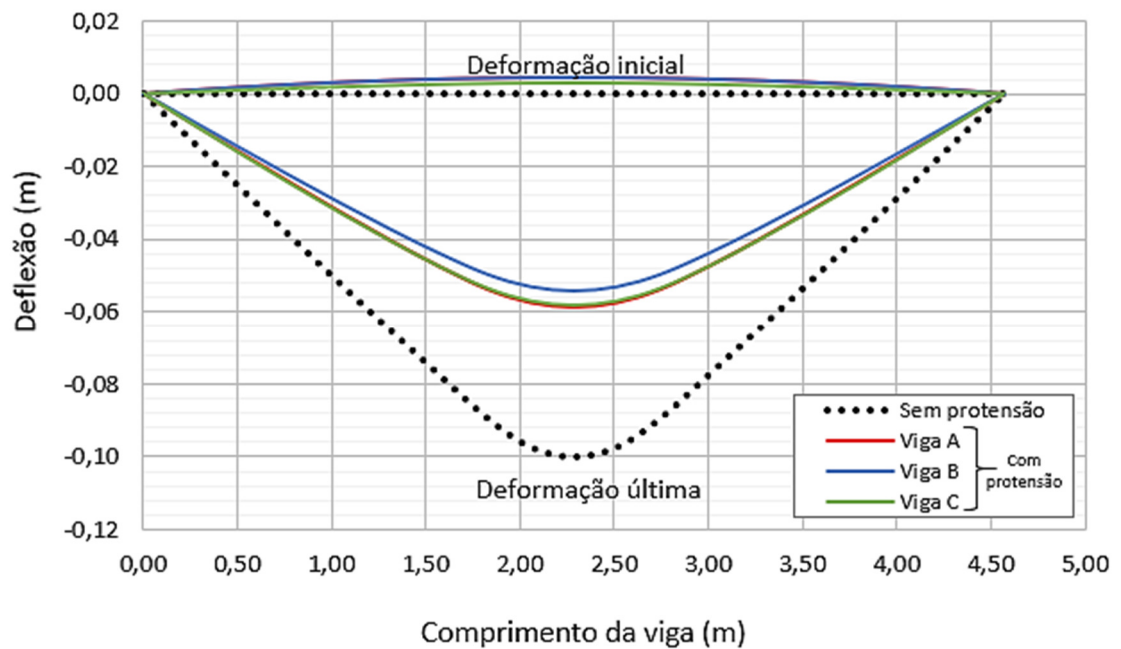
As Figuras 46 e 47, apresenta a comparação do comportamento estrutural entre as três vigas analisadas por Ayyub et al (1989). Observa-se que o perfil poligonal do cabo de protensão na viga C, oferece maior rigidez no seu comportamento final, ainda que a força de protensão inicial aplicada à viga B (289 kN) seja superior à aplicada na viga A (267 kN). Fica evidente também, que a protensão em cabo é mais eficiente que a protensão em barra e que a força de protensão inicial está diretamente relacionada com a deflexão da estrutura.

Figura 46 – Comparação do comportamento das vigas analisadas por Ayyub et al (1989) considerando dois estágios: sem protensão e com protensão externa.



Fonte: Autoria própria (2017).

Figura 47 – Configuração deformada para as vigas ensaiada por Ayyub et al (1989).



Fonte: Autoria própria (2017).

### 5.3 Vigas bi apoiadas (Chen e Gu, 2005)

A análise experimental de Chen e Gu (2005) foi realizada em duas vigas mistas de aço e concreto afim de estudar o momento final e o esforço incremental do cabo de protensão externo quando submetido a um momento positivo. A viga BS1 foi testada em dois estágios: no primeiro estágio, marcado pela ausência de protensão, a viga foi carregada e verificado o comportamento não linear na curva de deformação de carga; no segundo estágio, a viga foi protendida e em seguida carregada até a falha. A viga BS2, selecionada para verificar o modelo proposto, trata-se de uma estrutura mista protendida.

O comprimento total das vigas foi de 5150 mm e foi suportado em uma extensão simples de 5000 mm. As seções transversais de ambas as vigas são idênticas e constituídas por: laje de concreto ( $f_c = 41$  MPa,  $f_t = 3$  MPa e  $E_c = 36,0$  GPa), reforçada com 8 barras de  $8\phi$  distribuídas em duas direções ortogonais; o perfil de aço, que apresentam resistência a tração ( $f_y$ ) na mesa de 327,2 MPa e na alma de 406,5 MPa e alongamento do aço, respectivamente iguais a 24% e 28%; e dois cabos de protensão de alta resistência  $7\phi 5$ , com seção transversal de 274,8 mm<sup>2</sup>, localizado a 30 mm acima da superfície inferior da mesa. A Figura 48 mostra a seção transversal e a elevação da estrutura, e as dimensões são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Dimensões geométricas das vigas ensaiadas por Chen e Gu.

