

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Dissertação de Mestrado

**O Princípio de Concentração e
Compacidade e Aplicações**

Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira

Junho de 2001

Sumário

Introdução	4
1 Preliminares	8
1.1 Operadores não Lineares e Cálculo em Espaços de Banach	8
1.1.1 Continuidade e Limitação	8
1.1.2 A Integral de Bochner	10
1.1.3 Derivação em espaços de Banach	14
1.1.4 Os Operadores de Nemytskii	19
1.2 Os espaços de Sobolev	24
1.2.1 Derivação no sentido fraco	25
1.2.2 Definição e Propriedades Elementares dos Espaços de Sobolev	26
1.2.3 O Operador de Traço	28
1.2.4 Desigualdades de Sobolev	29
1.2.5 Os espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$	31
1.3 Alguns Resultados Não Standard em Análise Funcional	33
1.3.1 Compacidade Forte nos espaços L^p 's	34
1.3.2 Alguns resultados da Teoria da Medida	35
1.3.3 Métodos de Convergências Fracas	38
2 O Princípio de Concentração e Compacidade	46
2.1 O Teorema de Helly	46

<i>SUMÁRIO</i>	1
2.2 O Princípio Heurístico	52
2.3 O Lema de Concentração e Compacidade	56
2.4 Uma Aplicação do Lema de Concentração e Compacidade	63
3 Problemas de Minimização no $L^1(\mathbb{R}^N)$	72
4 Uma Extensão do Lema de Concentração e Compacidade	89
4.1 O Princípio de Concentração e Compacidade no $H^1(\mathbb{R}^N)$	89
4.2 Uma Aplicação do Lema (4.1)	94
5 O Segundo Princípio de Concentração e Compacidade	108
6 O Princípio de Concentração e Compacidade no Infinito	119
6.1 Preliminares	119
6.2 Concentração e Compacidade no Infinito	122
6.3 O Problema de Yamabe	125
7 Soluções Positivas de Equações Elípticas Não Lineares Envolvendo Expoentes Críticos de Sobolev	134
7.1 O Resultado de Não Existência de Pohozaev	135
7.2 O Teorema de Brezis-Nirenberg	137

Agradecimentos

Aos meus pais, Arthur e Clécia, pelo apoio e dedicação dados a mim, desde a época que eu era um estudante do maternal, até os dias de hoje.

A minha noiva, Kátiuscia, pelo amor e compreensão, nos dias em que porventura eu tenha dado mais atenção ao trabalho do que a ela.

Aos colegas do Departamento de Matemática da UFC, pela amizade.

E agradeço especialmente ao grupo de estudos em análise da U.F.C., representado pelo Professor Fábio Montenegro, Diego Moreira e Cleon Barros, pela amizade, leitura crítica e sugestões dadas durante a elaboração desta dissertação.

Dedico esta dissertação aos meus pais e principalmente ao meu irmão Ricardo, com a esperança de que um dia ele venha a ler este trabalho.

Introdução

Muitas questões em Física-Matemática ou em Geometria Diferencial envolvem problemas de minimização, onde seqüências minimizantes não são automaticamente compactas por argumentos *standard* de Análise Funcional. Tipicamente, a perda de compacidade é devida a invariância do domínio, por exemplo \mathbb{R}^n , por grupos não compactos de translações e dilatações; ou ainda pela perda de mergulhos compactos, muitas vezes pela não limitação do domínio ou por estarmos trabalhando com expoentes críticos.

O principal avanço para lidarmos com esta perda de compacidade foi obtido por *Lions, P. L.* em quatro célebres artigos:

- *The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, part 1 and part 2* [PL1] e [PL2]
- *The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case, part 1 and part 2* [PL3] e [PL4]

Os dois primeiros apresentam um método para resolvermos problemas de minimização em domínios não limitados. É derivada de um princípio heurístico a equivalência entre a compacidade de todas as seqüências minimizantes em uma condição de sub-ditividade. A prova é baseada no *Lema de Concentração e Compacidade*, o qual é obtido com a noção de funções de concentração de uma medida.

Os casos limites, estudados nos dois outros artigos, tratam de problemas que envolvem expoentes críticos de Sobolev. É utilizada uma robusta ferramenta da teoria da medida em sua prova.

Ambos os princípios são usados para examinar o comportamento de seqüências fracas convergentes em espaços de Sobolev, nas quais a perda de compacidade ocorre devido ao aparecimento de expoentes críticos ou devido a não limitação do domínio.

Estes trabalhos revolucionaram a pesquisa em Métodos Variacionais, e foram um dos mais importantes trabalhos do professor *Lions, P. L.*, que o levaram a ser agraciado com a condecoração máxima para um matemático: a *Medalha Fields*.

No primeiro capítulo desta Dissertação iremos apresentar algumas ferramentas matemáticas básicas para a leitura dos capítulos posteriores. Entre estes, apresentaremos alguns resultados sobre: Operadores não Lineares em Espaços de Banach, Espaços de Sobolev, Resultados não Standard em Análise Funcional. Neste último, temos a oportunidade de apresentar alguns resultados originais. Uma conjectura no âmbito de Análise Funcional é levantada, e estabelecemos um resultado que versa sobre uma desigualdade de convergências fracas em importantes espaços. No final, listamos algumas questões que ainda não conseguimos responder.

O segundo capítulo é destinado ao Primeiro Princípio de Concentração e Compacidade. Inicialmente, é feita toda a teoria necessária para a obtenção do *Teorema de Helly*, o qual é uma peça fundamental na prova do *Lema de Concentração e Compacidade*. Abordamos em seguida o princípio heurístico do método; mostrando como devemos aplicar o *Lema de Concentração e Compacidade*. Provamos o *Lema de Concentração e Compacidade* na terceira seção deste capítulo. Em seguida apresentamos uma aplicação do método para a solução de uma E.D.P. modelada no \mathbb{R}^n .

Uma robusta aplicação do *Lema de Concentração e Compacidade* é apresentada do terceiro capítulo para o estudo de um problema de minimização no $L^1(\mathbb{R}^n)$. Esta

aplicação modela um problema em Astrofísica e em Mecânica quântica.

O quarto capítulo apresenta uma extensão do *Lema de Concentração e Compacidade* para espaços que admitem derivadas fracas, por exemplo o $H^1(\mathbb{R}^n)$. É uma espécie de versão suave do *Lema de Concentração e Compacidade*. A prova é estabelecida em suavizarmos as funções características de abertos do \mathbb{R}^n , utilizando as funções fornecidas pela partição da unidade. Em seguida, resolvemos uma equação de Schrödinger não linear, definida no \mathbb{R}^n .

O segundo Princípio de Concentração e Compacidade, utilizado na abordagem de problemas que envolvem expoentes críticos, é apresentado no quinto capítulo. Como aplicação, resolvemos o problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \beta |u|^{q-2} u, & \beta > 0, \quad p > 1, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

No sexto capítulo apresentamos uma extensão do segundo Princípio de Concentração e Compacidade, conhecido como: *Princípio de Concentração e Compacidade no Infinito*, que fornece informações da possível perda de massa das medidas, fornecidas pelo segundo Princípio de Concentração e Compacidade, no infinito. Como aplicação resolvemos o *Problema de Yamabe*, que possui o seu significado no âmbito da Geometria Diferencial.

O sétimo capítulo é destinado ao estudo da primeira parte do artigo devida a Brezis – Nirenberg: *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents* [BrN]. Apresentamos o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u & = & \lambda u + u|u|^{2^*-2}, & \text{em } \Omega \\ u & > & 0, & \text{em } \Omega \\ u & = & 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

estudado por Brezis-Nirenberg, no artigo acima citado, utilizando uma visão privilegiada de alguém que já tem conhecimento do *Princípio de Concentração e Compacidade*; ferramenta esta desconhecida pelos autores na elaboração deste artigo; apesar

do "gérmen" do Princípio de Concentração e Compacidade pairar neste trabalho, como pode ser observado na referência [21] listada neste artigo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Operadores não Lineares e Cálculo em Espaços de Banach

Nesta seção iremos discutir alguns dos vários resultados sobre Análise Funcional não Linear, utilizados direta ou indiretamente em todos os capítulos posteriores.

1.1.1 Continuidade e Limitação

Definição 1.1 *Sejam \mathbb{E} e \mathbb{F} dois espaços de Banach. Uma aplicação $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ é dita ser contínua (fortemente contínua), se para toda seqüência $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{E}$ convergente, digamos, $x_n \rightarrow x$, tivermos que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ em \mathbb{F} .*

Uma aplicação $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ é dita ser uniformemente contínua se para cada $\varepsilon > 0$ dado; existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$\|x - y\|_{\mathbb{E}} < \delta \quad \implies \quad \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{F}} < \varepsilon.$$

Observemos que *continuidade uniforme* implica em *continuidade*, contudo a recíproca é falsa, mesmo entre espaços de dimensão finita e quando restrito a

qualquer conjunto compacto, a noção de *continuidade uniforme* e *continuidade* coincidem.

Definição 1.2 Dizemos que uma aplicação $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ é limitada, se para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{E}$ limitado, $f(A) \subseteq \mathbb{F}$ é um conjunto limitado.

É válido observar que no caso em que f é linear, a noção de *continuidade* e *limitação* coincidem, e no caso em que $\dim \mathbb{E} < \infty$, *continuidade* implica *limitação*.

O caso em que mais nos interessa, $\dim \mathbb{E} = \infty$, a última asserção não é válida, tendo em vista que, neste caso, \mathbb{E} não é localmente compacto. Contudo nós temos o seguinte resultado:

Proposição 1.3 Seja $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação uniformemente contínua. Então f é limitada.

Prova: Claramente, é suficiente mostrarmos que para todo $R > 0$, $f(B(R)) \subseteq \mathbb{F}$ é um conjunto limitado, onde $B(R) = \{x \in \mathbb{E} : \|x\|_{\mathbb{E}} < R\}$. Tomando $\varepsilon = 1$ é possível encontrarmos $\delta > 0$ tal que: $\|x - y\|_{\mathbb{E}} < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{F}} < 1, \forall x, y \in \mathbb{E}$. Escolhemos um $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $n\delta > 2R$. Se $\xi \in B(R)$, existem n pontos $x_0 = \xi, x_1, x_2, \dots, x_n = 0$ com $\|x_i - x_{i-1}\|_{\mathbb{E}} < \delta$. Assim:

$$\|f(\xi) - f(0)\|_{\mathbb{F}} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\|_{\mathbb{F}} \leq (n-1)$$

\therefore

$$\|f(\xi)\|_{\mathbb{F}} \leq (n-1) + \|f(0)\|_{\mathbb{F}}$$

Como ξ foi tomado arbitrário, segue-se o teorema ■

Existem outras noções importantes de continuidade de funções definidas em espaços de Banach, tendo em vista várias topologias que podemos munir os mesmos. Entre elas destacamos:

1. **Aplicação seqüencialmente Fracamente Contínua:** $x_n \rightarrow x$ em $\mathcal{E} \implies f(x_n) \rightarrow f(x)$ em \mathcal{F}
2. **Aplicação Completamente Contínua:** $x_n \rightarrow x$ em $\mathcal{E} \implies f(x_n) \rightarrow f(x)$ em \mathcal{F}

É claro que se uma aplicação é *Completamente Contínua* então a mesma é *contínua* e *seqüencialmente Fracamente Contínua*. Estas outras noções de continuidade, tem se mostrado muito útil em diversos aspectos, inclusive para mostrar limitação de aplicações, como mostra a seguinte proposição:

Proposição 1.4 *Sejam \mathcal{E} e \mathcal{F} espaços de Banach com \mathcal{E} reflexivo. Se $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ é uma aplicação seqüencialmente fracamente contínua. Então f é limitada.*

Prova: Suponha por absurdo que f não seja limitada, então deve existir uma seqüência limitada $(x_n) \subseteq \mathcal{E}$ tal que $\|f(x_n)\|_{\mathcal{F}} \rightarrow \infty$. Pela reflexibilidade de \mathcal{E} , a menos de uma subseqüência, podemos assumir que $x_n \rightarrow x$. Por hipótese $f(x_n) \rightarrow f(x)$, o que contradiz a não limitação da seqüência $\{f(x_n)\}$ ■

1.1.2 A Integral de Bochner

O objetivo desta seção é definirmos a integral de uma função vetorial, definida em um espaço de medida, tomando valores em um espaço de Banach. Durante esta seção, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ será um espaço de medida e \mathcal{F} um espaço de Banach.

Definição 1.5 *Uma função $\psi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ será uma função escada se existirem conjuntos mensuráveis A_1, A_2, \dots, A_k , $\mu(A_j) < \infty$, $j = 1, 2, \dots, k$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ e vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq \mathcal{F}$ tais que $\psi = \sum_{j=1}^k v_j \cdot \chi_{A_j}$.*

Como estamos interessados em construir uma teoria de integração, se $\psi = \sum_{t=1}^k v_t \cdot \chi_{A_k}$ é uma função escada, devemos definir de forma natural

$$\int_{\Omega} \psi d\mu = \sum_{j=1}^k \mu(A_j) \cdot v_j$$

Claramente, saber integrar apenas funções escadas não nos é muito útil. Para isso devemos, como ocorre na teoria clássica e integração a Lebesgue, estender a noção integral para "funções mensuráveis". No nosso contexto somos levados a dar a seguinte definição.

Definição 1.6 Uma função $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$ é dita mensurável se existe uma seqüência de funções escada ψ_n tal que $\psi_n \rightarrow \psi$ q.t.p.¹

Deveremos dizer que uma função é integrável, se a mesma pode ser bem aproximada por funções escadas.

Definição 1.7 Dizemos que uma função $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{F}$ definida em um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tomando valores em um espaço de Banach \mathbb{F} é Bochner integrável se existir, uma seqüência de funções escada $(f_n)_{n \geq 1}$ com $f_n \rightarrow f$ q.t.p. tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f(t) - f_n(t)\| d\mu = 0$$

Para todo $A \in \mathcal{A}$, a Integral de Bochner de f em A é definida por:

$$\int_A f(t) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \chi_A(t) f_n(t) d\mu$$

Proposição 1.8 A Integral de Bochner está bem definida, isto é, o limite independe da seqüência de funções escada que aproxima a função.

¹Dizemos que ψ é fracamente mensurável se para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \circ \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável. O Teorema de Pettis nos garante que, quando \mathbb{F} é separável as duas noções são equivalentes.

Prova: Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência de funções escadas que aproxima f .

$$\begin{aligned} \left\| \int_A f_n d\mu - \int_A f_k d\mu \right\| &\leq \int_A \|f_n - f_k\| d\mu \\ &\leq \int_A \|f - f_k\| d\mu + \int_A \|f_n - f\| d\mu \leq \varepsilon \end{aligned}$$

se n e k são suficientemente grandes. Isto mostra que $\int_A f_n d\mu$ é uma seqüência de Cauchy em \mathbb{F} , e portanto convergente.

Ademais se e $(g_n)_{n \geq 1}$ é outra seqüência de funções escadas que aproximam f , temos:

$$\left\| \int_A g_n - f_n d\mu \right\| \leq \int_A \|f - f_n\| d\mu + \int_A \|g_n - f\| d\mu \leq \varepsilon$$

se n for tomado suficientemente grande. ■

A princípio é uma tarefa não trivial julgarmos se uma determinada aplicação é ou não *Bochner Integrável*. Contudo o próximo teorema viabiliza a teoria:

Teorema 1.9 (S. Bochner) : *Uma função mensurável $f : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$ é Bochner integravel se e somente se $\|f\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável*

Prova: Suponha que f seja Bochner integrável. Por definição deve existir uma seqüência de funções escada f_n tais que $f_n \rightarrow f$ q.t.p. e $\int \|f_n - f\| d\mu \rightarrow 0$.

$$\left| \int \|f_n\| - \int \|f_k\| \right| \leq \int \| \|f_n\| - \|f_k\| \| d\mu \leq \int \|f_n - f_k\| d\mu$$

logo a seqüência $\int \|f_n\|$ é de Cauchy. Assim $\|f_n\|$ converge em $L^1((\Omega, \mathcal{A}, \mu); \mathbb{R})$. Como $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$ q.t.p., segue-se que $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$ em $L^1((\Omega, \mathcal{A}, \mu); \mathbb{R})$. Donde $\|f\|$ é integrável.

Suponha agora que $\|f\|$ é integrável. Seja f_n uma seqüência de funções escada convergindo q.t.p. para f . Defina a seguinte seqüência de funções escada:

$$\zeta_n(t) = \begin{cases} f_n(t), & \text{se } \|f_n(t)\| \leq \|f(t)\| \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ 0, & \text{se } \|f_n(t)\| \geq \|f(t)\| \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

Desta forma: $\|\zeta_n(t)\| \leq \|f(t)\| \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ e $\zeta_n \rightarrow f$ q.t.p. pois, fixado $t \in \Omega$, para n suficientemente grande, $\zeta_n(t) = f_n(t)$, já que $\|f_n(t)\| \leq \|f\| \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Ademais vale a seguinte desigualdade: $\|\zeta_n - f\| \leq 2\|f\| \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Aplicando o *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue*, à seqüência $\|\zeta_n - f\|$ obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f - \zeta_n\| d\mu = 0$$

Assim, f é Bochner Integrável ■

Corolário 1.10 *Vale a desigualdade:*

$$\left\| \int_A f(t) d\mu \right\| \leq \int_A \|f(t)\| d\mu$$

e assim, $\int_A f(t) d\mu$ é absolutamente contínua, i.e., $\lim_{\mu(A) \rightarrow 0} \int_A f(t) d\mu = 0$.

Prova: Seja f_n uma seqüência de funções escada satisfazendo: $f_n \rightarrow f$ q.t.p. e $\int \|f_n - f\| d\mu \rightarrow 0$. Pela Desigualdade Triangular vale $\|\int f_n d\mu\| \leq \int \|f_n\| d\mu$. Ademais, como escólio do *Teorema de Bochner* podemos supor que $\int \|f_n\| d\mu \rightarrow \int \|f\| d\mu$. Aplicando o limite obtemos a desigualdade desejada ■

Corolário 1.11 *A Integral de Bochner é σ -aditiva, i.e. :*

$$\int_{\sum_{i=1}^{\infty} A_i} f(t) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f(t) d\mu$$

Prova: É claro que $\int_{\sum_{i=1}^k A_i} f(t) d\mu = \sum_{i=1}^k \int_{A_i} f(t) d\mu$. Seja $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, então:

$$\left\| \int_A f(t) d\mu - \int_{\sum_{i=1}^k A_i} f(t) d\mu \right\| = \left\| \int_{A \setminus \sum_{i=1}^k A_i} f(t) d\mu \right\| \leq \varepsilon$$

uma vez que $\mu(A \setminus \sum_{i=1}^k A_i) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ■

Corolário 1.12 *Seja $T : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ uma aplicação linear limitada entre dois espaços de Banach. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$ é Bochner Integrável, então $T \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ é Bochner Integrável e vale:*

$$\int_A T(f(t))d\mu = T \left(\int_A f(t)d\mu \right)$$

Prova: A integrabilidade de $T \circ f$ é consequência do fato que $\int_A \|T(f(t))\|d\mu \leq \|T\| \int_A \|f\|d\mu$ adicionado ao Teorema de Bochner.

Seja f_n uma seqüência de funções escada satisfazendo $f_n \rightarrow f$ e $\int_A \|f_n - f\|d\mu \rightarrow 0$.

$$\int_A \|T(f(t)) - T(f_n(t))\|d\mu \leq \|T\| \int_A \|f_n - f\|d\mu \rightarrow 0$$

Logo, por definição temos:

$$\begin{aligned} \int_A T \circ f d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B T \circ f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} T \left(\int_B f d\mu \right) \\ &= T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n d\mu \right) = T \left(\int_B f d\mu \right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.1.3 Derivação em espaços de Banach

Motivados pela definição de diferenciação em espaços euclidianos, somos levados a definir:

Definição 1.13 *Seja $f : U \subseteq \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação definida em um aberto $U \subseteq \mathbb{E}$. Dizemos que f é diferenciável no sentido de Fréchet (F-diferenciável), no ponto $\xi \in U$ se existir uma aplicação linear contínua $A(\xi) \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ tal que:*

$$f(\xi + h) = f(\xi) + A(\xi) \cdot h + r(h)$$

onde $r(h) = o(\|h\|)$, i.e., $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Neste caso, denotamos $A(\xi)$ por $Df(\xi)$ ou $f'(\xi)$. É de imediato constatar que: A aplicação $Df(\xi)$, quando existe, é única, e se f é F-diferenciável no ponto $\xi \in U$, a mesma é contíua neste ponto. Observemos ainda que a definição de

F-diferenciabilidade não depende das normas $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ e $\|\cdot\|_{\mathbb{F}}$, mas sim das topologias de $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ e $(\mathbb{F}, \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$. Ou seja, se mudarmos as normas $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ e $\|\cdot\|_{\mathbb{F}}$, por normas equivalente, a noção de F-diferenciabilidade não se altera.

As regras operacionais de diferenciação de aplicações entre espaços de Banach são as mesmas da teoria de derivação entre espaços euclidianos. As demonstrações são precisamente iguais ao casos onde os espaços tem dimensões finitas.

Proposição 1.14 *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{F}$, $f_1 : U \rightarrow \mathbb{F}$ e $g : f(U) \rightarrow \mathbb{B}$ funções diferenciáveis. Então:*

1. $D(f + \lambda f_1) = D(f) + \lambda D(f_1)$
2. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $D(f \cdot f_1)(\xi) \cdot (v) = D(f)(\xi) \cdot (v) f_1 + f(\xi) D(f_1)(\xi) \cdot (v)$
3. $D(g \circ f)(\xi) = D(f)(\xi) \cdot D(g)(f(\xi))$ (Regra da Cadeia)

Uma outra noção de derivação, que já aparece entre espaços euclidianos é a *diferenciação no sentido de Gateaux*

Definição 1.15 *Seja $f : U \subseteq \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação definida em um aberto $U \subseteq \mathbb{E}$. Dizemos que f é Gateaux diferenciável (G -diferenciável) no ponto $\xi \in U$, se existir, para todo $v \in \mathbb{E}$, o limite:*

$$d_G f(\xi, v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\xi + \varepsilon v) - F(\xi)}{\varepsilon}$$

O Teorema a seguir é um dos principais resultados do cálculo em espaços euclidianos, e pode ser estendido para espaços de Banach.

Teorema 1.16 *Suponha que $f : U \subseteq \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ seja G -diferenciável em todos os pontos do segmento $\xi + tv$ ($0 \leq t \leq 1$). Então:*

$$f(\xi + v) - f(\xi) = \int_0^1 d_G f(\xi + tv, v) dt$$

Prova: Seja $\lambda \in \mathbb{F}'$ um funcional linear contínuo definido em \mathbb{F} . É imediato verificar que

$$\frac{d}{dt} \langle \lambda, f(\xi + th) \rangle |_{t=t_0} = \langle \lambda, d_G f(\xi + t_0 h, h) \rangle$$

Em conseqüência;

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} \langle \lambda, f(\xi + th) \rangle dt = \int_0^1 \langle \lambda, d_G f(\xi + th, h) \rangle dt$$

e portanto, como $\langle \lambda, f(\xi + th) \rangle$ é uma aplicação do $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, vale que $\int_0^1 \frac{d}{dt} \langle \lambda, f(\xi + th) \rangle dt = \langle \lambda, f(\xi + h) - f(\xi) \rangle$. Finalmente,

$$\langle \lambda, f(\xi + h) - f(\xi) \rangle = \langle \lambda, \int_0^1 d_G f(\xi + th, h) dt \rangle$$

Devido a definição de integral. Como a igualdade esta verificada para todo $\lambda \in \mathbb{F}'$, o teorema esta demonstrado em virtude do *Teorema de Hahn-Banach* (vide [Br]) ■

A relação entre diferenciabilidade no sentido de Fréchet e de Gateaux é dado pelo seguinte Teorema:

Teorema 1.17 *Suponha que $f : U \subseteq \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ é F-diferenciável no ponto ξ , então f é F-diferenciável em ξ . A recíproca em geral é falsa; contudo:*

Suponha que $f : U \subseteq \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ é G-diferenciável em U e seja:

$$f_G : U \rightarrow L(X, Y), \quad f_G(x) = d_G f(x, \cdot)$$

uma aplicação contínua no ponto $\xi \in U$. Então f é F-diferenciável no ponto ξ e $Df(\xi) = d_G f(\xi, \cdot)$

Prova: A primeira afirmação do Teorema é imediata. Um contra-exemplo para mostrar que G-diferenciabilidade não implica em F-diferenciabilidade, pode ser encontrado mesmo em dimensão finita como mostra a seguinte situação: $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x, y) = \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 \quad \text{se } y \neq 0$$

$$F(x, 0) = 0.$$

Passamos a demonstrar a parte "interessante" do Teorema:

Podemos escrever, de uma forma mais conviniente $d_G f(x, h) = d_G f(x)h$, onde $d_G \in L(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Pelo Teorema anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \|f(\xi + h) - f(\xi) - d_G f(\xi)h\|_{\mathbb{F}} &= \left\| \int_0^1 d_G f(\xi + th, h) - d_G f(\xi, h) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|d_G f(\xi + th, h) - d_G f(\xi, h)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|d_G f(\xi + th) - d_G f(\xi)\| \cdot \|h\| dt = o(\|h\|) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A desigualdade do valor médio pode ser obtida para funções G-diferenciáveis da seguinte forma:

Teorema 1.18 *Suponha que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{F}$ é G-diferenciável e $\|d_G f(t)\| \leq \psi'(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Então:*

1. $\|f(b) - f(a)\| \leq \psi(b) - \psi(a)$
2. $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{t \in [a, b]} \|d_G f(t)\| \cdot |b - a|$

Prova: Claramente para todo $\lambda \in \mathbb{F}'$, a função real $\langle \lambda, f(t) \rangle$ é G-diferenciável, e pelo Teorema (1.16):

$$\langle \lambda, f(b) - f(a) \rangle = \int_a^b \frac{d}{dt} \langle \lambda, f(t) \rangle dt$$

Pelo Teorema de Hahn Banach existe um funcional $\lambda \in S_{\mathbb{F}'}$ tal que $\langle \lambda, f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|$. Portanto obtemos:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_a^b \|d_G f(t)\| dt \leq \psi(b) - \psi(a)$$

A afirmação 2 é consequência imediata de 1, tomando $\psi(t) = \sup_{t \in [a, b]} \|d_G f(t)\| t$ ■

Um dos principais teoremas do cálculo em espaços euclidianos, é sem dúvida o *Teorema da Aplicação Inversa*. Se fizermos uma análise da demonstração deste teorema, iremos notar que a principal ferramenta utilizada é o *Teorema do Ponto Fixo de Banach*, e em nenhum momento a propriedade do espaço ser localmente compacto é invocada; portanto a mesma demonstração vale no caso de espaços de Banach. Lembremos que, uma aplicação é dita ser de classe C^1 , e denotamos $f \in C^1(U, \mathbb{F})$, se f é F -diferenciável, e a aplicação: $Df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ é contínua. Em suma vale o seguinte resultado:

Teorema 1.19 (Teorema da Aplicação Inversa) *Seja $f : U \subseteq \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ uma aplicação de classe C^1 . Suponha que $Df(\xi) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ é um isomorfismo linear. Então existe um aberto $U_\xi \subseteq U$ e um aberto $V \subseteq \mathbb{F}$ com $f(\xi) \in V$ tal que:*

- f aplica U_ξ difeomórficamente em V .
- $f^{-1} \in C^1(V, \mathbb{E})$. Em particular, $Df^{-1}(v) = (Df(u))^{-1}$ onde $u = f^{-1}(v)$
- se $f \in C^k(U, \mathbb{F})$, então $f^{-1} \in C^k(V, \mathbb{E})$

Como consequência do *Teorema da Aplicação Inversa*, segue-se, como no caso dos espaços de dimensão finita, a validade do *Teorema da Função Implícita*, que analogamente ao caso dos espaços euclidianos tem caracter crucial na teoria de *Variedades de Banach*.

Teorema 1.20 (Teorema da Função Implícita) *Seja $F \in C^k(\Lambda \times U, \mathbb{F})$, $k \geq 1$, \mathbb{F} é um espaço de Banach, Λ e U são conjuntos abertos dos espaços de Banach \mathbb{B} respectivamente \mathbb{E} . Suponha que $F(\lambda^*, u^*) = 0$ e que $F_u(\lambda^*, u^*)$ seja um isomorfismo linear de \mathbb{E} em \mathbb{F} . Então existem vizinhanças $\Xi \subseteq \mathbb{B}$ de λ^* e $U^* \subseteq \mathbb{E}$ de u^* e uma aplicação $g \in C^k(\Xi, \mathbb{E})$ tal que:*

- $F(\lambda, g(\lambda)) = 0$ para todo $\lambda \in \Xi$,

- $F(\lambda, u) = 0$, $(\lambda, u) \in \Xi \times U^*$, implica $u = g(\lambda)$,
- $Dg(\lambda) = -[F_u(p)]^{-1} \circ F_\lambda(p)$ onde $p = (\lambda, g(\lambda))$.

1.1.4 Os Operadores de Nemytskii

Dentre todas as classes de operadores não lineares entre espaços de Banach, destaque-se, dentro da teoria de métodos variacionais, os operadores definidos em um espaço L^p tomando valores em um espaço L^q . Estes operadores são precisamente os *Operadores de Nemytskii*.

Definição 1.21 *Seja Ω um subconjunto do \mathbb{R}^n . Uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma função de Carathéodory se:*

1. *Para cada $s \in \mathbb{R}$ a função $x \mapsto f(x, s)$ é Lesbegue mensurável em Ω*
2. *Para quase todo $x \in \Omega$, a função $s \mapsto f(x, s)$ é contínua em \mathbb{R} .*

Quando f é uma função de Carathéodory, iremos denotar por $f \in (C)$.

Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Logo deve existir uma seqüência de funções simples, digamos u_n convergindo *q.t.p.* para u . Cada função $f(x, u_n(x))$ é mensurável em vista da propriedade **1** da definição acima. E por **2**, $f(x, u_n(x)) \rightarrow f(x, u(x))$ *q.t.p.*, portanto a função $f(\cdot, u(\cdot))$ é uma função mensurável. Ou seja, se $f \in (C)$, a aplicação que para cada função $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ associa a função $f(\cdot, u(\cdot))$, é um operador entre o espaço das funções mensuráveis $\mathcal{M}(\Omega)$. Tal operador é chamado um *Operador de Nemytskii* e é denotado por $N_f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$

Vale a pena citarmos que, se munirmos \mathcal{M} com a topologia da convergência em medida, o Operador de Nemytskii é um operador (seqüencialmente) contínuo, isto é, se u_n converge em medida para uma função $u \in \mathcal{M}$ então $N_f(u_n)$ converge em medida para $N_f(u)$.

Contudo o nosso interesse é em restringir o Operador de Nemytskii ao subespaço

$L^p(\Omega) \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$, e claramente queremos que a sua imagem esteja em um espaço do tipo $L^q(\Omega)$.

Teorema 1.22 *Suponha que exista uma constante $c > 0$, uma função $b \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, e $r > 0$ tais que:*

$$|f(x, s)| \leq c|s|^r + b(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

Então, N_f aplica $L^{qr}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ continuamente. Ademais N_f é um operador limitado.²

Prova: Utilizando a desigualdade de Minkowski adicionado com a inequação fornecida em (1.1), obtemos:

$$\|N_f u\|_q \leq c\|u\|_q^r + \|b\|_q = c\|u\|_{qr}^r + \|b\|_q$$

Portanto, já temos mostrado que N_f aplica $L^{qr}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ e que N_f é um operador limitado. Passemos a demonstrar a continuidade do operador N_f .

Seja u_n uma seqüência em $L^{qr}(\Omega)$ convergindo, digamos para $u \in L^{qr}(\Omega)$. Dado qualquer subseqüência de u_n , como escólio da demonstração (clássica) da completez dos L^p 's, existe uma sub-subseqüência, que iremos denotar por u_{n_k} , tal que $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$, para alguma função $h \in L^{qr}(\Omega)$. Utilizando a hipótese (1.1), segue-se que:

$$|f(x, u_{n_k}(x))| \leq c|h(x)|^r + b(x) \in L^q(\Omega)$$

Desde que $f(x, u_{n_k}(x))$ converge *q.t.p.* para $f(x, u(x))$, segue-se do *Teorema da Convergência Dominada* que $f(x, u_{n_k}(x)) \rightarrow f(x, u(x))$ em $L^q(\Omega)$. Finalmente, suponha por absurdo que $f(x, u_n(x))$ não convirja para $f(x, u(x))$. Assim existiria uma vizinhança aberta $U_{f(\cdot, u(\cdot))} \subseteq L^q(\Omega)$ de $f(\cdot, u(\cdot))$ e uma subseqüência $f(\cdot, u_{n_k}(\cdot))$ de

²A recíproca deste Teorema também é válida, i.e., se N_f aplica $L^p(\Omega)$ no $L^q(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. Então existe uma constante $c > 0$ e uma função $b \in L^q(\Omega)$ tal que : $|f(x, s)| \leq c|s|^r + b(x)$, $\forall x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbb{R}$ (ver, por exemplo, em [V] ou [F])

$f(\cdot, u_n(\cdot))$ fora desta vizinhança. Mas como mostramos anteriormente, esta subseqüência possui uma sub-subseqüência que converge para $f(\cdot, u(\cdot))$, e portanto, em algum momento esta seqüência entra nesta vizinhança, o que geraria um absurdo. Logo $f(x, u_n(x)) \rightarrow f(x, u(x))$ ■

Passemos agora a estudar a *diferenciabilidade dos operadores de Nemytskii*. Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação tal que $f_s = \frac{\partial}{\partial s} f \in (C)$ e satisfaça:

$$|f_s(x, s)| \leq c|s|^m + b(x), \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \Omega \quad (1.2)$$

onde $b \in L^n(\Omega)$, $1 \leq n \leq \infty$, $m > 0$. Integrando a inequação (1.2) com respeito a s obtemos:

$$|f(x, s)| \leq \frac{c}{m+1} |s|^{m+1} + b(x)|s| + a(x), \quad (1.3)$$

onde $a(x)$ é uma função arbitrária. Adiante iremos impor condições para $a(x)$ de tal sorte que o Operador de Nemytskii N_f esteja definido entre adequados espaços L^p 's. Usando a *Desigualdade de Young* ($ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$) para $a = b(x)$, $b = |s|$, $p = \frac{m+1}{m}$ e $p' = m+1$ em (1.3) obtemos:

$$|f(x, s)| \leq \frac{c+1}{m+1} |s|^{m+1} + \frac{m}{m+1} b(x)^{\frac{m+1}{m}} + a(x)$$

Observemos que a função $b(x)^{\frac{m+1}{m}} \in L^q(\Omega)$ onde $q = \frac{mn}{m+1}$. Então, se tomarmos $a(x) \in L^q(\Omega)$, segue-se do Teorema (1.22) (assumindo (1.2)):

$$N_f : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega) \quad p = mn \quad q = \frac{mn}{m+1} \quad (1.4)$$

$$N_{f_s} : L^p(\Omega) \rightarrow L^n(\Omega) \quad (1.5)$$

Feita estas considerações preliminares, estamos aptos a estudar a diferenciabilidade dos Operadores de Nemytskii.

Teorema 1.23 Assumindo (1.2) e utilizando as notações fixadas em (1.4) e (1.5), o Operador de Nemytskii N_f é continuamente Fréchet diferenciável e $D(N_f) : L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^q(\Omega))$ é dado por:

$$D(N_f)(u) \cdot [v] = N_{f_s}(u) \cdot v = f_s(x, u(x)) \cdot v(x)$$

Prova: Observemos inicialmente que sob nossas hipóteses, se fixarmos $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^p(\Omega)$ a função $x \mapsto f_s(x, u(x)) \cdot v(x) \in L^q(\Omega)$. De fato, pela *Desigualdade de Hölder*

$$\int_{\Omega} |f_s(x, u(x)) \cdot v(x)|^q \leq \left(\int_{\Omega} |f_s(x, u(x))|^{pq/(p-q)} \right)^{\frac{p-q}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p \right)^{\frac{q}{p}}$$

Observemos que $\frac{pq}{p-q} = n$, e assim segue-se a afirmação de (1.5) ■

Afirmção: Fixado $u \in L^p(\Omega)$ $r(v) = N_f(u+v) - N_f(u) - f_s(x, u) \cdot v = o(v)$ para $v \in L^p(\Omega)$, i. e., $\frac{\|r(v)\|_q}{\|v\|_p} \xrightarrow{\|v\|_p \rightarrow 0} 0$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} f(x, u(x) + v(x)) - f(x, u(x)) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x, u(x) + tv(x)) dt \\ &= \int_0^1 f_s(x, u(x) + tv(x)) dt \end{aligned}$$

portanto:

$$\int_{\Omega} |r(v)|^q dx = \int_{\Omega} \left| \int_0^1 [f_s(x, u(x) + tv(x)) - f_s(x, u(x))] \cdot v(x) dt \right|^q dx$$

Invocando a *Desigualdade de Hölder* e o *Teorema de Fubini*, obtemos:

$$\int_{\Omega} |r(v)|^q dx \leq \left(\int_0^1 \int_{\Omega} |f_s(x, u(x) + tv(x)) - f_s(x, u(x))|^n dx dt \right)^{q/n} \|v\|_p^q$$

Finalmente usando (1.5) e o fato que N_{f_s} é um operador contínuo, a afirmação esta provada ■

A continuidade de $D(N_f)$ segue-se diretamente de (1.5) tendo em vista que, já tem

seja mostrado que $D(N_f)(u) \cdot [v] = N_{f_s}(u) \cdot v = f_s(x, u(x)) \cdot v(x)$ ■

Em nossas próximas considerações, iremos discutir o chamado *Potencial de Nemytskii*.

Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de Carathéodory, para a qual existem constantes $m > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ e uma função $b \in L^{p/m}(\Omega)$ tais que:

$$|f(x, s)| \leq c|s|^m + b(x)$$

Estaremos interessados em trabalhar com a primitiva de f , para isto consideremos a função:

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, \zeta) d\zeta$$

Facilmente podemos ver que:

$$|F(x, s)| \leq c_1|s|^{m+1} + c(x)$$

onde $c \in L^{\frac{p}{m+1}}(\Omega)$. Então $N_f : L^p(\Omega) \rightarrow L^{\frac{p}{m}}(\Omega)$ e $N_F : L^p(\Omega) \rightarrow L^{\frac{p}{m+1}}(\Omega)$

Em particular, se $p = m + 1$ a inequação acima torna-se:

$$|f(x, s)| \leq c|s|^{p-1} + b(x), \quad b \in L^{p'}(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad (1.6)$$

$$|F(x, s)| \leq c_1|s|^p + c(x)$$

e portanto obtemos que: $N_f : L^p(\Omega) \rightarrow L^{p'}(\Omega)$ e $N_F : L^p(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$. Em suma obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.24 *Assumindo (1.6) a expressão*

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx$$

define uma aplicação $\Psi : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente Fréchet Diferenciável, i.e., $\Psi \in C^1(L^p(\Omega), \mathbb{R})$ Ademais $D(\Psi) : L^p(\Omega) \rightarrow L^{p'}(\Omega)$ é dado por:

$$D(\Psi)(u) \cdot [v] = \int_{\Omega} f(x, u)v$$

Prova: Basta observarmos dois fatos:

1. $N_F : L^p(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$, é uma aplicação de classe C^1 , devido ao Teorema (1.23).
2. $\int : L^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, é uma função de classe C^∞ por ser um funcional linear contínuo.

A conclusão do Teorema segue-se pela *Regra da Cadeia* ■

Exemplo 1.1 *Provavelmente, o Potencial de Nemytskii que mais utilizaremos será a norma dos espaços L^p elevada a p , i.e., $\|\cdot\|_p^p$, para $p > 1$. Consideremos a aplicação $F : L^p(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$ dada por $F(u) = |u|^p$. O Potencial de Nemytskii associado seria:*

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} |u|^p dx$$

O Teorema anterior está nos dizendo que Ψ é de classe C^1 e que:

$$\Psi'(u) \cdot [v] = \int_{\Omega} p|u|^{p-1}v dx \quad \blacksquare$$

Exemplo 1.2 *Quando se esta procurando soluções positivas de equações elípticas, é comum trabalharmos com a parte positiva e a parte negativa da função u definida em um adequado espaço de funções. Em geral estes espaços possuem uma estrutura de um espaço L^p ; por exemplo $W^{k,p}$. Se definirmos a aplicação P por $P(u)(x) = u^+(x) = \max(0, u(x))$, observamos facilmente que $P(u) \leq |u|$, logo $P : L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ ■*

1.2 Os espaços de Sobolev

Acreditamos que o leitor já tenha uma certa familiaridade com os espaços de Sobolev. Pretendemos aqui listar, em uma breve discursão, os principais resultados sobre

estes espaços, com o intuito de facilitar a pesquisa na hora que estes resultados forem invocados no decorrer desta dissertação. A maioria das demonstrações serão omitidas. O leitor pederá encontra-las em [Ad], [Br] ou em [?].