Viga	$B_c$	$h_c$	$b_{top}$	$t_{top}$	$h_w$	$t_w$	$h_{bot}$	$t_{bot}$	$h_e$
BS1 BS2	1100	90	120	10	250	6	120	10	57

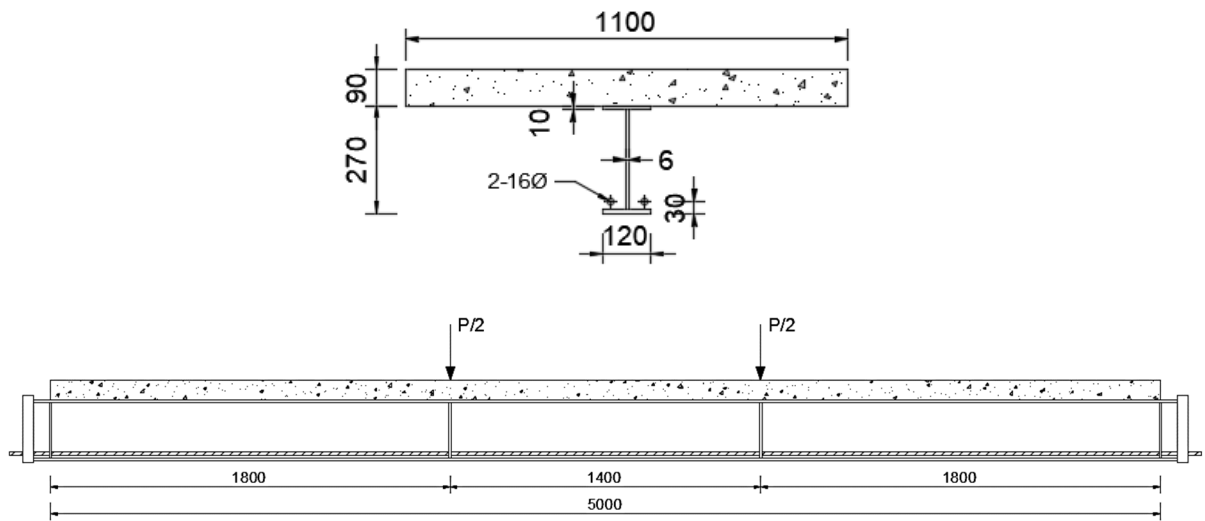
Fonte: CHEN E GU (2005).

Na idealização do elemento finito, os três intervalos da viga são divididos em 6 elementos e o elemento de cabos de protensão são divididos em 18 segmentos correspondentes. A seção composta de aço e concreto é dividida em 4 camadas de concreto e 10 camadas de aço.

A protensão, para o segundo estágio da viga BS1, foi realizada com uma força inicial de 107,6 kN em cada cabo de protensão. Já a viga BS2, foi protendida com uma força inicial foi de 112,6 kN, ligeiramente superior ao ensaio da viga BS1 no estágio 2. Os autores justifica que essa pequena diferença na força de protensão inicial, é decorrente do alongamento de retorno das roscas após a liberação do macaco hidráulico e dos erros de dimensão nas duas vigas.

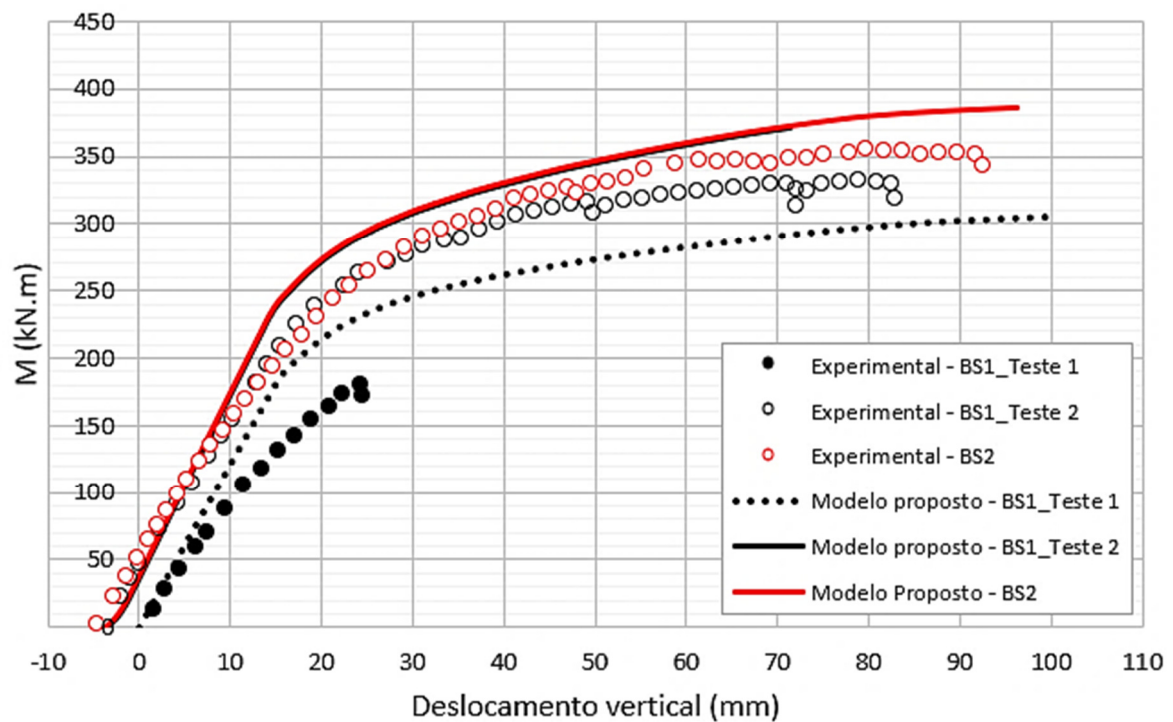


Figura 48 – Detalhamento da seção transversal e elevação das vigas BS1 e BS2 ensaiadas por Chen e Gu (2005).



Fonte: Autoria própria (2017).

Figura 49 – Curva de equilíbrio das vigas BS1 e BS2 ensaiada por Chen e Gu (2005).



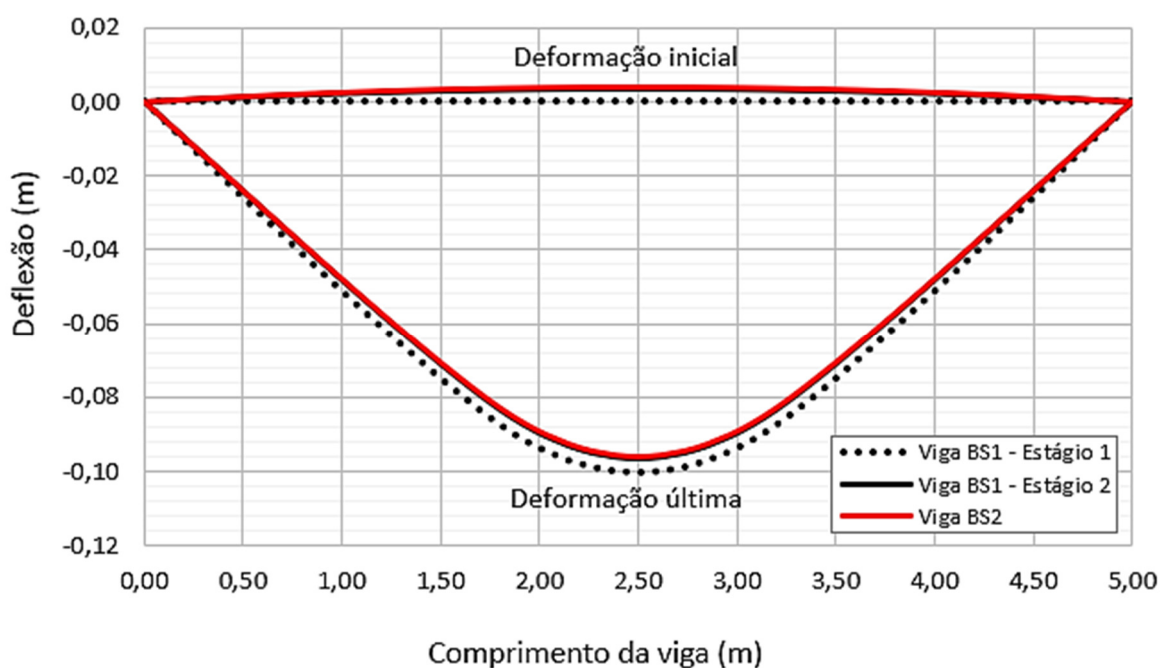
Fonte: Autoria própria (2017).

A Figura 49 mostra uma comparação entre análise do modelo proposto e os resultados experimentais relativos à resposta de momento-deslocamento para os dois estágios da viga BS1 e para a viga BS2. Observa-se que a análise de ambas as vigas capta bem a tendência da evolução da deformação, no entanto, para o estágio 1 da viga BS1, é verificado

alguma discrepância em relação ao momento final. Como foi dito pelos próprios autores, as vigas deveriam possuir a mesma seção transversal, porém, foram encontrados erros nas dimensões geométricas das vigas. Isso explica o fato do modelo proposto ter apresentado um comportamento mais rígido. Nota-se também, que as vigas BS1 e BS2, diferentemente dos resultados obtidos por Chen e Gu (2005), possuem suas curvas de equilíbrio quase coincidentes, o que é esperado, uma vez que as forças de protensões iniciais são bem aproximadas.

A configuração deformada para as vigas BS1 e BS2 podem ser vistas na figura a seguir.