1.2.1 Derivação no sentido fraco

Começemos por motivar a definição de *derivada fraca*. Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Suponhamos que $u \in C^1(\Omega)$. Então para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, fazendo integração por partes, obtemos a fórmula:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi$$

Observemos que não há termo no bordo pois $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

Mais geralmente, se $u \in C^k(\Omega)$, novamente integrando por partes prova-se por indução que

$$\int_{\Omega} u \cdot D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \cdot \varphi \, dx$$

onde α é um multi-index com $|\alpha| = k$, i.e., $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, e $D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

Definição 1.25 *Suponha que $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$ e α é um multi-index. Nós dizemos que v é a α -ésima derivada fraca de u , e escrevemos $D^\alpha u = v$ se:*

$$\int_{\Omega} u \cdot D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \cdot \varphi \, dx \quad ^3$$

A unicidade da derivada fraca, é consequência imediata da densidade das funções C_0^∞ em L_{loc}^1 , no sentido de que se $u \in L_{loc}^1$ é tal que $\int u \cdot \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty \Rightarrow u = 0$.

³É claro que toda função $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ possui uma derivada fraca por ser uma *Distribuição* i. e., um funcional linear contínuo de $C_0^\infty(\Omega)$. O ponto crucial nesta definição é que nós estamos pedindo que a sua derivada fraca, que a princípio pertenceria a $D'(\Omega)$, na verdade seja representada por uma função $L_{loc}^1(\Omega) \subsetneq D'(\Omega)$

Exemplo 1.3 Considere a função $u(x) = |x|$, então a derivada fraca de u é a função, $v(x) = \text{senal}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

1.2.2 Definição e Propriedades Elementares dos Espaços de Sobolev

Definição 1.26 Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ por:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \text{ com } |\alpha| = k\}$$

Munimos este espaço vetorial com a seguinte norma:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} \approx \sum_{|\alpha| \leq k} \left(\int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}$$

onde \approx esta significando equivalência entre as normas.

Definição 1.27 Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Em um certo sentido, as funções $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ são funções em $W^{k,p}(\Omega)$ que se anulam em $\partial\Omega$. Iremos precisar isto adiante.

Teorema 1.28 Os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$ são completos, i. e., são espaços de Banach. Além disso, são reflexivos para $1 < p < \infty$ e separáveis para $1 \leq p < \infty$

A prova consiste em mostrar que os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ são isométricos a um subespaço fechado de $[L^p(\Omega)]^n$ ■

A derivação fraca goza de muitas propriedades encontradas na derivação clássica. Isto é o conteúdo do próximo teorema.

Teorema 1.29 (Operações com Derivação Fraca)

1. Se $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2. Se $G \in C^1(\mathbb{R})$ é tal que $G(0) = 0$ e $|G'(s)| \leq M, \forall s \in \mathbb{R}$ e se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3. Sejam Ω_1 e Ω_2 dois abertos do \mathbb{R}^n . Suponha que $H : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ seja um difeomorfismo C^1 satisfazendo: $JacH \in L^\infty(\Omega_2)$ e $JacH^{-1} \in L^\infty(\Omega_1)$. Então se $u \in W^{1,p}(\Omega_2)$, $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega_2)$ e

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ H)(y) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \cdot \frac{\partial H_i}{\partial y_j}$$

Passemos a tratar de *Teoremas de Densidades*. O primeiro resultado que apresentaremos possui um papel importante na construção da teoria dos espaços de Sobolev, e iremos enuncia-lo para os espaços $W^{1,p}(\Omega)$. Contudo ele é também é verdadeiro para os espaços $W^{k,p}(\Omega)$

Teorema 1.30 (Friedrichs) *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma seqüência $(u_n)_{n \geq 1} \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que:*

$$1. \quad u_n \Big|_{\Omega} \longrightarrow u \quad \text{em } L^p(\Omega);$$

$$2. \quad \nabla u_n \Big|_{\Omega'} \longrightarrow \nabla u \Big|_{\Omega'} \quad \text{em } [L^p(\Omega')]^n, \text{ para todo } \Omega' \subset\subset \Omega$$

Outro resultado de fundamental importância, que não é consequência do *Teorema de Friedrichs* é a densidade das funções $C^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$

Teorema 1.31 *O subespaço $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, é denso em $W^{k,p}(\Omega)$*

Contudo se o aberto possui a fronteira suficientemente regular, digamos Ω de classe C^1 , i. e., $\partial\Omega$ é uma hipersuperfície de classe C^1 , obtemos, via o *Teorema do Prolongamento*⁴ o seguinte resultado:

Teorema 1.32 *Suponhamos que Ω seja um aberto de classe C^1 . A restrição a Ω das funções $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ forma um subespaço denso em $W^{k,p}(\Omega)$*

1.2.3 O Operador de Traço

Estaremos interessados nesta seção em discutirmos a possibilidade de "estudarmos" uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ no bordo $\partial\Omega$, assumindo que $\partial\Omega$ é de classe C^1 . Para funções contínuas, se $u \in C(\bar{\Omega})$, então $u|_{\partial\Omega}$ tem um sentido clássico e perfeitamente bem definido. Contudo para funções definidas em $W^{1,p}(\Omega)$, não podemos falar diretamente em $u|_{\partial\Omega}$ uma vez que tais funções estão definidas *q.t.p.*, e $\mu(\partial\Omega) = 0$ já que $\partial\Omega$ é uma hipersuperfície em \mathbb{R}^n . A Teoria do *Operador de Traço* foi desenvolvida para solucionar este problema.

Teorema 1.33 (Teorema do Traço) *Seja Ω um aberto limitado de classe C^1 . Então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

satisfazendo

$$1. Tu = u|_{\partial\Omega}, \quad \text{se } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

⁴**Teorema do Prolongamento:** Suponhamos que Ω é um aberto de classe C^1 , com $\partial\Omega$ limitada (ou $\Omega = \mathbb{R}_+^n$). Então existe um operador linear de prolongamento $P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, satisfazendo:

$$1. Pu|_{\Omega} = u \quad 2. \|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)} \quad 3. \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Onde a constante C só depende de Ω

$$2. \|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

onde C depende somente de Ω .

O próximo Teorema nos fornece um significado preciso da expressão coloquial: "Funções em $W_0^{1,p}(\Omega)$ são aquelas que zeram na fronteira." Justificando assim a escolha dos espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$ para modelar Problemas de Dirichlet Homogêneos.

Teorema 1.34 *Seja Ω um aberto limitado de classe C^1 . Suponhamos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então:*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{se e somente se} \quad Tu = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

1.2.4 Desigualdades de Sobolev

O propósito desta seção é discutir os diversos mergulhos de vários espaços de Sobolev em outros. O primeiro resultado nesta direção é o

Teorema 1.35 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) *Se $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente mergulhado em $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. E existe uma constante C dependendo apenas de n e p tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

onde p^* satisfaz $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$

De uma maneira mais geral vale:

Teorema 1.36 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg) *Sejam $1 \leq p, q, r < \infty$. Consideremos j e m dois inteiros, $0 \leq j < m$ satisfazendo*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + \frac{1-a}{q}$$

para algum $a \in [\frac{j}{m}, 1]$ ($a < 1$ se $r > 1$ e $m - j - \frac{n}{r} = 0$); então existe uma constante $C = C(n, m, j, a, q, r)$ tal que

$$\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{L^p} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^r} \right)^a \|u\|_{L^q}^{1-a}$$

para toda $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

O Teorema de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev esta nos dizendo que podemos mergulhar o espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ continuamente em $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Este fato será largamente utilizado nos capítulos seguintes.

Um corolário imediato do Teorema de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev é que, na realidade, podemos mergulhar $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ continuamente em $L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \leq q \leq p^*$, via uma Desigualdade de Interpolação.

Utilizando o Teorema do Prolongamento, somos capazes de, quando Ω for um aberto limitado de classe C^1 , obter tais resultados para os espaços $W^{1,p}(\Omega)$. O caso $p > n$ é contemplado pelo Teorema de Morrey. Em suma, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.37 *Seja $\Omega = \mathbb{R}^n$ ou um aberto limitado de fronteira C^1 ou ainda \mathbb{R}_+^n , então:*

1. Se $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} > 0$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$,
2. Se $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} = 0$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [p, \infty[$,
3. Se $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} < 0$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

com injeções contínuas.

Passemos a discutir os principais mergulhos compactos que versão sobre os Espaços de Sobolev.

Teorema 1.38 (Mergulhos Compactos de Sobolev) *Seja Ω um aberto limitado de classe C^1 . Verifica-se:*

1. Se $p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[$ onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,
2. Se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, \infty[$,
3. Se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$

com injeções compactas.

1.2.5 Os espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$

Motivados pelo Teorema (1.34), o qual, como vimos, justifica a escolha dos espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$ como os espaços naturais para modelarmos problemas de Dirichlet homogêneos ($u = 0$ em $\partial\Omega$), iremos dedicar esta seção a um estudo mais específico sobre estes espaços. Claramente os Teoremas de Mergulho são válidos para este tipo de espaço pois em particular $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$. Contudo, o fato de termos $T(W_0^{1,p}(\Omega)) = 0$ tem implicações bem mais favoráveis aos Teoremas de Mergulho e ao Teorema de Prolongamento.

Teorema 1.39 *Suponhamos que Ω é um aberto de classe C^1 . Seja $u \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$
2. Existe uma constante C tal que

$$\left| \int_{\Omega} u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \cdot \|\varphi\|_{L^{p'}} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

3. A função $\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in \Omega \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$

pertence a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e neste caso, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$

Vale a pena citarmos que a implicação $1 \Rightarrow 2$, não pede regularidade nenhuma de Ω , portanto no caso dos espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$ o operador de prolongamento, é canônico (basta estender por zero fora de Ω), e não exige regularidade de Ω . Tendo em vista esta observação, os *Mergulhos Compactos de Sobolev* (Teorema (1.38)) são válidos para abertos limitados, sem restrição de regularidade na fronteira.

Em particular o *Teorema de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev* é válido para $W_0^{1,p}(\Omega)$, se $1 \leq p < n$. Observando que $p < p^*$, obtemos para Ω limitado que $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Isto demonstra a chamada *Desigualdade de Poincaré*.

Teorema 1.40 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n . Então existe uma contante $C = C(\Omega, p)$ tal que*

$$\int |u|^p \leq C \int |\nabla u|^p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty)$$

Uma das grandes utilidades deste Teorema, é utiliza $\|\nabla u\|_p$ como a norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma inicial. É fácil verificarmos que a constante $C(\Omega, 2)$ é o primeiro autovalor do operador laplaciano sob condições de homogeneidade.

Para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, Ω limitado, denotamos por $u_M = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} u dx$. Este número é chamado *a média de u em Ω* . A desigualdade de Poincaré, mais geralmente é válida, para o espaço $W^{1,p}(\Omega)$, sob o seguinte enunciado:

Teorema 1.41 (Desigualdade de Poincaré em $W^{1,p}(\Omega)$) *Seja Ω um aberto conexo limitado de classe C^1 , e seja $1 \leq p \leq \infty$. Então existe uma constante C tal que*

$$\|u - u_M\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

Prova: ⁵ É suficiente provarmos o resultado para o caso das funções de média zero. Consideremos assim o seguinte subespaço vetorial de $W^{1,p}(\Omega)$, $M = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u_M = 0\}$. Suponhamos por absurdo que a desigualdade desejada não ocorresse em M . Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, seríamos capazes de encontrar um $u_k \in M$, com $\|u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 1$ e $\|u_k\|_{L^p} \geq k \|\nabla u_k\|_{L^p}$. Em vista do *Mergulho Compacto* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, podemos supor, a menos de uma subsequência, que $u_k \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Observando que $\|u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq \|u_k\|_{L^p}$ obtemos

$$1 = \|u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq \|u_k\|_{L^p} \geq k \cdot \|\nabla u_k\|_{L^p}$$

implicando assim que $\|\nabla u_k\|_{L^p} \rightarrow 0$. Logo $u_k \rightarrow u$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla u = 0$. Como Ω é conexo, segue-se que u é constante. Finalmente

$$\int_{\Omega} u dx = u \mu(\Omega) = 0$$

já que a média de u é igual a zero trivialmente ($u_M = 0$). Assim u seria nulo em $W^{1,p}(\Omega)$, o que contradiz o fato da seqüência $(u_k)_{k \in \mathbb{N}'} \subseteq \mathbb{S}_{W^{1,p}(\Omega)}(1)$ ■

1.3 Alguns Resultados Não Standard em Análise Funcional

Nesta dissertação faremos uso de algumas técnicas em Análise Funcional, incluindo a *Teoria de Espaços de Medida*, que tem se mostrado extremamente úteis em toda a extensão da *Análise Matemática* e, em particular, na abordagem de *Problemas Variacionais*. Acreditamos ser oportuno apresentarmos aqui tais técnicas neste capítulo de preliminares, para simplificar a pesquisa do leitor.

⁵Resolvemos apresentar uma prova deste Teorema por termos tido problemas em encontrar este resultado demonstrado em livros clássicos, e esperamos assim facilitar o estudo do leitor.

1.3.1 Compacidade Forte nos espaços L^p 's

Para os espaços do tipo L^p $1 \leq p < \infty$, podemos obter um análogo ao *Teorema de Ascoli* no espaço das funções contínuas. Ou seja, um critério de pré-compacidade de subconjuntos $\mathcal{S} \subseteq L^p$. Antes de apresentarmos o resultado principal nesta seção, precisaremos de três notações:

Notação 1 Se escreve $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$ (translação de f por h)

Notação 2 Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, dizemos que um aberto ω está fortemente incluído em Ω , e escrevemos $\omega \subset\subset \Omega$ se $\bar{\omega} \subset \Omega$ e $\bar{\omega}$ é compacto

Notação 3 Seja u uma função definida q.t.p. em Ω , denotamos por \tilde{u} a extensão por zero fora de Ω , isto é:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

Teorema 1.42 (Fréchet - Kolmogorov) *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$. Um subconjunto $\mathcal{K} \subset L^p(\Omega)$ é pré-compacto em $L^p(\Omega)$, se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem um $\delta > 0$ e um subconjunto $\omega \subset\subset \Omega$ tal que para todo $u \in \mathcal{K}$ e todo $h \in \mathbb{R}^n$ com $|h| < \delta$ vale*

$$\|\tau_h \tilde{u} - \tilde{u}\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon, \quad e \quad \|u\|_{L^p(\Omega \setminus \bar{\omega})} < \varepsilon$$

Observemos que, em particular, se fixado $\omega \subset\subset \Omega$ tivermos para todo $\varepsilon > 0$ dado, a existência de um $\delta > 0$ tal que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$ com $|h| < \delta$ e para toda $f \in \mathcal{K}$ então $\mathcal{K} \Big|_{L^p(\omega)}$ é relativamente compacto em $L^p(\omega)$. Em vista desta observação, enunciaremos um corolário que será muito útil.

Corolário 1.43 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\mathcal{K} \subset L^p(\Omega)$. Suponhamos que exista uma exaustão de Ω por abertos Ω_j com as seguintes propriedades:*

1. Para cada j , $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$;
2. Para cada j $\mathcal{K} \Big|_{\Omega_j}$ é pré-compacto em $L^p(\Omega_j)$;
3. Para todo $\varepsilon > 0$, existe j tal que

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_j} |u(x)|^p dx < \varepsilon \quad \forall u \in \mathcal{K}.$$

Então \mathcal{K} é pré-compacto em $L^p(\Omega)$.

Corolário 1.44 *Sejam $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ fixados. O operador linear $G_\omega : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\omega)$ definido por $G_\omega(f) = G * f \Big|_\omega$ é um operador compacto. Isto é, o conjunto $\mathcal{F} = g * B_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big|_\omega$ é pré-compacto em $L^p(\omega)$*

1.3.2 Alguns resultados da Teoria da Medida

É esperado do leitor uma familiaridade com os *Espaços de Medidas*, contudo resolvemos listar alguns resultados indispensáveis. Acreditamos que não há necessidade de enunciar resultados padrões como o *Teorema da Convêngencia Monótona*, *Teorema da Convêngencia Dominada de Lesbegue*, *Lema de Fatou*, *Teorema de Fubini*, *Teorema de Egorof*, *Teorema da Congengência de Vitalli*, *Densidade das funções $C_0^\infty(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$* A *reflexibilidade dos L^p 's para $1 < p < \infty$* O *Teorema da dualidade de Riez*, *Uniformidade Convexa dos L^p 's, para $1 < p < \infty$* , *Desigualdades de Hölder*, *Young e Minkowski* entre outros; apesar dos mesmos serem exautivamente utilizados no decorrer de toda Dissertação. Iremos nos deter em apresentarmos os principais resultados que versam sobre o espaço das medidas $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Contudo, deixe-nos inicialmente enunciar, um dos mais importantes resultados da teoria de integração:

Teorema 1.45 (Teorema da Derivação de Lesbegue) *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um boreliano e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} uma função integrável com respeito a medida de Lesbegue*

λ . Então para quase todo $x \in A$ vale:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f d\lambda = f(x).$$

Seja (X, \mathcal{A}) , um par constituído por um conjunto e uma σ -álgebra. Definimos o espaço vetorial $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \pm\infty : \nu \text{ é uma medida (com sinal) } \sigma\text{-aditiva}\}$. Para cada $\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, definimos as seguintes medidas σ -aditivas, positivas:

$$\begin{aligned} \nu^+(A) &= \sup\{\nu(B) : B \subset A, B \in \mathcal{A}\}; \\ \nu^-(A) &= (-\nu)^+(A) \quad ; \\ |\nu|(A) &= \nu^+(A) + \nu^-(A) \end{aligned}$$

As medidas acima são chamadas, respectivamente, de *variação positiva*, *variação negativa*, e *variação total* de ν .

Pelo **Teorema da Decomposição de Jordan** vale: $\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A)$. Ademais, para toda $\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $|\nu|$ é uma norma e $(\mathcal{M}(\mathcal{A}), |\cdot|)$ é um espaço de Banach. Se X é um conjunto e \mathcal{A} é uma σ -álgebra de subconjuntos de X . Seja μ e ν medidas positivas ($\mu, \nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$). Dizemos que μ é absolutamente contínua em relação a ν , e denotamos por $\mu \ll \nu$, se $A \in \mathcal{A}$ e $\nu(A) = 0$ implicam $\mu(A) = 0$.

Teorema 1.46 (Radon - Nikodym) *Se (X, \mathcal{A}, ν) é σ -finito, então $\mu \ll \nu$ se, e somente se, existe uma função $f \in L^1_{loc}(X, \mathcal{A}, \nu)$ tal que para todo $A \in \mathcal{A}$*

$$\mu(A) = \int_A f d\nu$$

Ademais, f é única q.t.p..

A função f denomina-se a derivada de μ com respeito a ν e denotamos por $f = \frac{d\mu}{d\nu}$.

Dizemos que ν está concentrada num conjunto $D \in \mathcal{A}$ quando para todo $A \in \mathcal{A}$ com $A \cap D = \emptyset$, $\nu(A) = 0$. Dadas duas medidas ν_1 e ν_2 definidas em \mathcal{A} , dizemos que

ν_1 é ν_2 -singular, e denotaremos por $\nu_1 \perp \nu_2$, se existir um $D \in \mathcal{A}$ tal que ν_1 está concentrada em D e ν_2 está concentrada em D^c . Como consequência do **Teorema da decomposição de Lesbegue**, para toda ν σ -finita, existem medidas σ -aditivas ν_1 e ν_2 , tais que:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \quad \nu_1 \perp \nu, \quad \nu_2 \ll \nu$$

Tentemos colocar estes resultados listados acima em uma linguagem da *Álgebra de Espaços Vetoriais*.

Se $\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ definimos, $\nu^\perp = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : \nu \perp \mu\}$. Verifica-se facilmente que ν^\perp é um subespaço vetorial. É claro que o conjunto $\{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : \nu \ll \mu\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Vale, pelo *Teorema da decomposição de Lesbegue*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \nu^\perp \oplus \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : \nu \ll \mu\}.$$

Se o espaço de medida (X, \mathcal{A}, μ) é σ -finito, Definimos um operador linear: $\Psi : L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $\Psi(f)(A) = \int_A f d\mu$. Pelo *Teorema de Radon - Nikodym*, Ψ é um isomorfismo do $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ sobre $\{\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : \nu \ll \mu\}$. Ψ é na verdade uma isometria linear pois se $\nu = \int f d\mu$, a variação total de ν é dada por $|\nu| = \int |f| d\mu$, i. e., $\|\Psi(f)\|_{\mathcal{M}(\mathcal{A})} = \|f\|_{L^1(X, \mathcal{A}, \mu)}$. Ou seja, podemos melhorar a soma direta acima por:

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \nu^\perp \oplus L^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Uma das principais pergunta que deve ser feita acerca de um espaço de Banach, é quem é o seu dual. Passemos então a discutir um dos mais importantes resultados referente ao espaço $\mathcal{M}(\mathcal{A})$

Seja X um espaço métrico localmente compacto. Denotamos por $C_0(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) : f \text{ é contínua e } \text{supp } f \text{ é compacto}\}$.

Teorema 1.47 (Teorema de Riesz - Marckov)

- Seja $\Phi : C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) um funcional linear positivo, i. e., se $f(x) \geq 0 \forall x \in X$ então $\Phi(f) \geq 0$. Então existe uma única medida boreliana μ em X tal que

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu, \quad \forall f \in C_0(X).$$

Alem disso, μ é regular e finita em compactos.

- Seja $\Phi : C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) um funcional linear contínuo com relação a norma do supremo (L^∞). Então existe uma única medida boreliana com sinal (respectivamente complexa) tal que

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu, \quad \forall f \in C_0(X).$$

Utilizando o Teorema de Riesz - Marckov, e a isometria linear $\Psi : L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $\Psi(f)(A) = \int_A f d\mu$, podemos nos valer de uma certa compacidade local em $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$; isto é, podemos ver o $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ como um subespaço do dual de $C_0(X)$; e assim podemos fazer uso do Teorema de Banach - Alaoglu para concluir o seguinte teorema:

Teorema 1.48 *Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência limitada em $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, onde X é um espaço métrico localmente compacto. Então existe uma medida σ -finita $\nu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ tal que, a menos de uma subsequência,*

$$\int_X f_n \cdot \varphi d\mu \rightarrow \int_X \varphi d\nu, \quad \forall \varphi \in C_0(X)$$

1.3.3 Métodos de Convergências Fracas

Quando estamos trabalhando com equações diferenciais, é natural considerarmos espaços funcionais, tais como os espaços de Sobolev, os espaços L^p 's, entre outros. Tais espaços sempre possuem dimensão infinita, logo pelo Teorema de Riesz, perdemos todas as esperanças de obter compacidade local na topologia da norma.

Uma das mais frutíferas idéias em Análise Funcional, é a de munir o espaço de Banach, com uma topologia, que possua "menos abertos", com a intenção de termos "mais compactos", mas que ainda herde as principais características do espaço original. Estas são as **topologias fraca, e fraca ***. É crucial sabermos extrair propriedades de convergências fracas. Este é o principal objetivo desta seção.

Teorema 1.49 ⁶ *Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência em $L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, tal que $f_n \rightharpoonup f$ e $f_n \xrightarrow{q.t.p.} f$, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|f_n\|_q^q - \|f_n - f\|_q^q) = \|f\|_q^q$$

Empiricamente, o que está acontecendo é que no limite, f_n quando mensurados em L^q , esta se dividindo em $f_n - f$ e em f . Quando $q = 2$, a demonstração é imediata, e não requer convergência *q.t.p.*

Prova: Lembremos inicialmente da inequação

$$(\Xi) \quad ||a + b|^q - |a|^q| \leq \varepsilon |a|^q + C(\varepsilon) |b|^q, \quad (a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)$$

onde $C(\varepsilon)$ depende somente de ε e q . Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$g_n^\varepsilon = (| |f_n|^q - |f_n - f|^q - |f|^q | - \varepsilon |f_n - f|^q)^+$$

Claramente, $g_n^\varepsilon \xrightarrow{q.t.p.} 0$. Ademais, utilizando a inequação (Ξ) , com $a = f_n - f$ e $b = f$

$$\begin{aligned} g_n^\varepsilon &\leq (| |f_n|^q - |f_n - f|^q | + |f|^q - \varepsilon |f_n - f|^q)^+ \\ &\leq (C(\varepsilon) + 1) \cdot |f|^q \end{aligned}$$

Assim, pelo *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue*, fixado $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n^\varepsilon dx = 0$$

Portanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} | |f_n|^q - |f_n - f|^q - |f|^q | dx$$

⁶Este resultado foi primeiramente obtido por Brezis e Lieb em [BrL]

$$\leq \varepsilon \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| dx = O(\varepsilon) \quad \blacksquare$$

O próximo resultado é bastante utilizado em todos os capítulos posteriores:

Teorema 1.50 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $\mathcal{E}(\Omega)$ um espaço funcional que esta localmente mergulhado de forma compacta em algum $L^p(\Omega)$ ⁷. Se $f_n \rightharpoonup f$ em $\mathcal{E}(\Omega)$, então, a menos de uma subsequência, $f_n \xrightarrow{q.t.p.} f$*

Prova: Provaremos inicialmente que todo aberto do \mathbb{R}^n admite uma exaustão por abertos relativamente compactos de classe C^∞ .

Com efeito, seja $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ uma exaustão por abertos fortemente incluídos em Ω . Para cada par de abertos A_j, A_{j+1} da exaustão inicial, consideremos uma função $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que:

1. $0 \leq \varphi \leq 1$
2. $\varphi_j|_{A_j} = 0$
3. $\varphi_j|_{\mathbb{R}^n \setminus A_{j+1}} = 1$

Ponhamos $\omega_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) < \frac{1}{2}\}$. Ademais, φ pode ser escolhida de tal sorte que $A_j \subset \omega_j \subset A_{j+1}$. Observemos que ω_j é de classe C^∞ uma vez que $\partial \omega = \varphi^{-1}(\frac{1}{2})$. Assim $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$ é uma exaustão por abertos fortemente incluídos em Ω de classe C^∞ . Por hipótese, $f_n \rightharpoonup f$ em $L^q(\omega_j)$. Façamos uma construção por indução:

Para $j = 1$, existe um subconjunto $\mathbb{N}^1 \subseteq \mathbb{N}$ tal que a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^1}$ converge *q.t.p.* para f em ω_1 . Para $j = 2$, uma vez que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^1}$ converge em $L^q(\omega_2)$, existe um subconjunto $\mathbb{N}^2 \subseteq \mathbb{N}^1$, tal que a seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ converge *q.t.p.* para f em ω_2 . Prosseguindo indutivamente, contruímos uma seqüência de subconjuntos

⁷Localmente mergulhado de forma compacta, para nós significará que para todo $\omega \subset\subset \Omega$, de classe C^1 , $\mathcal{E}(\omega) \hookrightarrow L^q(\omega)$ compactamente. Por exemplos os espaços $W^{k,p}$, $W_0^{k,p}$, $D^{k,p}$, entre outros

enumeráveis

$$\mathbb{N} \supseteq \mathbb{N}^1 \supseteq \mathbb{N}^2 \supseteq \dots \supseteq \mathbb{N}^k \supset \dots$$

onde $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^j}$ converge *q.t.p.* em ω_j . Definamos então f_k pondo:

f_k é o k -ésimo elemento do conjunto \mathbb{N}^k . Assim, se $k \geq n_0$, $(f_k)_{k \geq n_0}$ é uma subsequência de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^{n_0}}$, e assim f_k converge *q.t.p.* em ω_{n_0} . Como n_0 foi escolhido arbitrariamente, f_k converge *q.t.p.* em Ω ■

O proximo resultado, tem um caracter técnico; contudo tem-se mostrado útil em muitos casos.

Lema 1.51 *Seja $(\Omega, \mu, \mathcal{A})$ um espaço de medida σ -finito. Suponhamos que $f_n \rightarrow f$ em $L^q(\Omega, \mu, \mathcal{A})$ $1 \leq q < \infty$ e $f_n \rightarrow g$ *q.t.p.*. Então $f = g$ (*q.t.p.*).*

Prova: Seja $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ uma seqüência de mensuráveis tais que:

- $\mu(\Omega_j) < \infty$
- $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$

Afirmção : $f = g$ *q.t.p.* em cada Ω_j .

Com efeito, Fixemos $j \in \mathbb{N}$. Tomando $\varepsilon = 1$, pelo *Teorema de Egorov*, existe um conjunto $A_1 \subset \Omega_j$, com $\mu(A_1) < 1$, tal que

$$f_n \rightarrow g, \quad \text{uniformemente em } \Omega_j \setminus A_1.$$

Segue-se, em particular, que $f_n \rightarrow g$ em $L^q(\Omega_j \setminus A_1)$, logo $f = g$ *q.t.p.* em $\Omega_j \setminus A_1$ pois $f_n \rightarrow g$ em L^q , implica que $f_n \rightarrow g$ em L^q , e $(L^q, \sigma(L^q, L^{q'}))$ é Hausdorff.

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, novamente pelo *Teorema de Egorov* existe um conjunto $A_2 \subset A_1$, com $\mu(A_2) < \frac{1}{2}$, tal que

$$f_n \rightarrow g, \quad \text{uniformemente em } A_1 \setminus A_2.$$

Donde $f_n \rightarrow g$ em $L^q(\Omega_j \setminus A_2)$, implicando portanto que $f = g$ *q.t.p.* em $\Omega_j \setminus A_2$. Escolhendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$, obtemos, pelo raciocínio, anterior, que $f = g$ em $\Omega_j \setminus A_n$, onde

$\mu(A_n) < \frac{1}{n}$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos que $f = g$ em $\Omega_j \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, e obviamente o conjunto $A_{\Omega_j} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ tem medida nula. ■

Para finalizar, fazemos a união dos conjuntos B_j onde, $f \neq g$ em Ω_j , e pomos $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. $\mu(B) = 0$ e por construção, $f = g$ em $\Omega \setminus B$. ■

O próximo resultado, versa sobre uma espécie de continuidade fraca dos *Operadores de Nemytskii*. Este resultado possui um caráter crucial em muito dos argumentos utilizados em toda esta dissertação.

Teorema 1.52 ⁸ *Seja $f \in (C)$ uma função de Carathéodory. Se $N_f : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ com $1 < q < \infty$. Se $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ q.t.p., então $N_f(u_n) \rightarrow N_f(u)$*

Prova: Observamos inicialmente que se $N_f : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ então N_f é contínua e limitada. Uma vez que $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$, a mesma é limitada em $L^p(\Omega)$ e pela limitação do Operador de Nemytskii, $N_f(u_n)$ é limitado em $L^q(\Omega)$. Pela reflexibilidade do espaço $L^q(\Omega)$, podemos garantir que existe uma subsequência u_{n_k} que converge fracamente para v . Como $N_f(u_n) \rightarrow N_f(u)$ q.t.p., segue-se pelo Lema (1.51), que $v = N_f(u)$.

Na verdade, $N_f(u_n) \rightarrow N_f(u)$, pois, caso contrário, deveria existir uma vizinhança fraca de $N_f(u)$, digamos $U_{N_f(u)}$, e uma subsequência u_{n_j} de u_n tal que $N_f(u_{n_j}) \notin U_{N_f(u)}$ contudo, aplicando o raciocínio anterior a seqüência u_{n_j} , garantiríamos a existência de uma subsubseqüência $u_{n_{j_k}}$ tal que $N_f(u_{n_{j_k}})$ convergeria fracamente para $N_f(u)$ e portanto, para algum $k \in \mathbb{N}$, $N_f(u_{n_{j_k}}) \in U_{N_f(u)}$, o que geraria uma contradição. ■

Desigualdades em Matemática, possuem uma utilidade e um significado bastante expressivo, dentro do contexto em que elas configuram, em particular, *desigualdades*

⁸A demonstração deste resultado, bem como a prova do Lema (1.51), foram estabelecidos em colaboração com Moreira, D. R.

são sempre muito bem-quistas em Análise Matemática, principalmente, quando se estuda E.D.P. A próxima discursão que pretendemos apresentar é sobre uma Inequação abstrata, versando sobre convergência no sentido fraco em espaços de Banach, que tivemos trabalhando na elaboração desta Dissertação; e tem se mostrada, muito útil em diversos casos.

Quando estamos considerando problemas no âmbito variacional, é comum considerarmos uma seqüência, digamos u_n , minimizante para um determinado funcional, restrito a alguma variedade. Em muito casos podemos, a menos de normalização, supor que $\|u_n\| = 1$. Assim, se o funcional estiver definido em um espaço de funções reflexivo, o que quase sempre acontece, podemos admitir, a menos de uma subsequência, que $u_n \rightharpoonup u$. É comum aparecer, quando manipulamos algebricamente com o funcional, a expressão $\|u_n - u\|$. Pela convexidade da bola, é claro que $\|u\| \leq 1$, e, assim, $\|u_n - u\| \leq 2$. Contudo, a última desigualdade não é muito adequada!

Ao sentirmos a necessidade, de obter uma estimativa melhor para $\|u_n - u\|$, fomos levados a propor inicialmente:

Conjectura : Seja \mathcal{E} um espaço de Banach, e u_n uma seqüência na esfera ($\|u_n\|_{\mathcal{E}} = 1$) convergindo fracamente para um elemento $u \in \mathcal{E}$. Então $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{\mathcal{E}} \leq 1$.

A resposta a esta pergunta, em geral, é não como mostra a seguinte contra-exemplo:

Contra-exemplo: Seja $c = \{(a_n)_{n \geq 1} : a_n \in \mathbb{R}, \text{ e } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n\}$, o espaço das seqüências convergentes. Para não entrarmos no detalhe técnico de quem é o dual, c' , de c ,⁹ basta observar que $c' \subseteq c_0$, isto é, se $(f_n)_{n \geq 1} \in c'$ então, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$. Para isto, basta aplicar o funcional $f = (f_n)_{n \geq 1}$, a seqüência $(1, 1, 1, 1, \dots) \in c$.

Começemos a construir nosso contra-exemplo:

⁹É um simples exercício de análise funcional provar que $c' = l^1$

Defina $u_n = (1, 1, \dots, -1, 1, 1, \dots)$ (-1 na posição n); ponha $u = (1, 1, 1, \dots)$; observe que $u_n - u = (0, 0, 0, 0, \dots, 2, 0, 0, \dots)$ (2 na posição n), e que portanto, $u_n \rightarrow u$; contudo $\|u_n - u\|_c = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Conseguimos uma resposta afirmativa em dois importantes casos, como mostra o seguinte teorema:

Teorema 1.53 ¹⁰ *A conjectura acima, é respondida afirmativamente*

1. Quando \mathcal{E} é um espaço de Hilbert;
2. Quando \mathcal{E} é um espaço do tipo L^p e nos é fornecido em adicional que $u_n \xrightarrow{q.t.p.} u$.

Prova: Seja, $u_n \in S_{\mathcal{E}}(1)$, com $u_n \rightarrow u$. Sempre, podemos supor que $u \neq 0$, pois caso contrário, a asserção é trivial.

Caso 1: Seja G o complemento ortogonal de $\mathbb{R}u$ em \mathcal{E} . Para todo $w \in S_{\mathcal{E}}(1) \setminus B_{\mathcal{E}}(u, 1)$ podemos escrever: $w = au + \tilde{w}$

$$1 = \|w\|_{\mathcal{E}}^2 = |a|^2 \cdot \|u\|_{\mathcal{E}}^2 + \|\tilde{w}\|_{\mathcal{E}}^2$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\zeta) \quad 1 < \|w - u\|_{\mathcal{E}} &= \|(a-1)u + \tilde{w}\|_{\mathcal{E}} \leq |a-1| \cdot \|u\|_{\mathcal{E}} + \|\tilde{w}\|_{\mathcal{E}} \\ &= |a-1| \cdot \|u\|_{\mathcal{E}} + \sqrt{1 - |a|^2} \|u\|_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

Passemos a estudar a função $\varphi(a) = |a-1| \cdot \|u\|_{\mathcal{E}} + \sqrt{1 - |a|^2} \|u\|_{\mathcal{E}}$. Observamos inicialmente que $\varphi(1) = \sqrt{1 - |a|^2} \|u\|_{\mathcal{E}} < 1$ já que estamos supondo $u \neq 0$. Por continuidade, existe $\delta = \delta(\|u\|_{\mathcal{E}}) > 0$, tal que

$$\varphi(a) < 1, \quad \forall a \in (1 - \delta, 1 + \delta)$$

Em vista da desigualdade obtida em (ζ) , concluímos que para todo $w \in S_{\mathcal{E}}(1) \setminus B_{\mathcal{E}}(u, 1)$, $w = au + \tilde{w}$, obrigatoriamente, $a = a(w) \notin (1 - \delta, 1 + \delta)$. Se definirmos o

¹⁰Estes casos são suficientes para os propósitos desta Dissertação, i.e., a veracidade da conjectura para estes espaços contemplam todas as aplicações encontradas nos capítulos posteriores.

funcional linear, $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\Psi(au + v) = a$, teríamos:

$$\Psi(S_E(1) \setminus B_E(u, 1)) \cap (1 - \delta, 1 + \delta) = \emptyset$$

Pela caracterização de convergência fraca, $\Psi(u_n) \rightarrow \Psi(u) = 1$, logo para n suficientemente grande, $\|u_n - u\|_E < 1$ ■

Caso 2: Pelo Teorema (1.49), a menos de uma subsequência temos que

$$-\|u_n\|_p^p + \|u - u_n\|_p^p + \|u\|_p^p < \frac{1}{n}$$

Imediatamente,

$$1 = \|u_n\|_p^p > \|u\|_p^p + \|u - u_n\|_p^p - \frac{1}{n}$$

Para n suficientemente grande, $\|u\|_p^p - \frac{1}{n} > 0$, e portanto $1 > \|u - u_n\|_p^p$ ■

2 Ainda esta em aberto a classificação do espaços que gozam da propriedade conjecturada. Isto é, ainda não conseguimos responder a seguinte questão:

Quais são os Espaços de Banach que possuem a seguinte propriedade:

Para toda seqüência u_n com $\|u_n\| = 1$ e $u_n \rightharpoonup u$, vale que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| \leq 1 ?$$

Capítulo 2

O Princípio de Concentração e Compacidade

2.1 O Teorema de Helly

Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Definimos a variação de f na partição P por:

$$V(f; P) = \sum_{j=0}^{k-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$$

Definição 2.1 A variação total de f no intervalo $[a, b]$ é definida por:

$$V_a^b(f) = \sup_P V(f; P).$$

onde o supremo é tomado sob todas as partições do intervalo $[a, b]$.

Definimos ainda o conjunto $BV[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : V_a^b(f) < \infty\}$. Quando $f \in BV[a, b]$, f é dita ser de variação limitada.

Exemplo 2.1 Toda função monótona pertence a $BV[a, b]$, o mesmo ocorrendo com as funções Lipschitzianas.

Exemplo 2.2 Toda função constante pertence a $BV[a, b]$ e $V_a^b(f) = 0$. Reciprocamente se $f \in BV[a, b]$ é tal que $V_a^b(f) = 0$ então $f \equiv cte$.

Exemplo 2.3 A função $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{cases} \varphi(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

apesar de ser contínua, não pertence a $BV[0, 1]$, pois se tomarmos a partição $P_n = \{0 < \frac{1}{2n} < \dots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1\}$ vemos que $V(\varphi; P_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1$, logo $V_0^1(\varphi) = \infty$.

Proposição 2.2 Toda função de variação limitada em $[a, b]$ é limitada.

Se $f \in BV[a, b]$ e $a < x < b$, tomando a partição $P_x = \{a < x < b\}$ temos $V(f; P_x) \leq V_a^b(f)$, ou seja: $|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_a^b(f)$. Usando a desigualdade triangular, obtemos $|f(x)| \leq \frac{1}{2}\{V_a^b(f) + f(a) + f(b)\}$ ■.

O teorema a seguir mostra que $BV[a, b]$ é um reticulado vetorial.

Proposição 2.3 A soma, a diferença e o produto de duas funções de variação limitada é de variação limitada.

Prova: Se f e $g \in BV[a, b]$ e $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ é uma partição qualquer de $[a, b]$ temos:

$$|(f + g)(t_{j+1}) - (f + g)(t_j)| \leq |f(t_{j+1}) - f(t_j)| + |g(t_{j+1}) - g(t_j)|.$$

Logo $V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$. Analogamente,

$$|(fg)(t_{j+1}) - (fg)(t_j)| \leq |f(t_j)g(t_{j+1}) - f(t_j)g(t_j)| + |f(t_{j+1})g(t_{j+1}) - f(t_j)g(t_{j+1})|.$$

Portanto vale,

$$V_a^b(fg) \leq \sup_{[a, b]} |f| V_a^b(g) + \sup_{[a, b]} |g| V_a^b(f). \quad \blacksquare$$

Corolário 2.4 $(BV[a, b]; \|\cdot\|_{BV})$ é um espaço vetorial normado, onde $\|f\|_{BV} = |f(a)| + V_a^b(f)$.¹

Prova: O fato de $BV[a, b]$ ser um espaço vetorial, é consequência imediata da proposição acima, e do fato que as constantes pertencem a $BV[a, b]$. Passamos a mostrar que $\|\cdot\|_{BV}$ é uma norma. Se $f \in BV[a, b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos para toda partição de $[a, b]$: $|\lambda f(t_{k+1}) - \lambda f(t_k)| = |\lambda| |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$. Logo $\|\lambda f\|_{BV} = |\lambda| \|f\|_{BV}$. Ademais, como escólio da proposição acima, vale a desigualdade triangular para $\|f\|_{BV}$. Finalmente, se $\|f\|_{BV} = 0$ então, $V_a^b(f) = 0$ e $f(a) = 0$, pelo exemplo ?? f é constante, e como $f(a) = 0$, segue-se que $f \equiv 0$. ■

Observação 2.5 Outra propriedade de fácil verificação é que, se $f \in BV[a, b]$ e $a < c < b$, então $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

Proposição 2.6 Uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada se, e somente se, é representável como diferença de duas funções crescentes.