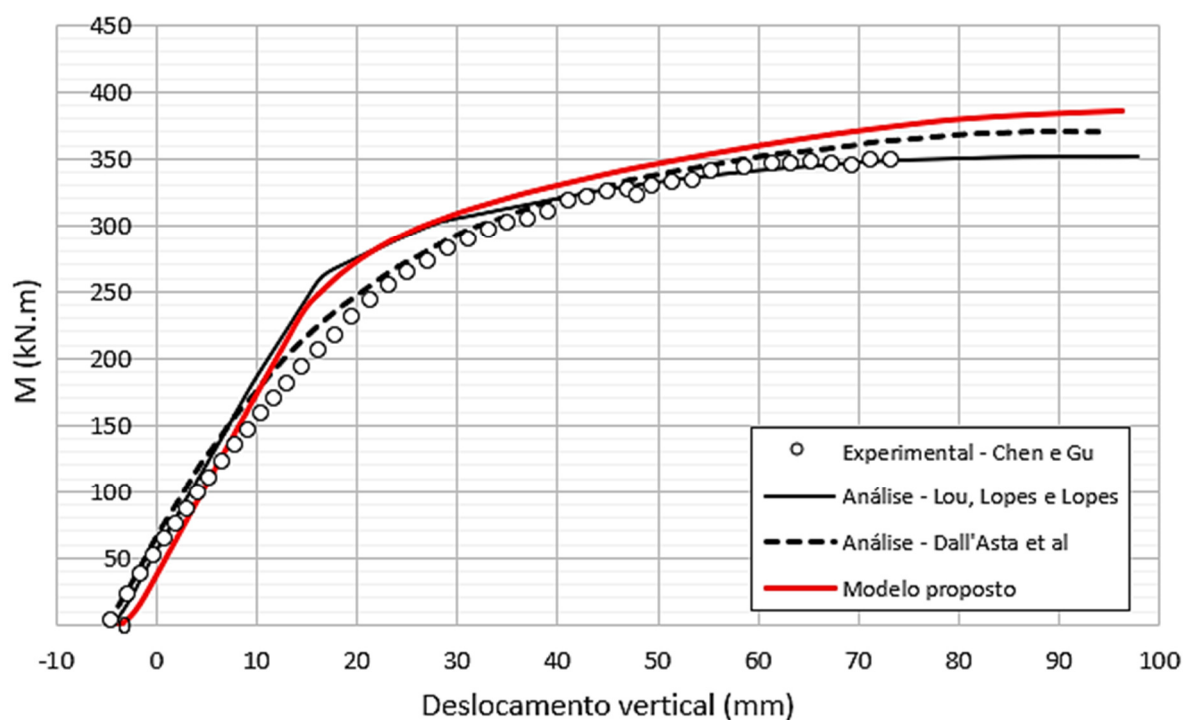
Figura 50 – Configuração deformada para as vigas ensaiada por Chen e Gu (2005).



Fonte: Autoria própria (2017).

A viga BS2 protendida com cabos externos retos, sem desviadores ao longo do seu comprimento, foi também utilizada no estudo de Dall'Asta, Ragni e Zona (2006) e Lou, Lopes e Lopes (2016). No gráfico a seguir (Figura 51) consta os resultados obtidos pelo modelo proposto em comparação com as análises feitas pelos autores supracitados e os resultados experimentais.

Figura 51 – Curva de equilíbrio da viga BS2 ensaiada por Chen e Gu (2005) e comparada com resultados numéricos de outros autores.



Fonte: Autoria própria (2017).

Embora que os resultados numéricos tenham sido ligeiramente mais rígidos que os resultados obtidos em laboratório, e apresentarem os momentos finais com uma pequena variação, as respostas para o comportamento da viga BS2 quando submetida a falha, foram em geral satisfatórias, evidenciando uma boa concordância.

## 6 CONCLUSÃO

Os estudos iniciais demonstraram a viabilidade e levantaram algumas vantagens da técnica de protensão aplicadas a vigas mistas, que propicia um aproveitamento das características positivas de cada material: perfil metálico, concreto e aço de protensão.

É fato que o tipo de viga mista a ser analisada constitui um sistema estrutural já consolidado com comportamento bem definido. No entanto, verifica-se a importância de estudos referentes a análises numéricas que reproduza satisfatoriamente o comportamento de vigas mistas de aço e concreto protendidas. Assim, o presente trabalho apresentou um modelo de elementos finitos para a análise não linear física e geométrica de vigas mistas de aço e concreto com protensão externa, a partir da modelagem do cabo de protensão de alta resistência acoplado ao elemento de viga.

Foram analisadas sete vigas mistas de aço e concreto com protensão externa, para a verificação do modelo de elementos finitos desenvolvido neste trabalho. A eficiência do modelo proposto foi comprovada, a partir da boa aproximação com os resultados experimentais de Saadatmanesh, Albrecht e Ayyub (1989), Ayyub, Sohn e Saadatmanesh (1990) e Chen e Gu (2005), como também de resultados numéricos de Dall'Asta, Ragni e Zona (2006) e Lou, Lopes e Lopes (2016), disponíveis na literatura.

Os resultados confirmam que a protensão externa pode melhorar significativamente o comportamento de vigas mistas, isto é, um aumento substancial no rendimento e cargas finais, bem como uma redução na deformação da estrutura.

Como sugestão para trabalhos futuros, tem-se que o modelo apresentado pode ser ainda ampliado para análise de vigas mistas protendidas ao longo do tempo, bem como incluir a possibilidade de considerar a interação parcial entre a laje de concreto e perfil de aço, componentes da viga mista.