Prova: Se f é diferença de duas funções crescentes, segue-se imediatamente da proposição anterior que $f \in BV[a, b]$.

Reciprocamente, se $f \in BV[a, b]$ defina a função $\pi(x) = V_a^x(f)$ e $\pi(a) = 0$. A função π é crescente devido a observação acima

Afirmção 1: $\vartheta(x) = \pi(x) - f(x)$ é crescente.

Com efeito, se $a \leq x < y \leq b$ temos

$$\vartheta(y) = \pi(y) - f(y) = \pi(x) + V_x^y(f) - f(y)$$

portanto $\vartheta(y) - \vartheta(x) = V_x^y(f) - [f(y) - f(x)] \geq 0$, por definição de $V_x^y(f)$. ■

¹Não é difícil mostrar que na verdade $(BV[a, b]; \|\cdot\|_{BV})$ é um espaço de Banach. Contudo, para evitarmos este trabalho, basta lembrarmos que pelo Teorema de Riesz-Markov, $BV[a, b]$ é o dual de $C[a, b]$ e portanto o mesmo deve ser completo.

A proposição acima, apesar de sua aparência inocente, possui conseqüências profundas. Tal resultado nos permite estender propriedades das funções monótonas, para as funções de variação limitada, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 2.7 *Se $f \in BV[a, b]$ então vale:*

(a) *f só possui descontinuidade de primeira espécie, ou seja, existem os limites laterais $f(c-)$ e $f(c+)$. Em conseqüência, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é, no máximo, enumerável.*

(b) *f é diferenciável q.t.p., ademais f' é integrável.*

Prova: Conseqüência imediata da proposição acima e do fato de que as funções monótonas gozam destas propriedades. ■

Feitas estas considerações preliminares, seguimos agora em direção do *Teorema de Helly*, o qual nos dará um critério de compacidade em $BV[a, b]$, na topologia da convergência pontual.

Lema 2.8 (Cantor-Tychonov) *Seja \mathcal{H} uma família infinita de funções definidas em $[a, b]$. Se \mathcal{H} for simplesmente limitada² então, para todo subconjunto enumerável E de $[a, b]$ é possível encontrar uma seqüência $\{f_n\}$ em \mathcal{H} , de elementos distintos, que converge em todos os pontos de E .*

Prova: Seja $E = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Uma vez que o conjunto $\mathcal{H}(x_1) = \{f(x_1) : f \in \mathcal{H}\}$ é limitado, podemos encontrar um subconjunto infinito $\mathbb{N}^1 \subseteq \mathbb{N}$ tal que a seqüência $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}^1}$ converge, digamos, para a_1 . A seqüência $(f_n(x_2))_{n \in \mathbb{N}^1}$ também é limitada, logo existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}^2 \subseteq \mathbb{N}^1$ tal que $(f_n(x_2))_{n \in \mathbb{N}^2}$ converge para um número real a_2 . Procedendo indefinidamente, podemos, por meio do processo de indução, construir um conjunto enumerável de seqüências conver-

²Para cada $x \in [a, b]$ existe $C_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $\{|f(x)| : f \in \mathcal{H}\} \leq C_x$.

gentes

$$(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}^1}, (f_n(x_2))_{n \in \mathbb{N}^2}, \dots \text{ com } \mathbb{N} \supseteq \mathbb{N}^1 \supseteq \mathbb{N}^2 \supseteq \mathbb{N}^3 \supseteq \dots$$

onde cada seqüência é uma subsequência da precedente. Finalmente, consideremos a seqüência diagonal: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^d}$, onde $\mathbb{N}^d \subseteq \mathbb{N}$ é construída de tal sorte que o seu i -ésimo elemento é o i -ésimo elemento de \mathbb{N}^i . Desta forma temos que a seqüência $\{f_n(x_k)\}_{n \in \mathbb{N}^d} \rightarrow a_k$, pois se $n \geq k$ a mesma é uma subsequência de $\{f_n(x_k)\}_{n \in \mathbb{N}^k}$. ■

Lema 2.9 *Seja \mathcal{F} uma família de funções crescentes definidas em $[a, b]$. Se \mathcal{F} for simplesmente limitada, então existe uma seqüência de funções $\{f_n\}$ em \mathcal{F} que converge pontualmente para uma função crescente $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.*

Prova: Aplicando o Lema de Cantor-Tychonov à família \mathcal{F} e ao conjunto $E = [a, b] \cap \mathbb{Q} \cup \{a\} = \{a_n\}_{n=1}^\infty$, podemos obter uma seqüência $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ em \mathcal{F} , convergindo em todos os pontos de E .

Definimos a função Ψ em $[a, b]$ em duas etapas:

- (i) $\Psi(a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a_k)$. Claramente Ψ é crescente em E .
(ii) Finalmente definimos Ψ em $[a, b]$ pela seguinte fórmula:

$$\Psi(x) = \sup_{a_k < x} (\Psi(a_k)).$$

Desta forma Ψ continua crescente em $[a, b]$, logo o conjunto dos seus pontos de descontinuidade $\mathcal{D}(\Psi)$ é no máximo enumerável.

Afirmção 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi) = \Psi(\xi)$ se $\xi \notin \mathcal{D}(\Psi)$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $a_k < \xi < a_i$ tais que a_k e $a_i \in E$ e $\Psi(a_i) - \Psi(a_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Seleccionamos agora $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$,

$$|f_n(a_k) - \Psi(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } |f_n(a_i) - \Psi(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo temos: $\Psi(\xi) - \varepsilon < f_n(a_k) \leq f_n(a_i) < \Psi(\xi) + \varepsilon$, se $n > n_0$.

Desde que $f_n(a_k) \leq f_n(\xi) \leq f_n(a_i)$, obtemos:

$$\Psi(\xi) - \varepsilon < f_n(\xi) < \Psi(\xi) + \varepsilon$$

Finalmente, aplicando o Lema de Cantor-Tychonov a seqüência $\{f_n\}$ e ao conjunto $\mathcal{D}(\Psi)$, obtemos uma subseqüência de f_n que converge em todos os pontos de $[a, b]$ para uma função $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ obviamente crescente. ■

Teorema 2.10 (Helly) *Seja \mathcal{F} uma família infinita de funções, $\mathcal{F} = \{f_\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \lambda \in \Lambda\}$. Se \mathcal{F} for simplesmente limitada e existir uma constante $K \in \mathbb{R}^+$ tal que $V_a^b(f) \leq K$, então existe uma seqüência de funções distintas $\{f_n\}$ em \mathcal{F} que converge pontualmente para uma função $\varphi \in BV[a, b]$.*

Prova: Para cada $f \in \mathcal{F}$, definimos:

$$\pi_f(x) = V_a^x(f) \quad \text{e} \quad \vartheta_f(x) = \pi_f(x) - f(x).$$

Como já vimos π_f e ϑ_f são crescentes, ademais:

$$|\pi_f(x)| \leq K \quad \text{e} \quad |\vartheta_f(x)| \leq K + K(x)$$

Aplicando o Lema (2.9) à família $\{\pi_f\}_{f \in \mathcal{F}}$ podemos encontrar uma seqüência pontualmente convergente, π_{f_k} , digamos $\pi_{f_k} \rightarrow \alpha(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Para cada função π_{f_k} consideremos a função corresponde ϑ_{f_k} . Aplicando o Lema (2.9) a família $\{\vartheta_{f_k}\}$ podemos obter uma subseqüência $\vartheta_{f_{k_i}}$ convergente, digamos $\vartheta_{f_{k_i}} \rightarrow \beta(x)$. Assim a seqüência $f_{k_i}(x) = \pi_{f_{k_i}} - \vartheta_{f_{k_i}}$ converge para a função $\varphi(x) = \alpha(x) - \beta(x)$. Como α e β são crescentes, segue-se que $\varphi \in BV[a, b]$, pela Proposição 1.6. ■

Corolário 2.11 *Seja \mathcal{F} uma família de funções definidas em \mathbb{R} . Denote por $F_n = \{f|_{[-n, n]} : f \in \mathcal{F}\}$. Se \mathcal{F} for simplesmente limitada e para cada $n \in \mathbb{N}$*

existir uma constante $K(n) \in \mathbb{R}^+$ tal que $V_{-n}^n(\psi) \leq K(n)$ para toda $\psi \in F_n$, então podemos extrair uma seqüência $\{f_j\}$ de \mathcal{F} convergindo pontualmente em \mathbb{R} .

Prova: Para $n = 1$, existe uma seqüência $f_j^{(1)} \rightarrow f^{(1)}$, em $[-1,1]$. Aplicando o Teorema de Helly a família $\{f_j^{(1)}\}$ no intervalo $[-2,2]$, obtemos uma subseqüência $f_{j_k}^{(2)} \rightarrow f^{(2)}$ em $[-2,2]$. Continuando o processo, contruímos um conjunto enumerável de seqüências convergentes onde cada seqüência é uma subseqüência da precedente, logo a seqüência diagonal $f_j^{(j)}$ converge para uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. ■

2.2 O Princípio Heurístico

Estaremos interessados na seguinte natureza de problemas:

Sejam \mathcal{H} um espaço de funções definidas no \mathbb{R}^N e J, E , funcionais em \mathcal{H} (ou em um subdomínio de \mathcal{H}) do tipo:

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^N} e(x, Au(x)) dx \quad ; \quad J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} j(x, Bu(x)) dx \quad (2.1)$$

onde $e : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $j : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$; A, B são operadores de \mathcal{H} em \mathcal{E} e \mathcal{F} (espaços de funções definidos do \mathbb{R}^N com valores em \mathbb{R}^m , respectivamente em \mathbb{R}^n), os quais comutam com translações do \mathbb{R}^N , i.e., $A(\phi) \circ T = A(\phi \circ T)$ e $B(\phi) \circ T = B(\phi \circ T)$ para toda $\phi \in \mathcal{H}$ e toda translação $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Para simplificar vamos assumir $J(0) = 0$. Estamos interessados em estudar o seguinte problema de minimização:

$$(M) \quad I_\lambda = \inf\{E(u) : u \in \mathcal{H} \text{ e } J(u) = 1\} \quad (2.2)$$

Iremos mergulhar o Problema (M) em uma família a um parâmetro de problemas (M_λ) :

$$(M_\lambda) \quad I_\lambda = \inf\{E(u) : u \in \mathcal{H} \text{ e } J(u) = \lambda\} \quad (2.3)$$

É razoável supor que se possa definir "um problema no infinito". Por exemplo nós assumimos que:

$$j(x, q) \longrightarrow j^\infty(q), \quad e(x, p) \longrightarrow e^\infty(p), \quad \text{com } |x| \longrightarrow \infty, \forall p, q \in \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

O preciso significado de (2.4) depende de cada problema específico. Nós então consideramos o problema no infinito:

$$(M_\lambda^\infty) \quad I_\lambda^\infty = \inf\{E^\infty(u) : u \in \mathbb{H}, J^\infty(u) = \lambda\} \quad (2.5)$$

onde,

$$E^\infty(u) = \int_{\mathbb{R}^N} e^\infty(Au(x))dx \quad ; \quad E^\infty(u) = \int_{\mathbb{R}^N} j^\infty(Bu(x))dx$$

Finalmente iremos assumir que temos algum tipo de estimativa a priori para os problemas (M_λ) e (M_λ^∞) , assegurando, em particular, que:

$$K_\lambda = \{u \in \mathbb{H} : J(u) = \lambda\} \neq \emptyset \quad e \quad I_\lambda > -\infty$$

para todo $\lambda > 0$ (ou $\lambda \in (0, 1]$) e que as seqüências minimizantes para $(M_\lambda) - (M_\lambda^\infty)$ são limitadas em \mathbb{H} . Novamente, estas estimativas a priori são adaptadas em cada problema particular.

Passamos a analisar a **condição de sub-aditividade**:

Primeiramente, observemos que sempre se tem:

$$I_\lambda \leq I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}^{\infty} \quad \forall \alpha \in [0, \lambda[\quad (2.6)$$

onde definimos, $I_0 = 0$. Iremos justificar *heurísticamente* porque (2.6) deve ocorrer:

Prova heurística:

Seja $\varepsilon > 0$ e $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ satisfazendo:

$$\begin{cases} I_\alpha \leq E(u_\varepsilon) \leq I_\alpha + \varepsilon, & J(u_\varepsilon) = \alpha \\ I_{\lambda-\alpha}^\infty \leq E^\infty(v_\varepsilon) \leq I_{\lambda-\alpha}^\infty + \varepsilon, & J^\infty(v_\varepsilon) = \lambda - \alpha \end{cases} \quad (2.7)$$

Por um argumento de densidade, podemos assumir que u_ε e v_ε possuem suporte compacto e denotemos por $v_\varepsilon^n = v_\varepsilon(\cdot + n\chi)$ onde χ é algum vetor unitário dado do \mathbb{R}^N . Para

n suficientemente grande, a distância entre $\text{supp}(u_\varepsilon)$ e $\text{supp}(v_\varepsilon^n)$ é estritamente positiva, e tende para $+\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Observemos que

$$\begin{aligned} E(u_\varepsilon + v_\varepsilon^n) &= \int_{\mathbb{R}^N} e(x, A(u_\varepsilon + v_\varepsilon^n)(x)) dx \\ &= \int_{\text{supp}(u_\varepsilon) \dot{\cup} \text{supp}(v_\varepsilon^n)} e(x, A(u_\varepsilon + v_\varepsilon^n)(x)) dx \\ &= \int_{\text{supp}(u_\varepsilon)} e(x, A(u_\varepsilon + v_\varepsilon^n)(x)) dx + \int_{\text{supp}(v_\varepsilon^n)} e(x, A(u_\varepsilon + v_\varepsilon^n)(x)) dx \end{aligned}$$

Agora, $\text{supp}(v_\varepsilon^n) = \text{supp}(v_\varepsilon) + n\chi$, logo $\inf_{x \in \text{supp}(v_\varepsilon^n)} |x| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$. Portanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\text{supp}(v_\varepsilon^n)} e(x, A(v_\varepsilon^n)(x)) - e^\infty(A(v_\varepsilon^n)(x)) dx \rightarrow 0.$$

Repetindo o argumento para o funcional J , obtemos:

$$\begin{cases} E(u_\varepsilon + v_\varepsilon^n) - \{E(u_\varepsilon) + E^\infty(v_\varepsilon^n)\} \rightarrow 0. \\ J(u_\varepsilon + v_\varepsilon^n) - \{J(u_\varepsilon) + J^\infty(v_\varepsilon^n)\} \rightarrow 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Uma vez que E^∞ e J^∞ são invariantes por translações, nós finalmente obtemos:

$$\begin{cases} I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}^\infty \leq \lim_n E(u_\varepsilon + v_\varepsilon^n) = E(u_\varepsilon) + E^\infty(v_\varepsilon^n) \leq I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}^\infty + 2\varepsilon. \\ \lim_n \{J(u_\varepsilon) + J^\infty(v_\varepsilon^n)\} = \lambda \quad \therefore \quad \lim_n J(u_\varepsilon + v_\varepsilon^n) = \lambda \end{cases} \quad (2.9)$$

e, por definição de I_λ , concluímos:

$$I_\lambda \leq I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}^\infty + 2\varepsilon \quad \blacksquare$$

Vamos explicar agora os resultados típicos que podemos obter com o uso do princípio de concentração e compacidade.

Iremos inicialmente nos restringirmos ao caso onde as funções e e j dependem de x . Neste caso iremos mostrar que, para cada $\lambda > 0$ fixado, todas as seqüências

de minimização do problema (M_λ) são relativamente compactas se, e somente se é satisfeita a **condição de subaditividade estrita**:

$$(S.1) \quad I_\lambda < I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}^\infty \quad \forall \alpha \in [0, \lambda[. \quad (2.10)$$

No caso onde e e j independem de x , (M_λ) é equivalente a (M_λ^∞) e, portanto, invariante por translações. Assim, para cada $\lambda > 0$ fixado, toda seqüência minimizante do problema (M_λ) é relativamente compacta a menos de translações se, e somente se, é satisfeita a seguinte **condição de subaditividade estrita**:

$$(S.2) \quad I_\lambda < I_\alpha + I_{\lambda-\alpha} \quad \forall \alpha \in [0, \lambda[. \quad (2.11)$$

Observe que $I_\alpha = I_\alpha^\infty$, $\forall \alpha \in]0, \lambda[$ (pois $E^\infty = E$ e $J^\infty = J$). O fato de que a condição (S.1) (resp. (S.2)) é necessária para a compacidade de todas as seqüências minimizantes é consequência do seguinte argumento heurístico:

Suponha que $I_\lambda = I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}^\infty$ com $\alpha \in]0, \lambda[$. Seja u_n (resp. v_n) seqüência minimizante com suporte compacto do problema (M_α) (resp. $M_{\lambda-\alpha}^\infty$). Defina $\tilde{v}_n(x) = v_n(x + \xi_n)$, $\xi_n \in \mathbb{R}^N$ com $|\xi_n|$ grande o suficiente de tal sorte que

$$\text{dist}(\text{supp } u_n ; \text{supp } \tilde{v}_n) \rightarrow \infty.$$

Assim teríamos, pela invariância por translações dos funcionais J^∞ e E^∞ , que:

$$J^\infty(\tilde{v}_n) = \lambda - \alpha, \quad E^\infty(\tilde{v}_n) = E(\tilde{v}_n) \rightarrow I_{\lambda-\alpha}^\infty \quad (\text{por (3.1)}).$$

Finalmente construímos a seqüência $\omega_n = u_n + \tilde{v}_n$.

Afirmção: ω_n não pode ser relativamente compacta.

Com efeito, para toda função de suporte compacto φ nós temos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \omega_n \varphi = 0 \quad \text{se } n \geq n(\varphi)$$

Se existisse uma subseqüência $\omega_{n_j} \rightarrow \omega$, por argumento de densidade, $\omega = 0$. Por outro lado, $J(\omega_{n_j}) \rightarrow \lambda$ (pelo argumento (2.8)), mas $\lambda \neq 0$ e $J(0) = 0$ o que seria uma

contradição !!! Observemos que, por (2.8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\omega_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{E(u_n) + E^\infty(\tilde{v}_n)\} = I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}^\infty = I_\lambda \quad \blacksquare$$

Em conclusão, nós vimos que as condições (S.1), (S.2), são necessárias para a compacidade de todas as seqüências minimizantes. Iremos mostrar na próxima seção que (S.1), (S.2) são também suficientes para a compacidade das seqüências minimizantes.

Ainda heurísticamente falando, o que iremos observar é que as condições (S.1) e (S.2) impedem o possível "espalhamento" de seqüências minimizantes u_n , fazendo com que as mesmas permaneçam *concentradas*.

2.3 O Lema de Concentração e Compacidade

Nesta seção, nos propomos a demonstrar o *Lema de Concentração e Compacidade*, o qual tem se mostrado um eficaz método para resolver problemas de minimização em domínios não limitados. Em seguida, iremos mostrar, de forma heurística, a equivalência entre a compacidade de todas as seqüências minimizantes e uma condição de subaditividade estrita. (a saber (S.1) ou (S.2)). A prova do Lema é baseada na noção de *função de concentração de medida*, introduzida por Lévy.

Lema 2.12 (Lions, [PL1]) *Seja $\{\rho_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência em $L^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo:*

$$\rho_n \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \, dx = \lambda$$

onde $\lambda > 0$ está fixado. Então existe uma subseqüência $\{\rho_{n_k}\}_{k \geq 1}$ satisfazendo uma, e somente uma das três seguintes possibilidades:

(i) **(compacidade)** *Existe $y_k \in \mathbb{R}^N$ tais que:*

$\forall \varepsilon > 0, \exists R < \infty$ *tal que :*

$$\int_{y_k + B_R} \rho_{n_k}(x) \, dx \geq \lambda - \varepsilon$$

(ii) (anulamento) Fixado $R > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R} \rho_{n_k}(x) dx = 0, \quad \forall R \geq 0$$

(iii) (dicotomia) Existe $\alpha \in]0, \lambda[$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existem $K_\varepsilon \geq 1$ e seqüências $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$, $\{\psi_k\}_{k \geq 1} \subseteq L^1_+(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo, para cada $k \geq K_\varepsilon$,

$$\begin{cases} \|\rho_{n_k} - (\varphi_k + \psi_k)\|_{L^1} \leq \varepsilon, \\ \left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_k dx - \alpha \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \int_{\mathbb{R}^N} \psi_k dx - (\lambda - \alpha) \right| \leq \varepsilon \\ \text{dist}(\text{supp} \varphi_k; \text{supp} \psi_k) \rightarrow \infty \end{cases}$$

Prova: Defina para cada $n \in \mathbb{N}$ a função

$$Q_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad Q_n(r) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B(r)} \rho_n(x) dx$$

Observamos que:

a) $Q_n(r)$ é monótona não decrescente;

b) $\lim_{r \rightarrow \infty} Q_n(r) = \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Portanto,

$$|Q_n(r)| \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } r \geq 0. \text{ Ademais, } V_0^r(Q_n|_{[0,r]}) = Q_n(r) \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Segue-se, imediatamente, do corolário do Teorema de Helly (Corolário(2.11)) que existe uma subsequência $\{Q_{n_k}\}$ convergindo pontualmente para uma função positiva e não decrescente Q , com $|Q(r)| \leq \lambda$.

Defina $\alpha \in [0, \lambda]$ por $\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} Q(r)$.

Caso 1: $\alpha = 0$

Neste caso $Q \equiv 0$ uma vez que Q é crescente, ou seja, $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_{n_k}(r) = 0, \forall r \geq 0$.

0. Mais precisamente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R} \rho_{n_k}(x) dx = 0, \quad \forall R \geq 0,$$

e portanto acontece o anulamento (ii).

Caso 2: $\alpha = \lambda$

Isto é, $\lim_{r \rightarrow \infty} Q(r) = \lambda$, ou mais precisamente, dado $\varepsilon > 0$, $\exists r'_\varepsilon > 0$ tal que $Q(r) > \lambda - \varepsilon$ se $r \geq r'_\varepsilon$. Como $\lim_k Q_{n_k}(r'_\varepsilon) = Q(r'_\varepsilon) > \lambda - \varepsilon$ existe $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, $Q_{n_k}(r'_\varepsilon) > \lambda - \varepsilon$ se $FK \geq K_\varepsilon$. Para cada $j = 1, 2, \dots, K_\varepsilon - 1$ vale que $\lim_{r \rightarrow \infty} Q_{n_j}(r) = \lambda$ portanto podemos obter $r_j > 0$ tais que:

$$Q_{n_j}(r) > \lambda - \varepsilon \quad \forall r > r_j \quad (j = 1, 2, \dots, K_\varepsilon - 1).$$

Considere $r_\varepsilon = \max\{r_1, r_2, \dots, r_{K_\varepsilon-1}, r'_\varepsilon\}$. Então:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_r} \rho_{n_k}(x) dx = Q_{n_k}(r) > \lambda - \varepsilon, \quad \forall r > r_\varepsilon \text{ e } k \geq 1$$

Logo, podemos obter para cada $k \geq 1$ um elemento $y_k^\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ tais que:

$$\int_{y_k^\varepsilon+B_r} \rho_{n_k}(x) dx > \lambda - \varepsilon, \quad \forall r > r_\varepsilon \text{ e } k \geq 1$$

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existem $r_\varepsilon > 0$ e uma seqüência $\{y_k^\varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^N$ tais que:

$$\int_{y_k^\varepsilon+B_r} \rho_{n_k}(x) dx > \lambda - \varepsilon, \quad \forall r > r_\varepsilon \text{ e } k \in \mathbb{N}$$

Para concluirmos que ocorre (i) falta apenas "nos livrarmos" da dependência do ε na seqüência $\{y_k^\varepsilon\}$.

Afirmção 1: Se ε e $\tilde{\varepsilon} \in (0, \frac{\lambda}{2}]$ então $B(y_k^\varepsilon, r) \cap B(y_k^{\tilde{\varepsilon}}) \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad r \geq r_\varepsilon \text{ e } \tilde{r} \geq r_{\tilde{\varepsilon}}$.

Com efeito, se tais conjuntos fossem disjuntos teríamos:

$$\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{n_k} \geq \int_{B(y_k^\varepsilon, r) \dot{\cup} B(y_k^{\tilde{\varepsilon}})} \rho_{n_k} = \int_{B(y_k^\varepsilon, r)} \rho_{n_k} + \int_{B(y_k^{\tilde{\varepsilon}})} \rho_{n_k} > 2\lambda - \varepsilon - \tilde{\varepsilon} \geq \lambda.$$

Escolhemos agora $\tilde{r}_\varepsilon = r_{\frac{\lambda}{2}} + 2r_\varepsilon$ e $y_k = y_k^{\lambda/2}$. Observemos que $B(y_k^\varepsilon, r_\varepsilon) \subseteq B(y_k, \tilde{r}_\varepsilon)$.

Donde obtemos a seguinte desigualdade

$$\int_{B(y_k, \tilde{r}_\varepsilon)} \rho_{n_k} \geq \int_{B(y_k^\varepsilon, r_\varepsilon)} \rho_{n_k} \geq \lambda - \varepsilon.$$

Ou seja, nós mostramos que se $\alpha = \lambda$ existe uma seqüência $\{y_k\} \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ podemos obter $\tilde{r}_\varepsilon > 0$ satisfazendo:

$$\int_{y_k+B_{\tilde{r}_\varepsilon}} \rho_{n_k}(\xi) d\xi > \lambda - \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e portanto ocorre (i).

Caso 3: $0 < \alpha < \lambda$

Lembremos que $\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} Q(r)$ e logo dado $\varepsilon > 0$, existe $r_\varepsilon > 0$ tal que se $r > r_\varepsilon$ vale

$$\alpha - \varepsilon < Q(r) < \alpha + \varepsilon.$$

Como $Q(r) = \lim_k Q_{n_k}(r)$, deve existir $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\alpha - \varepsilon < Q_{n_k}(r_\varepsilon) < \alpha + \varepsilon, \quad \forall K \geq K_\varepsilon.$$

Por definição, $Q_{n_k}(r) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B(r)} \rho_{n_k}$, e logo podemos obter, para cada $K \geq K_\varepsilon$, $y_k = y_k(\varepsilon) \in \mathbb{R}^N$, tal que:

$$\alpha - \varepsilon < \int_{y_k+B(r_\varepsilon)} \rho_{n_k} \leq Q_{n_k}(r_\varepsilon) < \alpha + \varepsilon.$$

Passamos a definir as seqüências solicitadas pela dicotomia.

Defina $\varphi_k = \rho_{n_k} \chi_{B(y_k, r_\varepsilon)}$.

Verifica-se facilmente que $0 \leq \varphi_k \leq \rho_{n_k}$ e $\varphi_k \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$, ademais:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_k = \int_{B(y_k, r_\varepsilon)} \rho_{n_k} \quad \therefore \quad \left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_k(\xi) d\xi - \alpha \right| < \varepsilon.$$

Afirmção 1: Podemos encontrar uma seqüência $r_k \geq r_\varepsilon$ com $r_k \rightarrow \infty$ e $\alpha - \varepsilon < Q_{n_k}(r_k) < \alpha + \varepsilon$.

Com efeito, consideremos a seqüência $s_j = r_\varepsilon + j$. Desde que $Q_{n_k}(s_j) \rightarrow Q(s_j)$ existe $K_j \in \mathbb{N}$, $K_j \geq K_{j-1} \geq K_\varepsilon$ tal que

$$\alpha - \varepsilon < Q_{n_k}(s_j) < \alpha + \varepsilon, \quad \forall K \geq K_j$$

Para cada $K \geq K_\varepsilon$, definimos r_k da seguinte forma:

(*) Se $K \in [K_j, K_{j+1}]$ pomos $r_k = s_j$.

(Bem entendido, o que fizemos foi apenas encontrar uma subseqüência $(K_j)_{j \geq 1}$ e depois "completamos" a mesma pela regra (*) os que obviamente não compromete

o nosso propósito). ■

Construída desta forma temos

$$\alpha - \varepsilon < Q_{n_K}(r_K) < \alpha + \varepsilon \quad \forall K \geq K_\varepsilon$$

Portanto $\forall K \geq K_\varepsilon$ vale

$$\alpha - \varepsilon < \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B(r_k)} \rho_{n_k} < \alpha + \varepsilon \quad \text{com } r_k \geq r_\varepsilon \text{ e } r_k \rightarrow \infty \text{ (pois } s_j \rightarrow \infty).$$

Considerando a seqüência $\{y_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathbb{R}^N$ defina:

$$\alpha - \varepsilon < \int_{y_k+B_{r_\varepsilon}} \rho_{n_k} \leq \int_{y_k+B_{r_k}} \rho_{n_k} \leq Q_{n_k}(r_k) < \alpha - \varepsilon, \quad \forall k \geq K_\varepsilon$$

Finalmente, defina $\psi_k = \rho_{n_k} \chi_{B^c(y_k, r_k)}$.

Desta forma, é claro que vale: $0 \leq \psi_k \leq \rho_{n_k}$ e

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \psi_k(\xi) d\xi - (\alpha - \varepsilon) \right| &= \left| \int_{B^c(y_k, r_k)} \rho_{n_k} - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{n_k} + \alpha \right| \\ &= \left| \int_{B(y_k, r_k)} \rho_{n_k} - \alpha \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Além disso:

$$\begin{aligned} \|\rho_{n_k} - (\varphi_k + \psi_k)\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_{n_k} - (\rho_{n_k} \chi_{B(y_k, r_\varepsilon)} + \rho_{n_k} \chi_{B^c(y_k, r_k)})| \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{n_k} - (\rho_{n_k} \chi_{B(y_k, r_\varepsilon) \cup B^c(y_k, r_k)}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{n_k} \chi_{[B(y_k, r_\varepsilon) \cup B^c(y_k, r_k)]^c} \\ &= \int_{B(y_k, r_k)} \rho_{n_k} - \int_{B(y_k, r_\varepsilon)} \rho_{n_k} \\ &< (\alpha + \varepsilon) - (\alpha - \varepsilon) = 2\varepsilon \end{aligned}$$

e como $\text{supp} \varphi_k \subseteq B(y_k, r_\varepsilon)$ e $\text{supp} \psi_k \subseteq \mathbb{R}^N \setminus B(y_k, r_k)$ obtemos que:

$$\text{dist}(\text{supp} \varphi_k; \text{supp} \psi_k) \geq r_k - r_\varepsilon \rightarrow +\infty \text{ com } k \rightarrow \infty$$

ou seja, mostramos que deve ocorrer a dicotomia (iii) ■

É importante observar que o Lema de Concentração e Compacidade demonstrado acima pode ser enunciado, mais geralmente, versando sob uma seqüência de medidas positivas com integral constante, a saber, podemos enunciar o seguinte resultado:

Lema 2.13 (Concentração e Compacidade em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$) *Seja $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo a:*

$$\mu_n \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad \int_{\mathbb{R}^N} d\mu_n = \lambda,$$

onde $\lambda > 0$ esta fixado. Então existe uma subseqüência $\{\mu_{n_k}\}_{k \geq 1}$ satisfazendo a uma, e somente uma das três seguintes possibilidades:

(i) **(compacidade)** *Existe $y_k \in \mathbb{R}^N$ tais que:*

$\forall \varepsilon > 0, \exists R < \infty$ tal que :

$$\int_{y_k + B_R} d\mu_{n_k}(x) \geq \lambda - \varepsilon$$

(ii) **(anulamento)**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y + B_R} d\mu_{n_k} = 0, \quad \forall R \geq 0$$

(iii) **(dicotomia)** *Existe $\alpha \in]0, \lambda[$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $K_\varepsilon \geq 1$ e seqüências de medidas positivas $\{\mu_k^1\}_{k \geq 1}$, $\{\mu_k^2\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo, para cada $K \geq K_\varepsilon$:*

$$\begin{cases} \|\mu_{n_k} - (\mu_k^1 + \mu_k^2)\|_{\mathcal{M}} \leq \varepsilon, \\ \left| \int_{\mathbb{R}^N} d\mu_k^1 - \alpha \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \int_{\mathbb{R}^N} d\mu_k^2 - (\lambda - \alpha) \right| \leq \varepsilon \\ \text{dist}(\text{supp}\mu_k^1; \text{supp}\mu_k^2) \rightarrow \infty \end{cases}$$

A demonstração desta versão do Lema de Concentração e Compacidade é precisamente igual a prova do Lema (2.12). Esta generalização será útil no Capítulo 3,

para a obtenção do *Segundo Princípio de Concentração e Compacidade*.

Antes de apresentarmos uma aplicação concreta do *Princípio de Concentração e Compacidade* iremos explicar como usar o Lema (2.12) heurísticamente:

Consideremos o caso em que e, j dependem de x . Vamos assumir que (S.1) ocorre, e tomemos uma seqüência minimizante $\{u_n\}_{n \geq 1}$ de (M_λ) :

$$E(u_n) \longrightarrow I_\lambda \quad J(u_n) = \lambda$$

Vamos aplicar o Lema (2.12) com $\rho_n = j(x, B(u_n)(x))$, para obter uma subsequência $\{u_{n_k}\}_k$ tal que (i), (ii), ou (iii) ocorre.

(ii) não pode ocorrer.

Suponha que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_R} \rho_{n_k} = 0 \quad \forall R > 0$. Então, dado $k > 0$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\int_{B(k)} j(x, B(u_{n_k})) < \frac{1}{k}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N$$

Portanto,

$$\int_{B(k)} j(x+y, B(u_{n_k})(x+y)) = \int_{B(k)} j(x+y, B(u_{n_k}(\cdot+y)(x))) < \frac{1}{k} \quad \forall y \in \mathbb{R}^N$$

Agora: $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_{B(k)} j(x+y, B(u_{n_k}(\cdot+y)(x))) - j^\infty(B(u_{n_k}(\cdot+y)(x))) = 0$, o que implicaria que existe $y_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que:

$$\int_{B(k)} j^\infty(B(u_{n_k}(\cdot+y_0)(x))) < \frac{1}{k}$$

Finalmente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} j^\infty(B(u_{n_k}(x))) - \int_{y_0+B(k)} j^\infty(B(u_{n_k}(x))) = 0.$$

e portanto obtemos $J^\infty(u_{n_k}) \longrightarrow 0$ e $E(u_{n_k}) \longrightarrow I_\lambda$ o que implicaria que $I_\lambda^\infty \leq I_\lambda$ o que contradiz (S.1) se tomarmos $\alpha = 0$ ■

(iii) não ocorre: Neste caso fica claro, como escólio da demonstração do Lema (2.12), que: Se (iii) ocorre, para todo $\varepsilon > 0$ podemos obter φ_k e ψ_k em \mathcal{H} satisfazendo, para k suficientemente grande, $u_{n_k} = \varphi_k + \psi_k + \vartheta_k$ e

$$\begin{cases} |J(\varphi_k) - \alpha| \leq \varepsilon, & |J(\psi_k) - (\lambda - \alpha)| \leq \varepsilon \\ \text{dist}(\text{supp}\varphi_k, \text{supp}\psi_k) \rightarrow \infty, & \|\vartheta_k\| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Repassando α por $\lambda - \alpha$ se necessário, podemos assumir, sem perda de generalidade, que:

$$J(\psi_k) - J^\infty(\psi_k) \rightarrow 0, \quad \liminf [E(\psi_k) - E^\infty(\psi_k)] \geq 0$$

Finalmente obteríamos:

$$\begin{aligned} I_\lambda = \lim E(u_{n_k}) &\geq \liminf [E(\varphi_k) - E^\infty(\psi_k)] - \delta(\varepsilon) \\ &\geq I_{\alpha-\varepsilon} + I_{\lambda+\alpha-\varepsilon}^\infty - \delta(\varepsilon) \end{aligned}$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos:

$$I_\lambda \geq I_\alpha + I_{\lambda-\alpha}^\infty$$

o que contradiz (S.1). ■

Portanto ocorre (i)

Falta apenas mostrar que os $\{y_k\}$ dados em (i) são limitados:

Suponha que $\{y_k\}$ não são limitados:

$$\begin{aligned} I_\lambda = \lim E(u_{n_k}) &\geq \liminf E^\infty(u_{n_k}), \quad |y_k| \rightarrow \infty \\ \lambda = J(u_{n_k}) &= \lim J^\infty(u_{n_k}) \end{aligned}$$

e assim: $I_\lambda \geq I_\lambda^\infty$, o que contradiz a condição (S.1). ■

Observação 2.14 *Os argumentos mostrados acima não são rigorosos, mas justificáveis em cada problema específico.*

2.4 Uma Aplicação do Lema de Concentração e Compacidade

Nesta seção estaremos interessados em resolver uma equação elíptica no \mathbb{R}^N . Esperamos que a aplicação aqui apresentada, seja simples o suficiente para elucidar o

Princípio de Concentração e Compacidade e ao mesmo tempo suficientemente desafiador para enaltecer o Lema (2.12).

Seja $a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua estritamente positiva, satisfazendo:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a_\infty > 0$$

Consideremos a seguinte equação:

$$(\star) \begin{cases} -\Delta u + a(x)u = u|u|^{p-2} & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u > 0, \quad u(x) \rightarrow 0 & \text{quando } |x| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

onde $p > 2$ satisfaz:

$$\begin{cases} p \in (2, \infty), & \text{se } N = 2 \\ p \in (2, \frac{2N}{N-2}), & \text{se } N \geq 3 \end{cases}$$

Naturalmente, associa-se ao problema (\star) o funcional; $E : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)|u|^2) dx$$

Uma solução da equação (\star) é precisamente um ponto crítico do funcional E restrito a variedade M definida por:

$$M = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1 \right\}$$

Observemos, que se $a(x) \equiv a_\infty$, E seria invariante por translações, isto é, se $T_{x_0} : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ é definido por $T(u(x)) = u(x - x_0)$, valeria que $E \circ T_{x_0} = E$. No caso geral, observamos que se fizermos uma substituição de variáveis, encontramos:

$$E \circ T_{x_0}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x + x_0)|u|^2) dx \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a_\infty|u|^2) dx \spadesuit$$

quando $|x_0| \rightarrow \infty$. Isto nos leva a definir o *Funcional no Infinito* por:

$$E^\infty(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + a_\infty|u|^2) dx$$

Como foi observado, $E^\infty \circ T_{x_0} = E^\infty$.

A passagem \spadesuit é justificada pelo seguinte lema, o qual será utilizado na demonstração do Teorema Principal.

Lema 2.15 *Seja $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ uma função com a seguinte propriedade: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 0$. Então para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, a menos de uma subsequência,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(x + n \cdot \chi) \cdot f \longrightarrow 0 \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

onde χ é um vetor unitário qualquer em \mathbb{R}^N .

Prova: Consideremos a seqüência de funcionais lineares contínuos $\Psi_n : L^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Psi_n(f) = \int_{\mathbb{R}^N} a(x + n\chi) \cdot f \cdot dx$. Tendo em vista que $L^1(\mathbb{R}^N)$ é separável, a menos de uma subsequência, podemos assumir que $\Psi_n \xrightarrow{*} \Psi$. Fixemos uma função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $R(\varepsilon)$, tal que $|a(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in B^c(R(\varepsilon))$. Fixado $R(\varepsilon)$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n_0 \cdot \chi + \text{supp} \varphi \subseteq B^c(R(\varepsilon))$, e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x + n_0 \cdot \chi) \cdot \varphi \leq \varepsilon \cdot \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

ou seja $\Psi_n(\varphi) \rightarrow 0$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Isto significa que: $\Psi|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0$, e por densidade, segue-se que $\Psi = 0$ ■

Passemos a discutir o resultado principal desta seção, o qual em particular, irá nos fornecer condições para que o problema (\star) admita solução.

Teorema 2.16 ³ *Suponha que $I = \inf_M E < \inf_M E^\infty = I^\infty$ então existe uma solução positiva $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ da equação (\star) . Ademais, a condição de subaditividade estrita acima é necessária e suficiente para a compacidade relativa de todas as seqüências minimizantes de E em M .*

³Este resultado pode ser provado sem o uso do Lema de Concentração e Compacidade, e já tinha sido estabelecido por Lions, P. L.