## REFERÊNCIAS

- AYYUB, B. M.; SOHN, Y. G.; SAADATMANESH, H. Prestressed composite girders under positive moment. **Journal of Structural Engineering**. v. 166, p. 2931-2951, 1990.
- CHAVES, I. A. **Viga mista de aço e concreto constituída por perfil formado a frio preenchido**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- CHEN, S. Experimental study of prestressed steel-concrete composite beams with external tendons for negative moments. **Journal of Constructional Steel Research**. v. 61, p. 1613-1630, 2005.
- CHEN, S.; JIA, Y. Numerical investigation of inelastic buckling of steel-concrete composite beams prestressed with external tendons. **Thin-Walled Structures**. v. 48, p. 233-242, 2010.
- CHEN, S.; WANG, X.; JIA, Y. A comparative study of continuous steel-concrete composite beams prestressed with external tendons: Experimental investigation. **Journal of Constructional Steel Research**. v. 65, p. 1480-1489, 2009.
- COELHO, R. A. **A interface entre perfis estruturais laminados e sistemas complementares**. São Paulo: Açominas, 2005. 40 p. (Coletânea do Uso do Aço).
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M.E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 3.ed. Ed. Jonh Wiley & Sons, Inc., 1989.
- DALL'ASTA, A. D.; DEZI, L. Nonlinear behavior of externally prestressed composite beams: Analytical model. **Journal of Structural Engineering**. v. 124, p. 588-597, 1998.
- DALL'ASTA, A. D.; ZONA, A. Finite element model for externally prestressed composite beams with deformable connection. **Journal of Structural Engineering**. v. 131, p. 706-714, 2005.
- FERREIRA, A. C. **Vigas metálicas protendidas: Análise estática, modal e de ruptura do cabo de protensão e aplicativo computacional para projeto**. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade de Brasília, Brasília, 2007.
- KIM, K.S.; LEE, D. H.; CHOI, S. M.; CHOI, Y. H.; JUNG, S. H. Flexural behavior of prestressed composite beams with corrugated web: Part I. Development and analysis. **Composites: Part B**. v. 42, p. 1603-1616, 2011.
- KOTINDA, T. I. **Modelagem numérica de vigas mistas aço-concreto simplesmente apoiadas: ênfase ao estudo da interface laje-viga**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- LEONHARDT, F. **Construções de concreto: Concreto Protendido**. v. 5. Rio de Janeiro: Interciência, 1983.
- LIN, T. Y.; BURNS, A. P.. **Design of prestressed concrete structures**. 3. ed. Ed. Jonh Wiley & Sons, Inc., 1982.

LOU, T.; LOPES, S. M. R.; LOPES, A. V. Interaction between time-dependent and second-order effects of externally posttensioned members. **Journal of Bridge Engineering**. v. 20, p. 1-8, 2015.

\_\_\_\_\_. Numerical modeling of externally prestressed steel-concrete composite beams. **Journal of Constructional Steel Research**. v. 121, p. 229-236, 2016.

LORENCE, W.; KUBICA, E. Behavior of composite beams prestressed with external tendons: Experimental study. **Journal of Constructional Steel Research**. v. 62, p. 1353-1366, 2006.

MOREIRA, L. S. **Análise não linear via elementos finitos de vigas de concreto com protensão não aderente**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

NELSEN, A. C. H. **Comportamento estrutural de vigas mistas de aço e concreto com proteção externa**. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

NIE, J; TAO, M.; CAI, C. S.; LI, S.. Analytical and numerical modeling of prestressed continuous steel-concrete composite beams. **Journal of Structural Engineering**. v. 137, p. 1405-1418, 2011.

OEHLERS, D. J.; BRADFORD, M. A.. **Composite steel and concrete structural members**. 5.ed. Ed. Pergamon, 1995.

SAADATMANESH, H.; ALBRECHT, P.; AYYUB, B. M. Experiment study of prestressed composite beams. **Journal of Structural Engineering**. v. 115, p. 2348-2363, 1989.

SILVA, M. C. B.. **Construção de edificações multiandares em aço**. Departamento de Artes e Arquitetura, PUC Goiânia, 2010. Disponível em: < <http://www.metalica.com.br/construcao-de-edificacoes-multiandares-em-aco> > Acessado dia 18 de maio de 2016.

SOUSA JR, J. B. M.; OLIVEIRA, C. E. M.; SILVA, A. R. Displacement-based nonlinear finite element analysis of composite beam-columns with partial interaction. **Journal of Constructional Steel Research**. v. 66, p. 772-779, 2010.

VERÍSSIMO, G. S.; CÉSAR JR, K. M. L. **Concreto Protendido: Fundamentos Básicos**. 4 ed. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 1998, 78 p. Apostila.