Prova: A necessidade da subaditividade estrita, para a compacidade relativa de todas as seqüências minimizantes de E em M , é perfeitamente justificável seguindo o *Princípio Heurístico*, se não vejamos:

Seja u_n uma seqüência minimizante de E^∞ . Por um argumento de densidade, podemos supor que $\text{supp}\{u_n\}$ é compacto para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixemos um vetor $\chi \in S^{N-1}$ e definamos $\tilde{u}_n(x) = u_n(x + \alpha_n \cdot \chi)$, onde α_n é uma seqüência adequada de números reais positivos, tais que $\alpha_n \rightarrow \infty$, suficientemente rápido. É claro que \tilde{u}_n continua sendo uma seqüência minimizante de E^∞ e portanto $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ é limitado. Observemos ainda que, dado $\varepsilon > 0$, existe $R_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $|x| > R_0 \implies |a(x) - a_\infty| < \frac{\varepsilon}{\sup_{n \geq 1} \|\tilde{u}_n\|_2^2}$. Se n for suficientemente grande, de tal sorte que $\text{supp } \tilde{u}_n \in B^c(R_0)$, segue-se que:

$$|E(\tilde{u}_n) - E^\infty(\tilde{u}_n)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} (a(x) - a_\infty) \cdot \tilde{u}_n^2 dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |a(x) - a_\infty| \cdot \tilde{u}_n^2 dx < \varepsilon$$

Isto mostra que $I \leq I^\infty$. Suponhamos que $I = I^\infty$, então $\{\tilde{u}_n\}$ é também uma seqüência minimizante de E . Contudo, observemos que, a menos de uma subsequência, $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e conseqüentemente $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Observemos que para toda $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ vale:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}_n \cdot \varphi = 0 \quad \text{se } n \geq n(\varphi),$$

donde $\tilde{u} = 0$. Assim \tilde{u}_n não pode ser relativamente compacta em $H^1(\mathbb{R}^N)$, já que, $\|\tilde{u}_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = 1$ ■

Passemos a demonstrar a suficiência da *subaditividade estrita*: Para isto faremos uso do *Princípio de Concentração e Compacidade*.

Seja $\{u_n\} \subseteq H^1(\mathbb{R}^N)$ uma seqüência minimizante de E sob a variedade M . No enunciado do Lema (2.12), façamos $\rho_n = |u_n|^p$.

Passo 1: Anulamento não ocorre.

Suponhamos que ocorra o *Anulamento*, i.e.,

$$\forall R > 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{x+B(R)} |u_n|^p = 0.$$

Para todo $\varepsilon > 0$ dado, $\exists R = R(\varepsilon)$ tal que:

$$|a(x) - a_\infty| < \frac{\varepsilon}{\sup_{n \geq 1} \|u_n\|_2^2}, \quad \text{se } |x| > R,$$

$$|E(u_n) - E^\infty(u_n)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} (a(x) - a_\infty) u_n^2 dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |a(x) - a_\infty| u_n^2 dx.$$

Utilizando a informação fornecida pelo suposto anulamento, teríamos que:

$$\int_{B(R)} u_n^2 dx < \|i_{L^p(B(R)) \rightarrow L^2(B(R))}\| \cdot \varepsilon$$

e portanto $u_n \rightarrow 0$ em $L^2(B(R))$. E assim:

$$\begin{aligned} |E(u_m) - E^\infty(u_m)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (a(x) - a_\infty) u_n^2 dx \right| \\ &= \left| \int_{B(R)} (a(x) - a_\infty) u_n^2 dx \right| + \left| \int_{B^c(R)} (a(x) - a_\infty) u_n^2 dx \right| \\ &< \|a(x) - a_\infty\|_\infty \cdot \|u_n\|_{L^2(B(R))}^2 + \varepsilon < 2\varepsilon \end{aligned}$$

se n é suficientemente grande. Conseqüentemente

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |E(u_n) - E^\infty(u_n)| = 0$$

o que contradiz a *subaditividade estrita* assumida. ■

Passo 2: Dicotomia não ocorre.

Suponha que exista $\alpha \in (0, 1)$ tal que:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \{\rho_n^1\}, \{\rho_n^2\} \subseteq L_+^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo:

$$\begin{cases} \| |u_n|^p - (\rho_n^1 + \rho_n^2) \|_{L^1} \leq \varepsilon, \\ \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n^1 dx - \alpha \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n^2 dx - (1 - \alpha) \right| \leq \varepsilon \\ \text{dist}(\text{supp } \rho_n^1; \text{supp } \rho_n^2) \rightarrow \infty \end{cases}$$

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos as seqüências fornecidas pela *dicotomia*. Podemos então escrever $|u_n|^p = \rho_n^1 + \rho_n^2 + v_n$, onde $\|v_n\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$. Existe $x_n \in \mathbb{R}^N$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, $\text{supp } \rho_n^1 \cap \text{supp } \rho_n^2 = \text{supp } \rho_n^1 \cap B(x_n, n) =$

$\text{supp}\rho_n^2 \cap B(x_n, n) = \emptyset$. Defina, $\tilde{w}_n(x) = u_n(x_n + x)$. Podemos supor que $\tilde{w}_n \rightharpoonup \tilde{w}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$1 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx = \int_{B(x_n, n)} |u_n|^p dx + \int_{\text{supp}\rho_n^1} |u_n|^p dx + \int_{\text{supp}\rho_n^2} |u_n|^p dx + \int_A |u_n|^p dx$$

onde $A = \mathbb{R}^N \setminus (B(x_n, n) \cup \text{supp}\rho_n^1 \cup \text{supp}\rho_n^2)$

Conseqüentemente

$$\alpha + (1 - \alpha) = \int_{B(x_n, n)} |u_n|^p dx + \int_{\text{supp}\rho_n^1} \rho_n^1 + v_n dx + \int_{\text{supp}\rho_n^2} \rho_n^2 + v_n dx + \int_A v_n dx$$

portanto,

$$\int_{B(x_n, n)} |u_n|^p dx = \left(\alpha - \int_{\text{supp}\rho_n^1} \rho_n^1 + v_n dx \right) + \left((1 - \alpha) - \int_{\text{supp}\rho_n^2} \rho_n^2 + v_n dx \right) + \int_A v_n dx.$$

Finalmente

$$\int_{B(x_n, n)} |u_n|^p dx = \int_{B(n)} |\tilde{w}_n|^p \leq 5\varepsilon$$

como $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, concluímos que $\tilde{w} = 0$.

Suponhamos que x_n seja ilimitada:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (a(x) - a_\infty) u_n^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (a(x + x_n) - a_\infty) \tilde{w}_n^2 = \\ &= \int_{B(R)} \{a(x + x_n) - a_\infty\} \tilde{w}_n^2 + \int_{B^c(R)} \{a(x + x_n) - a_\infty\} \tilde{w}_n^2 \leq \varepsilon \end{aligned}$$

se n e R forem tomados suficientemente grandes e isto contradiz a condição de subaditividade ■

Assim x_n seria limitada, neste caso, concluiríamos que $u_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^n)$, e procedendo analogo ao caso anterior iriamos obter uma contradição na *subaditividade estrita* assumida ■

Passo 3: Conclusão.

Segue-se do *Princípio de Concentração e Compacidade* que ocorre **Concentração**, ou seja: existe uma seqüência $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0$ satisfazendo a:

$$\int_{x_n + B(R)} |u_n|^p > 1 - \varepsilon$$

Afirmção: A seqüência $\{x_n\}$ fornecida pela concentração é limitada em \mathbb{R}^N

Com efeito, suponhamos por absurdo que $\{x_n\}$ fosse ilimitada.

Definimos $\tilde{u}_n(x) = u_n(x + x_n)$. É claro que a seqüência $\{\tilde{u}_n\}$ continua sendo uma seqüência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, logo a menos de uma subseqüência, podemos assumir que $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, para cada $R > 0$ $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$ em $L^2(B(R))$.

Observemos inicialmente que podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^p dx &= \int_{B(R_\varepsilon)} |\tilde{u}|^p dx + \int_{B^c(R_\varepsilon)} |\tilde{u}|^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(R_\varepsilon)} |\tilde{u}_n|^p dx + \int_{B^c(R_\varepsilon)} |\tilde{u}|^p dx \\ &\geq 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, $\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^p dx \geq 1$. Contudo, uma vez que $\tilde{u}_n \rightarrow u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, obtemos: $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \leq 1$. Imediatamente segue-se que $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$. Isto nos mostra que \tilde{u} é uma função admissível, i.e., $\tilde{u} \in M$.

Ademais,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |a(x-x_n) - a_\infty| \cdot \tilde{u}_n^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |a(x-x_n) - a_\infty| \cdot |\tilde{u}_n^2 - \tilde{u}^2| dx + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x-x_n) - a_\infty| \cdot \tilde{u}^2 dx \\ &= \int_{B(R)} |a(x-x_n) - a_\infty| \cdot |\tilde{u}_n^2 - \tilde{u}^2| dx + \int_{B^c(R)} |a(x-x_n) - a_\infty| \cdot |\tilde{u}_n^2 - \tilde{u}^2| dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |a(x-x_n) - a_\infty| \cdot \tilde{u}^2 dx < \varepsilon \end{aligned}$$

se n e R forem tomados suficientemente grandes, para todo $\varepsilon > 0$ inicialmente dado (Vide Lema (2.15)). Isto nos prova, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x-x_n) - a_\infty| \cdot \tilde{u}_n^2 dx \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$

Observemos agora que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \cdot u_n^2(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} a(x-x_n) \cdot \tilde{u}_n^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (a(x-x_n) - a_\infty) \cdot \tilde{u}_n^2 dx + a_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}_n^2 dx \end{aligned}$$

Portanto

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \cdot u_n^2(x) dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}_n^2 dx \geq a_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}^2 dx,$$

já que $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} I &= \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}_n|^2 + a(x) u_n^2 dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}|^2 + a_\infty \tilde{u} dx = E^\infty(\tilde{u}) \geq I^\infty \end{aligned}$$

o que contradiz a desigualdade assumida $I < I^\infty$. Assim, a concentração fornecida pelo *Lema de Concentração e Compacidade*, pode ser formulada da seguinte forma:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que:

$$\int_{B(R)} |u_n|^p dx > 1 - \varepsilon.$$

Como feito anteriormente, a menos de uma subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^p(B(R))$ para todo $R > 0$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, consideremos R_ε fornecido pela *Concentração*. Podemos então escrever que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx &= \int_{B(R_\varepsilon)} |u|^p dx + \int_{B^c(R_\varepsilon)} |u|^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(R_\varepsilon)} |u_n|^p dx + \int_{B^c(R_\varepsilon)} |u|^p dx \\ &\geq 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \geq 1$. Contudo, uma vez que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, obtemos: $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \leq 1$. Imediatamente segue-se que $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$. Pela uniformidade convexa do espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$, concluímos que: $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Finalmente, pela convexidade do funcional E , vale que:

$$E(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n) = I$$

ou seja $E(u) = \inf_{\varphi \in M} E(\varphi)$, e portanto, é uma solução do problema (\star) . Para concluir a compacidade relativa de todas as seqüências minimizantes de E sob a variedade M , observemos que:

$$E(u_n - u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^2 + a(x) |u_n - u|^2$$

$$= E(u_n) + E(u) - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla u - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u_n \cdot u dx \longrightarrow 0$$

pois $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e também em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Finalmente $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, concluindo a compacidade da seqüência minimizante ■

Capítulo 3

Problemas de Minimização no

$$L^1(\mathbb{R}^N)$$

Nesta seção, iremos fornecer uma robusta aplicação do Lema (2.12). Acreditamos que o estudo do problema a seguir demonstra plenamente toda a dificuldade que se encontra ao tentar resolver um problema de minimização no \mathbb{R}^N e como o Princípio de Concentração e Compacidade deve ser usado para contornar tal dificuldade.

Estaremos interessados no seguinte problema:

Encontrar uma função u minimizando:

$$(1) \quad I_\lambda = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} j(u) dx - \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u(x)u(y) \cdot f(x-y) dx dy : u \in K_\lambda \right\}$$

onde:

$$K_\lambda = \left\{ u \in L^q(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N), u \geq 0 \text{ q.t.p.}, \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} u dx = \lambda \right\}$$

com $q = \frac{p+1}{p}$, $p \in]1, \infty[$, e j, f satisfazem a:

$$(2) \quad \begin{cases} j : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \text{ é estritamente convexa, satisfazendo a:} \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} j(t)t^{-1} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} j(t)t^{-q} = +\infty \end{cases}$$

$$(3) \quad f \in M^p(\mathbb{R}^N)^1, \quad f \geq 0, \text{ q.t.p.}$$

¹ $M^p(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço de Marcinkiewicz, ou L^p fraco.

Tal problema aparece em Astrofísica e em Mecânica Quântica. O caso típico é quando

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{|x|} \text{ e } N = 3$$

O principal resultado sobre este problema é :

Teorema 3.1 (Lions, [PL1]) *Sob as condições (2) e (3), toda seqüência minimizante $(u_n)_{n \geq 1}$ do problema (1) é relativamente compacta em $L^1(\mathbb{R}^N)$, a menos de translações se, e somente se, a seguinte condição de subaditividade ocorre:*

$$(S.2) \quad I_\lambda < I_\alpha + I_{\lambda-\alpha} \quad \forall \alpha \in]0, \lambda[$$

Em adicional, se (S.2) ocorrer, para toda seqüência minimizante $(u_n)_{n \geq 1}$ existe $(y_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\{u_n(\cdot + y_n)\}$ é relativamente compacta em $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ e $\{j(u_n(\cdot + y_n))\}$ é relativamente compacta em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Em particular, se (S.2) ocorrer, existe um mínimo do problema (1).

Inicialmente fazemos alguns lemas, que auxiliarão no bom entendimento do problema a ser estudado.

Lema 3.2 *Sob as condições $u \in K_\lambda$, (2) e (3) ocorre:*

$$\int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u(x)u(y)f(x-y)dxdy \leq C_1 \|f\|_{M^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{2-q}$$

Prova: Lembremos da seguinte, bem conhecida, desigualdade de convolução:

$$\int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u(x)u(y)f(x-y)dxdy \leq C_1 \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}^2 \|f\|_{M^p(\mathbb{R}^N)} \quad (3.1)$$

onde $r = \frac{2p}{2p-1}$.

Trabalhemos com a expressão $\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}^2$ via a desigualdade de Hölder:

$$(\xi) \quad \int_{\mathbb{R}^N} u^r dx = \int_{\mathbb{R}^N} u^{r-\frac{qr}{2}} u^{\frac{qr}{2}} \leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} u^{(r-\frac{qr}{2})\frac{3-q}{2-q}} \right]^{\frac{2-q}{3-q}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} u^{(\frac{qr}{2})3-q} \right]^{\frac{1}{3-q}}$$

Observemos que:

$$(i) \quad \left(r - \frac{qr}{2}\right) \frac{3-q}{2-q} = r \left(1 - \frac{p+1}{2p}\right) \frac{2p-1}{p-1} = r \left(\frac{p-1}{2p}\right) \left(\frac{2p-1}{p-1}\right) = r \frac{2p-1}{2p} = 1.$$

$$(ii) \quad \left(\frac{qr}{2}\right) (3-q) = q \left(r \frac{3-q}{2}\right) = q \left(r \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\right) = q.$$

$$(iii) \quad \left(\frac{2-q}{3-q}\right) \frac{2}{r} = 2 \left(\left(\frac{p-1}{2p-1}\right) \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\right) = 2 \left(\frac{p-1}{2p}\right) = 2 \left(1 - \frac{p+1}{2p}\right) = 2 - q.$$

$$(iv) \quad \left(\frac{1}{3-q}\right) \left(\frac{2}{r}\right) = \left(\frac{p}{2p-1}\right) \left(\frac{2(2p-1)}{2p}\right) = 1.$$

Logo, elevando a desigualdade (ξ) a $\frac{2}{r}$ obtemos:

$$(5) \quad \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} u\right]^{2-q} \left[\int_{\mathbb{R}^N} u^q\right] = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{2-q}.$$

Portanto, combinando o obtido acima com a desigualdade de convolução (3.1) encontramos a inequação desejada:

$$\int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u(x)u(y)f(x-y)dxdy \leq C_1 \|f\|_{M^p(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{2-q} \quad \blacksquare$$

Lema 3.3 *As condições $u \in K_\mu$ $\mu \in]0, \lambda]$, (2) e (3), são suficientes para garantir que: $I_\mu > -\infty$. Ademais, para qualquer seqüência minimizante de (1) temos:*

$$\begin{cases} u_n \text{ é limitada em } L^1 \cap L^q \\ j(u_n) \text{ é limitada no } L^1. \end{cases}$$

Prova: Como por hipótese, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{j(t)}{t^q} = +\infty$, garantimos a existência de um valor $R \in \mathbb{R}^+$ satisfazendo:

$$j(t) - \frac{1}{2} C_1 \mu^{2-q} t^q > 0, \quad \forall t \geq R.$$

Portanto, devido ao lema anterior, podemos escrever:

$$\int_{\mathbb{R}^N} j(u)dx - \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u(x) \cdot u(y)f(x-y)dxdy \geq \int_{\mathbb{R}^N} j(u) - C \cdot u^q dx$$

$$\geq \int_{u \leq R} j(u) - C \cdot u^q \geq - \int_{u \leq R} C \cdot R^{q-1} u \geq -C \cdot R^{q-1} \mu$$

onde $C = \frac{1}{2} \cdot C_1 \mu$, e assim mostramos que $I_\mu > -\infty$.

Mostremos agora a limitação de uma seqüência minimizante $\{u_n\}$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, uma vez que a limitação de $\{u_n\}$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$ é trivial:

Suponha por absurdo que $\|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \rightarrow \infty$. Pela hipótese, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{j(t)}{t^q} = +\infty$, garantimos a existência de um número real $M > 0$ tal que $j(t) \geq (C+1)t^q$, se $t \geq M$, onde novamente $C = \frac{1}{2} \cdot C_1 \mu$. Logo:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n) dx - \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n(x) \cdot u_n(y) f(x-y) dx dy \geq \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n) - C \cdot u_n^q dx \\ & \geq \int_{u_n \leq M} j(u_n) - C u_n^q + \int_{u_n \geq M} (C+1)u_n^q - C u_n^q \geq -C \cdot M^{q-1} \mu + \int_{u_n \geq M} u_n^q \rightarrow \infty \end{aligned}$$

uma vez que se $\|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \rightarrow \infty$ então, obrigatoriamente, $\|u_n\|_{L^q(u \geq M)}^q \rightarrow \infty$ devido a limitação $\int_{u_n \leq M} u_n^q \leq \int_{u_n \leq M} M^{q-1} u_n \leq \mu M^{q-1}$

Finalmente, a limitação de $j(u_n)$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$ segue-se trivialmente da limitação de $\{u_n\}$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ uma vez que:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n) dx - \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n(x) \cdot u_n(y) f(x-y) dx dy \geq \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n) - C \cdot u_n^q dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n) - B \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 3.4 A hipótese $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j(t)}{t^q} = +\infty$ é crucial para que se tenha $I_\lambda > -\infty$.

Prova: De fato se tomarmos $f(x) = |x|^{-N/p}$, (assim $f \in M^p(\mathbb{R}^N)$) e j satisfizer: $\limsup \frac{j(t)}{t^q} < \frac{1}{2} C_0 \cdot \|f\|_{M^p(\mathbb{R}^N)} \cdot \lambda^{2-q}$, onde C_0 é a melhor constante da desigualdade de convolução, podemos encontrar $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)^+ = \mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N)$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) dx = \lambda \quad e \quad \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u(x) u(y) \cdot f(x-y) dx dy = K > k = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{j(t)}{t^q}$$

Defina para cada $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}u(\frac{x}{\varepsilon})$. Claramente, $u_\varepsilon \in K_\lambda$, ademais existem constantes R e $C \in \mathbb{R}$ tais que: Se $t \geq R$, $j(t)t^{-q} < \frac{K+k}{2}$ e $j(t) < Ct$ se $0 < t < R$.:

$$\int_{\mathbb{R}^N} j(u_\varepsilon)dx - \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_\varepsilon(x)u_\varepsilon(y) \cdot f(x-y)dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ C \cdot u_\varepsilon + \frac{K+k}{2} u_\varepsilon^q \right\} dx - K\varepsilon^{N/p} = C\lambda - \frac{K+k}{2} \cdot \varepsilon^{-N/p} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\infty \blacksquare$$

Lema 3.5 Sob a condição $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{j(t)}{t} = 0$, temos $I_\lambda \leq 0$

Prova: Com efeito, se tomarmos $u \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R}^N)$ com $\int_{\mathbb{R}^N} u(x)dx = \lambda$, e definirmos $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^N u(x \cdot \varepsilon)$, é claro que $u_\varepsilon \in K_\lambda$ ademais:

$$\int_{\mathbb{R}^N} j(u_\varepsilon)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\varepsilon^N} \cdot j(\varepsilon^N u(x))dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 \blacksquare$$

Para tornarmos a condição (S.2) mais natural, ou pelo menos, mais fácil de se constatar, deixe-nos fornecer um resultado que simplifica a verificação de (S.2). Este resultado baseia-se em um Lema elementar, a saber:

Lema 3.6 Seja h uma função real definida em $[0, \lambda]$, $\lambda > 0$ satisfazendo: $h(\theta\alpha) < \theta h(\alpha)$ para todo $\alpha \in]0, \lambda[$, $\theta \in]1, \lambda/\alpha[$. Então tem-se: $h(\lambda) < h(\alpha) + h(\lambda - \alpha)$ para todo $\alpha \in]0, \lambda[$.