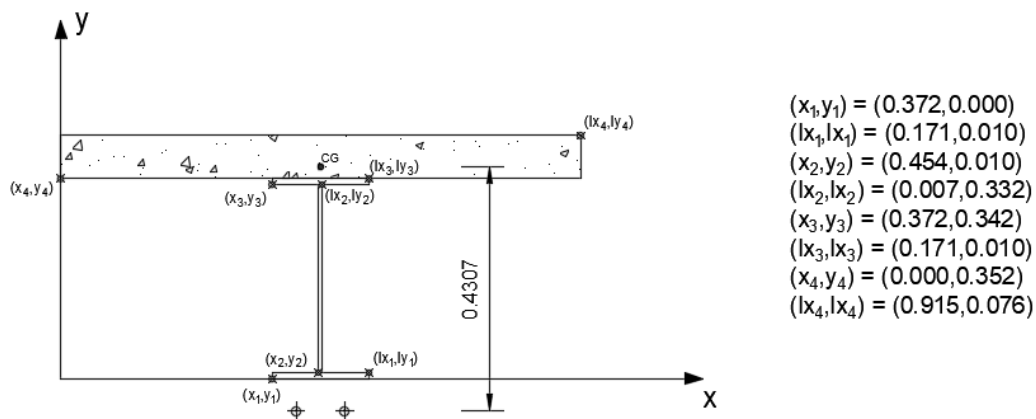
ZONA, A.; RAGNI, L.; DALL'ASTA, A. D. Simplified method for the analysis of externally prestressed steel-concrete composite beams. **Journal of Constructional Steel Research**. v. 65, p. 308-313, 2009.

## APÊNDICE A – Dados de entrada para a análise de viga mista protendida submetida a momento positivo

```
% =====
% ExemploVigaSAA1989BA.m - Dados de entrada para o programa de elementos
% finitos de viga mista de aço e concreto protendida, baseado na teoria de
% vigas de Navier-Euler-Bernoulli.
% =====
% Criado:      20-Out-2012   Evandro Parente Junior
%              Criado a partir do programa BarraElmLinearMRD.
%
% Modificado:  31-Mar-2015   Leandro Soares Moreira
%              Adaptação para o elemento de viga de concreto armado.
%              21-Set-2016   Michelle Vieira Xavier de Oliveira
%              Adaptação para o elemento de viga mista sob interação total.
% =====
```

```
% Nome do exemplo
```

```
global Exemplo; Exemplo = 'VigaSAA1989BA';
```



```
% Dados da seção de viga mista protendida
```

```
%-----
% retng - Lista de seções retangulares [x y lx ly n sg imatprop]
%-----
% x - coordenada x do ponto inferior esquerda do retângulo
% y - coordenada y do ponto inferior esquerda do retângulo
% lx - distância x do retângulo
% ly - distância y do retângulo
% n - número de fatias para integração
% sg -
% imatprop - especifica a linha da matriz matprop que representa o material
% de cada retângulo. Pode haver o mesmo material com propriedades
% diferentes.
%-----
```

```
global retng; retng(:, :, 1) = [0.372 0.000 0.171 0.010 1 1 1;
                                0.454 0.010 0.007 0.332 8 1 1;
                                0.372 0.342 0.171 0.010 1 1 1;
                                0.000 0.352 0.915 0.076 4 1 2];
```

```
%-----
% matprop - Propriedades dos materiais da seção transversal [curva dados]
%-----
% Linear      = [1 Et 0 0 0 0 0 0 0];
% NBR         = [2 fc fct 0 0 0 0 0 0];
% Eurocode    = [3 Fm eps1 Ecm 0 0 0 0 0];
% EuroCEB     = [4 Fm eps1 Ecm fct Eci Ex ey rho];
```

```

% EuroTr      = [5      0      0      0      0      0      0      0      0];
% Saje        = [6      Fm      epsu      epsl      epsr      epsm      0      0      0];
% CEB         = [7      Fm      epsl      Eci      ecu      0      0      0      0];
% Hognestad   = [8      fc      Ec      eu      ft      0      0      0      0];
% Carreira    = [9      fc      ecl      ecu      Ec0      fct      ect      etu      0];
% Elastoplastico = [10     Fy      Es      Esh      eu      fu      0      0      0];
%-----
global matprop; matprop = [10  367.0e6  200e9  3.0e9  24.0e-2  0  0  0  0;
                           8    33.4e6   36e9  3.3e-3    3e6  0  0  0  0];
%-----
% aco - Propriedades do aço (armadura passiva) [curva dados]
%-----
% ElasstPlastPerf = [1  Fy  Es  eu  0  0  0];
% Bilinear        = [2  Fy  Es  Esh eu  0  0];
% Trilinear       = [3  Fy  Es  Esh esh eu  0];
%-----
global aco; aco = [2  0  0  0  0
                  2  0  0  0  0];

% pay - Ordenadas no sistema global das barras de aço

global pay; pay(:, :, 1) = [0;
                           0];

% As - Área das barras de aço

global As; As(:, :, 1) = [1  0;
                          2  0];
%-----
% acop - Propriedades do aço de protensão (armadura ativa) [curva dados]
%-----
% Menegotto = [1 fpy Ep fpu epu K Q R]
% Bilinear   = [2 fpy Ep fpu epu]
%-----
global acop; acop = [1  910e6  195e9  1090e6  9.7e-2  1.0618  0.01174  7.344];

% Ap - Área do cabo de protensão

global Ap; Ap = 3.61e-04;

% sigpe - Tensão de protensão efetiva

F = 98e3;
global sigpe; sigpe = F/Ap;

%% Dados dos elementos finitos

% Quad - Quadratura de Gauss (1) ou Lobatto (2)

global Quad; Quad = 1;

% np - Número de pontos de integração

global np; np = 3;

% No - [nº do elemento  posição  Verificar  excentricidade do cabo]

global No; No = [1  0.0000  0  -0.4307;
                 2  0.2614  0  0;
                 3  0.5229  0  0;
                 4  0.7843  0  0;
                 5  1.0457  0  0;
                 6  1.3071  0  0;
                 7  1.5686  0  0;
                 8  1.8300  0  0;
                 9  2.0588  0  0];

```



```

10  2.2875  0  0;
11  2.5163  0  0;
12  2.7450  0  0;
13  3.0064  0  0;
14  3.2679  0  0;
15  3.5293  0  0;
16  3.7907  0  0;
17  4.0521  0  0;
18  4.3136  0  0;
19  4.5750  0 -0.4307];

% Elmv - elemento de viga [n° do elemento  secao  no1  no2]]

global Elmv; Elmv = [1  1  1  2;
2  1  2  3;
3  1  3  4;
4  1  4  5;
5  1  5  6;
6  1  6  7;
7  1  7  8;
8  1  8  9;
9  1  9  10;
10 1  10 11;
11 1  11 12;
12 1  12 13;
13 1  13 14;
14 1  14 15;
15 1  15 16;
16 1  16 17;
17 1  17 18;
18 1  18 19];

% Elmc - elemento do cabo de protensão [n° do elemento  no1  no2]

global Elmc; Elmc = [1  1  19];

% Sup - definição dos apoios

global Sup; Sup = [1  1  1  0;
19 0  1  0];

% Fno - Forças nodais

global Fno; Fno = [8  0.0 -0.5e3  0.0;
12 0.0 -0.5e3  0.0];

%-----
% Parâmetros para o processo de iterações
%-----
global nstep; nstep = 100;      % Números de incrementos de deslocamentos
global duj; duj = -1e-3;      % Incremento de deslocamento por passo
global noj; noj = 10;         % Nó a ser controlado
global glnj; glnj = 2;        % gl do nó j a ser controlado

global ITMAX; ITMAX = 50;
global Tol; Tol = 10^-5;

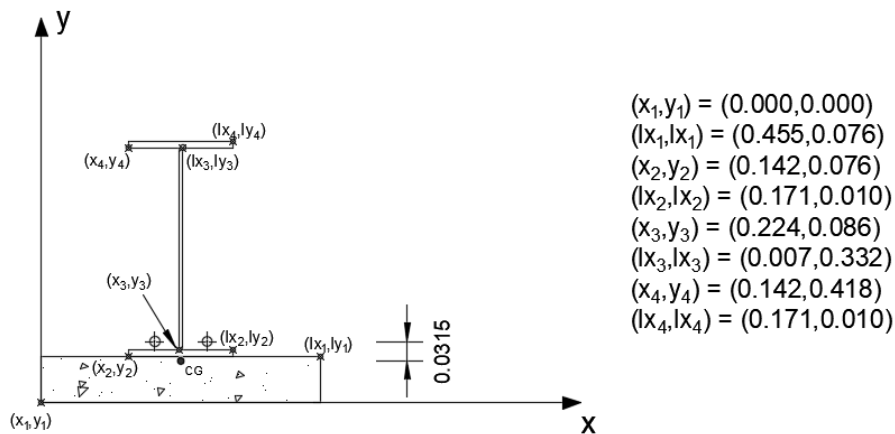
```

## APÊNDICE B – Dados de entrada para a análise de viga mista protendida submetida a momento negativo

```
% =====
% ExemploVigaSAA1989BB.m - Dados de entrada para o programa de elementos
% finitos de viga mista de aço e concreto protendida, baseado na teoria de
% vigas de Navier-Euler-Bernoulli.
% =====
% Criado:      20-Out-2012    Evandro Parente Junior
%              Criado a partir do programa BarraElmLinearMRD.
%
% Modificado:  31-Mar-2015    Leandro Soares Moreira
%              Adaptação para o elemento de viga de concreto armado.
%              21-Set-2016    Michelle Vieira Xavier de Oliveira
%              Adaptação para o elemento de viga mista sob interação total.
% =====

%% Nome do exemplo

global Exemplo; Exemplo = 'VigaSAA1989BB';
```



```
(x1,y1) = (0.000,0.000)
(lx1,lx1) = (0.455,0.076)
(x2,y2) = (0.142,0.076)
(lx2,lx2) = (0.171,0.010)
(x3,y3) = (0.224,0.086)
(lx3,lx3) = (0.007,0.332)
(x4,y4) = (0.142,0.418)
(lx4,lx4) = (0.171,0.010)
```

```
% Dados da seção de viga mista protendida

%-----
% retng - Lista de seções retangulares [xa ya lx ly n sg imatprop]
%-----
% xa - coordenada x do ponto inferior esquerda do retângulo
% ya - coordenada y do ponto inferior esquerda do retângulo
% lx - distância x do retângulo
% ly - distância y do retângulo
% n - número de fatias para integração
% sg -
% imatprop - especifica a linha da matriz matprop que representa o material
% de cada retângulo. Pode haver o mesmo material com propriedades
% diferentes.
%-----
global retng; retng(:, :, 1) = [0.000 0.000 0.455 0.076 4 1 2;
                                0.142 0.076 0.171 0.010 1 1 1;
                                0.224 0.086 0.007 0.332 8 1 1;
                                0.142 0.418 0.171 0.010 1 1 1];

%-----
% matprop - Propriedades dos materiais da seção transversal [curva dados]
%-----
% Linear      = [1  Et    0    0    0    0    0    0    0];
% NBR         = [2  fc   fct    0    0    0    0    0    0];
% Eurocode    = [3  Fm  epsl  Ecm    0    0    0    0    0];
```

```

% EuroCEB      = [4  Fm  epsl  Ecm  fct  Eci  Ex  ey  rho];
% EuroTr       = [5  0    0    0    0    0    0  0  0];
% Saje         = [6  Fm  epsu  epsl  epsr  epsm  0  0  0];
% CEB          = [7  Fm  epsl  Eci  ecu  0    0  0  0];
% Hognestad    = [8  fc   Ec   eu   ft   0    0  0  0];
% Carreira     = [9  fc   ec1  ecu  Ec0  fct  ect  etu  0];
% Elastoplastico = [10 Fy   Es   Esh  eu   fu   0    0  0];
%-----
global matprop; matprop = [10  379.0e6  200e9  3.0e9  26.0e-2  0  0  0  0;
                           8    32.4e6   36e9  3.3e-3   2.8e6  0  0  0  0];

%-----
% aco - Propriedades do aço (armadura passiva) [curva dados]
%-----
% ElasstPlastPerf = [1  Fy  Es  eu  0  0  0];
% Bilinear        = [2  Fy  Es  Esh eu  0  0];
% Trilinear       = [3  Fy  Es  Esh esh eu  0];
%-----
global aco; aco = [2  0  0  0  0
                  2  0  0  0  0];

% pay - Ordenadas no sistema global das barras de aço

global pay; pay(:, :, 1) = [0;
                           0];

% As - Área das barras de aço

global As; As(:, :, 1) = [1  0;
                          2  0];

%-----
% acop - Propriedades do aço de protensão (armadura ativa) [curva dados]
%-----
% Menegotto = [1 fpy Ep fpu epu K Q R]
% Bilinear   = [2 fpy Ep fpu epu]
%-----
global acop; acop = [1  910e6  195e9  1090e6  9.7e-2  1.0618  0.01174  7.344];

% Ap - Área do cabo de protensão

global Ap; Ap = 3.61e-04;

% sigpe - Tensão de protensão efetiva

F = 98e3;
global sigpe; sigpe = F/Ap;

%% Dados dos elementos finitos

% Quad - Quadratura de Gauss (1) ou Lobatto (2)

global Quad; Quad = 1;

% np - Número de pontos de integração

global np; np = 3;

% No - [n° do elemento posição Verificar excentricidade do cabo]

global No; No = [1  0.0000  0  0.0315;
                 2  0.2614  0  0;
                 3  0.5229  0  0;
                 4  0.7843  0  0;
                 5  1.0457  0  0;
                 6  1.3071  0  0;
                 7  1.5686  0  0;
                 8  1.8300  0  0];

```

```

9      2.0588  0  0;
10     2.2875  0  0;
11     2.5163  0  0;
12     2.7450  0  0;
13     3.0064  0  0;
14     3.2679  0  0;
15     3.5293  0  0;
16     3.7907  0  0;
17     4.0521  0  0;
18     4.3136  0  0;
19     4.5750  0  0.0315];

% Elmv - elemento de viga [n° do elemento  secao  no1  no2]]

global Elmv; Elmv = [1   1   1   2;
                    2   1   2   3;
                    3   1   3   4;
                    4   1   4   5;
                    5   1   5   6;
                    6   1   6   7;
                    7   1   7   8;
                    8   1   8   9;
                    9   1   9  10;
                   10   1  10  11;
                   11   1  11  12;
                   12   1  12  13;
                   13   1  13  14;
                   14   1  14  15;
                   15   1  15  16;
                   16   1  16  17;
                   17   1  17  18;
                   18   1  18  19];

% Elmc - elemento do cabo de protensão [n° do elemento  no1  no2]

global Elmc; Elmc = [1   1  19];

% Sup - definição dos apoios

global Sup; Sup = [1   1   1   0;
                  19  0   1   0];

% Fno - Forças nodais

global Fno; Fno = [8   0.0  -0.5e3  0.0;
                  12  0.0  -0.5e3  0.0];

%-----
% Parâmetros para o processo de iterações
%-----
global nstep; nstep = 100;      % Números de incrementos de deslocamentos
global duj; duj = -1e-3;      % Incremento de deslocamento por passo
global noj; noj = 10;         % Nó a ser controlado
global glnj; glnj = 2;        % gl do nó j a ser controlado

global ITMAX; ITMAX = 50;
global Tol; Tol = 10^-5;

```