Prova: Observemos inicialmente que a função $\frac{h(t)}{t}$ é crescente, pois: se $t_1 < t_2$ podemos escrever: $h(t_1) = h\left(\frac{t_1}{t_2} \cdot t_2\right) < \frac{t_1}{t_2} h(t_2)$. Estudemos dois casos:

Caso 1: $\alpha < \lambda - \alpha$

$$h(\lambda) < \frac{\lambda}{\alpha} h(\alpha) = h(\alpha) + (\lambda - \alpha) \frac{h(\alpha)}{\alpha} < h(\alpha) + (\lambda - \alpha) \frac{h(\lambda - \alpha)}{\lambda - \alpha}$$

Caso 2: $\alpha \geq \lambda - \alpha$

$$\frac{\lambda - \alpha}{\alpha} h(\alpha) = \frac{\lambda - \alpha}{\alpha} h\left(\frac{\lambda - \alpha}{\alpha} \cdot (\lambda - \alpha)\right) \leq h(\lambda - \alpha).$$

Aproveitando a primeira desigualdade do caso 1, concluímos o caso 2 \blacksquare

Teorema 3.7 *Sob as hipóteses (2) e (3) do problema (1), adicionado a:*

$$(\zeta_1) \quad \forall t \geq 1, \text{ e q.t.p. } \xi \in \mathbb{R}^N, \quad f(t\xi) \geq t^{-m}f(\xi), \quad \text{para algum } m \in (0, N)$$

ou

$$(\zeta_2) \quad \forall \theta \geq 1, \quad \forall t \geq 0, \quad j(\theta t) \leq \theta^2 j(t).$$

Então (S.2) acontece, se e somente se $I_\lambda < 0$. Portanto (como será mostrado), as conclusões do Teorema (3.1) se seguem.

Prova: Seja $\alpha \in (0, \lambda)$ iremos mostrar que se $\theta \in]1, \lambda/\alpha]$ então nós temos: $I_{\theta\alpha} < \theta I_\alpha$, desde que $I_\alpha < 0$. Por uma conveniente modificação do Lema (3.6), iremos concluir que (S.2) deve acontecer, se $I_\lambda < 0$. Agora se (S.2) ocorrer, necessariamente $I_\lambda < 0$ já que, pelo Lema (3.5), $I_\mu \leq 0$ para todo $\mu \leq 0$. Portanto vale que $I_\alpha < 0$. Se (ζ_1) acontecer, tomemos uma função $u \in K_\alpha$ e consideremos $v = u \left(\frac{\cdot}{\theta^{1/N}} \right)$. Claramente $v \in K_{\theta\alpha}$, e assim:

$$\begin{aligned} I_{\theta\alpha} &\leq \inf_{u \in K_\alpha} \left\{ \theta \int_{\mathbb{R}^N} j(u) dx - \frac{\theta^2}{2} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u(x)u(y) \cdot f(\theta(x-y)) dx dy \right\} \\ &\leq \inf_{u \in K_\alpha} \left\{ \theta \int_{\mathbb{R}^N} j(u) dx - \frac{\theta^{2-m/N}}{2} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u(x)u(y) \cdot f(x-y) dx dy \right\} \\ &\leq \theta^{2-m/N} I_\alpha < \theta I_\alpha < 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, se (ζ_2) ocorrer, uma vez tomado $u \in K_\alpha$ definimos: $v = \theta u$. Claramente $v \in K_{\theta\alpha}$ e assim:

$$\begin{aligned} I_{\theta\alpha} &\leq \inf_{u \in K_\alpha} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} j(\theta u) dx - \frac{\theta^2}{2} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u(x)u(y) \cdot f(x-y) dx dy \right\} \\ &\leq \theta^2 I_\alpha < 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Passamos a demonstrar o Teorema (3.1). Observamos inicialmente que os argumentos incidados heurísticamente são facilmente justificáveis neste caso, logo sempre temos que:

$$I_\lambda \leq I_\alpha + I_{\lambda-\alpha} \quad \forall \alpha \in (0, \lambda)$$

e, se ocorrer a igualdade para algum α , poderíamos construir uma seqüência minimizante (como no princípio heurístico) a qual não é relativamente compacta. Portanto (S.2) é uma condição necessária para a compacidade das seqüências minimizantes.

Então tomada uma seqüência minimizante do problema (1), digamos u_n , iremos aplicar o Lema (2.12), com $\rho_n = u_n$, assim encontrando uma subseqüência, que ainda indicaremos por u_n , satisfazendo (i), (ii) ou (iii) e, usando (S.2), iremos (como mostrado heurísticamente) garantir que (ii) e (iii) não podem ocorrer. Então iremos concluir o Teorema usando a compacidade fornecida por (i).

Prova do Teorema (3.1)

Passo 1: Dicotomia não ocorre.

Se (iii) (do Lema (2.12)) ocorre-se, existiria $\alpha > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ fixado, encontraríamos u_n^1, u_n^2 satisfazendo para n suficientemente grande:

$$\begin{cases} \|u_n - (u_n^1 + u_n^2)\|_{L^1} \leq \varepsilon, \\ |\int_{\mathbb{R}^N} u_n^1 - \alpha| \leq \varepsilon, \quad |\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 - (\lambda - \alpha)| \leq \varepsilon \\ \text{dist}(\text{supp } u_n^1; \text{supp } u_n^2) \rightarrow \infty \end{cases}$$

e ainda, como escólio do Lema (2.12), podemos assumir que:

$$u_n = u_n^1 + u_n^2 + v_n, \quad 0 \leq u_n^1, u_n^2, v_n \leq u_n, \quad u_n^1 u_n^2 = u_n^1 v_n = u_n^2 v_n = 0 \text{ q.t.p.}$$

Finalmente se denotarmos por:

$$d_n = \text{dist}(\text{supp } u_n^1; \text{supp } u_n^2), \quad \alpha_n = \int_{\mathbb{R}^N} u_n^1 dx, \quad \beta_n = \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx$$

podemos admitir que $d_n \rightarrow \infty, \quad \alpha_n \rightarrow \bar{\alpha}, \quad \beta_n \rightarrow \bar{\beta}, \quad \text{com } \bar{\alpha} \in (0, \alpha)$
 $\bar{\beta} \in (0, \lambda - \bar{\alpha}), \quad |\bar{\alpha} - \alpha| \leq \varepsilon, \quad |\bar{\beta} - (\lambda - \alpha)| \leq \varepsilon$

Afirmção 1: $\int_{\mathbb{R}^N} j(u_n) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n^1) dx + \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n^2) dx$

Com efeito:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n) dx &\geq \int_{y_n+B(r_\varepsilon)} j(u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(y_n, r_\varepsilon)} j(u_n) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n \chi_{B(y_n, r_\varepsilon)}) dx + \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n \chi_{B(y_n, r_n)^c}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n^1) dx + \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n^2) dx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Passemos a estudar $\int_{\mathbb{R}^N} u \cdot u * f$:

$$u_n(x)u_n(y) = (u_n^1(x) + u_n^2(x) + v_n(x))(u_n^1(y) + u_n^2(y) + v_n(y)) \quad \therefore$$

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n(x)u_n(y)f(x-y) dx dy &= \\ \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n^1(x)u_n^1(y)f(x-y) dx dy &+ \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n^2(x)u_n^2(y)f(x-y) dx dy + \\ 2 \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n^1(x)u_n^2(y)f(x-y) dx dy &+ 2 \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n(x)v_n(y)f(x-y) dx dy - \\ &- \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} v_n(x)v_n(y)f(x-y) dx dy \end{aligned}$$

Invocando a desigualdade de convolução (3.1) e a desigualdade (2.8), obtemos:

$$\begin{aligned} \left| \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n(x)v_n(y)f(x-y) dx dy \right| &\leq \\ \|f\|_{M^p} \cdot \|u_n\|_{L^r} \cdot \|v_n\|_{L^r} &\leq \\ \leq \|f\|_{M^p} \{ \|u_n\|_{L^q}^{q/2} \cdot \|u_n\|_{L^1}^{1-q/2} \} \cdot \{ \|v_n\|_{L^q}^{q/2} \cdot \|v_n\|_{L^1}^{1-q/2} \} \end{aligned}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \|v_n\|_q &= \|u_n - (u_n^1 + u_n^2)\|_q \leq \|u_n\|_q + \|u_n^1 + u_n^2\|_q \quad e \\ \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^1 + u_n^2)^q &= \int_{\mathbb{R}^N} u_n^q \{ \chi_{B(y_n, r_\varepsilon)} + \chi_{B(y_n, r_n)^c} \} \leq \|u_n\|_q^q \end{aligned}$$

Pelo Lema (3.3) podemos então escrever:

$$\left| \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n(x)v_n(y)f(x-y) dx dy \right| \leq C \|v_n\|_{L^1}^{1-q/2} \leq C \varepsilon^{1-q/2}.$$

Analogamente obtemos:

$$\left| \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} v_n(x)v_n(y)f(x-y)dx dy \right| \leq C\|v_n\|_{L^1}^{2-q} \leq C\varepsilon^{2-q}.$$

Afirmção 2: $\int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n^1(x) \cdot u_n^2(y) \cdot f(x-y) dx dy \rightarrow 0.$

De fato, observamos que, para todo $\delta > 0$, a função $f_\delta = f \cdot \chi_{(|f| \geq \delta)}$ pertence ao $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $1 \leq q < p$, e assim deduzimos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \left| \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n^1(x)u_n^2(y) \cdot f(x-y)dx dy \right| &= \left| \int \int_{|f(x-y)| < \delta} u_n^1(x)u_n^2(y) \cdot f(x-y)dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int \int_{|f(x-y)| \geq \delta} u_n^1(x)u_n^2(y) \cdot f(x-y)dx dy \right| \\ &\leq \delta \lambda^2 + \left| \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n^1(x)u_n^2(y) \cdot f_\delta(x-y)dx dy \right| \\ &= \delta \lambda^2 + \left| \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n^1(x)u_n^2(y) \cdot f_\delta(x-y) \cdot \chi_{(|x-y| \geq d_n)} dx dy \right| \end{aligned}$$

pois $d_n = dist(supp u_n^1 ; supp u_n^2)$. Invocando a desigualdade de convolução podemos limitar a última integral por: $\|u_n^1\|_{2q/(2q-1)} \cdot \|u_n^2\|_{2q/(2q-1)} \cdot \|f_\delta \chi_{(|x| \geq d_n)}\|_q$

Se $q \in [1, p)$ é suficientemente próximo de p , temos que $\frac{2q}{2q-1} \in [1, \frac{p+1}{p}]$, e portanto $\|u_n^1\|_{2q/(2q-1)}$ e $\|u_n^2\|_{2q/(2q-1)} < C$ uma vez que as mesmas são limitadas em $L^1 \cap L^{\frac{p+1}{p}}$, logo,

$$\delta \lambda^2 + \left| \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n^1(x)u_n^2(y) \cdot f_\delta(x-y) \cdot \chi_{(|x-y| \geq d_n)} dx dy \right| \leq \delta \lambda^2 + C \|f_\delta \cdot \chi_{(|x-y| \geq d_n)}\|_q$$

mas $\|f_\delta \cdot \chi_{(|x-y| \geq d_n)}\|_q \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, e como δ foi arbitrário, concluímos a afirmação 2 ■

²Se $A \subset L^1 \cap L^q$ é um conjunto limitado e $1 < r < q$:

$$\int u^r = \int u^{r - (\frac{q-r}{q-1})} \cdot u^{\frac{q-r}{q-1}} \leq \left[\int u^{\{r - (\frac{q-r}{q-1})\} \frac{q-1}{r-1}} \right]^{\frac{r-1}{q-1}} \cdot \left[\int u^{\{\frac{q-r}{q-1}\} \frac{q-1}{q-r}} \right]^{\frac{q-r}{q-1}} = \|u\|_{\frac{q}{q-1}}^{\frac{r-1}{q-1}} \cdot \|u\|_1^{\frac{q-r}{q-1}} < C.$$

Combinando as desigualdades obtidas, encontramos:

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n) dx - \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n(x) u_n(y) \cdot f(x-y) dx dy \right\} \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n^1) dx - \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n^1(x) u_n^1(y) \cdot f(x-y) dx dy \right\} + \\ &\quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} j(u_n^2) dx - \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n^2(x) u_n^2(y) \cdot f(x-y) dx dy \right\} - \delta(\varepsilon) \end{aligned}$$

onde $\delta(\varepsilon)$ é a parcela referente as integrais $\int \int v_n(x) \cdot v_n(y) \cdot f(x-y) dx dy$ e $\int \int u_n(x) v_n(y) \cdot f(x-y) dx dy$, a saber, $|\delta(\varepsilon)| = C|\varepsilon^{1-q/2} - \varepsilon^{2-q}|$, isto é $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ se $\varepsilon \rightarrow 0$.

Uma vez que $\int u_n^1 \rightarrow \bar{\alpha}$ e $\int u_n^2 \rightarrow \bar{\beta}$ com $|\lambda - (\bar{\alpha} + \bar{\beta})| \leq \varepsilon$, concluímos que: $I_\lambda \geq I_{\bar{\alpha}} + I_{\bar{\beta}} - \delta(\varepsilon)$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\alpha}_0$, e $\bar{\beta} \rightarrow \bar{\beta}_0 = \lambda - \bar{\alpha}_0$ e assim encontramos que:

$$I_\lambda \geq I_{\bar{\alpha}_0} + I_{\lambda - \bar{\alpha}_0}$$

o que contradiz a hipótese (S.2).

Conclusão: Não pode ocorrer a dicotomia !! ■

Passo 2: Anulamento não ocorre.

Suponha que (ii) acontece, pelo mesmo argumento anterior obteríamos:

$$\int \int u_n(x) u_n(y) \cdot f(x-y) dx dy \leq \delta \lambda^2 + \int \int u_n(x) u_n(y) \cdot f_\delta(x-y) dx dy.$$

Defina $g_\delta^R(\xi) = \min\{f_\delta, R\}$ e $f_\delta^R(\xi) = (f_\delta - R)^+ \chi_{|\xi| \leq R} + f_\delta \chi_{|\xi| > R}$.

É claro que $f_\delta(\xi) \leq g_\delta^R(\xi) \chi_{|\xi| \leq R} + f_\delta^R(\xi)$, logo podemos escrever:

$$\begin{aligned} &\int \int u_n(x) u_n(y) \cdot f_\delta(x-y) dx dy \leq \int \int u_n(x) u_n(y) \cdot g_\delta^R(x-y) \chi_{|x-y| \leq R} \\ &+ \int \int u_n(x) u_n(y) \cdot f_\delta^R(x-y) \\ &\leq \int \int u_n(x) u_n(y) \cdot g_\delta^R(x-y) \chi_{|x-y| \leq R} + \|u\|_{\frac{2q}{2q-1}}^2 \cdot \|f_\delta^R\|_q \end{aligned}$$

onde a última inequação foi obtida pela Desigualdade de Convolução. Observemos que $\|f_\delta^R\|_q \rightarrow 0$ se $R \rightarrow \infty$ com $\delta > 0$ fixado; isto se dá uma vez que se $R \gg$

1, $(f_\delta - R)^+ = 0$ e como $f_\delta \in L^q(\mathbb{R}^N)$ o teorema da Convergência Dominada nos garante que $\|f_\delta^R\|_q \xrightarrow{R} 0$. Por outro lado:

$$\int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n(x)u_n(y) \cdot g_\delta^R(x-y)\chi_{|x-y|\leq R} dx dy \leq R \int_{\mathbb{R}^N} u_n(x) \int_{|x-y|\leq R} u_n(y) dy dx$$

$\leq R\lambda \cdot Q_n(R)$. Onde $Q_n(R)$ é a função de concentração de medida, utilizada na prova do Lema (2.12)

Portanto fazendo n tender a $+\infty$ e em seguida $R \rightarrow +\infty$ obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n(x)u_n(y) \cdot f(x-y) dx dy \leq \delta \lambda^2.$$

Como $\delta > 0$ foi arbitrário, concluímos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n(x)u_n(y) \cdot f(x-y) dx dy = 0,$$

o que implica que $I_\lambda \geq 0$. Mas como já vimos que, sob a hipótese $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{j(t)}{t} = 0$, obrigatoriamente $I_\lambda \leq 0$ segue-se que $I_\lambda = 0$. Como $\lambda > 0$ foi arbitrário, isto contradiz a condição (S.2).

Ou seja o anulamento não pode ocorrer!! ■

Passo 3: Conclusão.

Em vista do Lema de Concentração e Compacidade, nós concluímos que existe $\{y_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R < \infty; \int_{y_n+B(R)} u_n(x) dx \geq \lambda - \varepsilon.$$

Denotemos por $\bar{u}_n(x) = u_n(x + y_n)$. Pelo que já provamos, adicionado ao Teorema de Kakutani, passando a uma subsequência se necessário, podemos admitir que $\bar{u}_n \rightharpoonup u$ em $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ onde $1 \leq \alpha \leq \frac{p+1}{p} = q$ e $u \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ uma vez que a envoltória convexa de (u_n) ; $co(u_n) = \{\psi = \sum_{j=1}^s \lambda_j \cdot u_{n_j} : \lambda_j \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^s \lambda_j = 1\}$ é limitada em $L^1 \cap L^q$. Em adicional, o funcional $\phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} j(u) dx$ é convexo, e o conjunto $A_t = \{\xi : \phi(\xi) \leq t\}$ é fechado (na topologia forte).

De fato se $\xi_n \rightarrow \xi$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, a menos de uma subsequência, $\xi_n \rightarrow \xi$ pontualmente, logo pelo lema de Fatou:

$$\int_{\mathbb{R}^N} j(\xi) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} j(\xi_n) dx \leq t$$

e assim concluímos que ϕ é fracamente semi-contínuo inferiormente e portanto vale:

$$\int_{\mathbb{R}^N} j(u) dx \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}^N} j(\bar{u}_n) dx \quad (3.2)$$

Ademais, pelo Lema (2.12) temos que dado $\varepsilon > 0$, $\exists R < \infty$; $\int_{y_n+B(R)} u_n > \lambda - \varepsilon$, ou seja,

$$\int_{B(R)} u_n(x + y_n) dx = \int_{B(R)} \bar{u}_n(x) dx > \lambda - \varepsilon$$

Observemos ademais que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}_n \cdot \chi_{B(R)} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u \cdot \chi_{B(R)} \quad \text{uma vez que } \chi_{B(R)} \in L^{q'}(\mathbb{R}^N)$$

Portanto dado $\varepsilon > 0$ existe $R < \infty$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u dx \geq \int_{B(R)} u dx > \lambda - \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado de forma arbitrária, concluímos que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u dx \geq \lambda.$$

Por outro lado, como $\bar{u}_n \rightarrow u$, a menos de uma subsequência, podemos supor que $\bar{u}_n(x) \rightarrow u(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. Considere a seqüência $\psi_n = \bar{u}_n \cdot \chi_{B(n)}$. ψ_n goza das seguintes propriedades:

(i) $\psi_n \rightarrow u$ q.t.p.

(ii) $\psi_n \geq 0$ q.t.p.

(iii) $\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} \psi_n \leq \lambda$

Logo, pelo Lema de Fatou, segue-se que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u dx \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}_n \chi_{B(n)} \leq \lambda$$

e portanto concluímos que $\int_{\mathbb{R}^N} u dx = \lambda$.

Passamos a mostrar que u é um mínimo para o problema (1). O primeiro passo será mostrar que:

$$\int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \bar{u}_n(x) \bar{u}_n(y) \cdot f(x-y) dx dy \xrightarrow{n} \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} u_n(x) u_n(y) \cdot f(x-y) dx dy.$$

Uma vez definido $B : K_\lambda \times K_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$, observamos que B "se comporta" como um produto interno, a saber: ($f \neq 0$)

(i) $B(u, u) > 0$ e $B(u, u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$

(ii) $B(u, v + w) = B(u, v) + B(u, w)$

(iii) $B(au, v) = aB(u, v)$

(iv) $B(u, v) = B(v, u)$

E com estas propriedades mostramos que:

$$| \|\bar{u}_n\|_B - \|u\|_B | \leq \|\bar{u}_n - u\|_B, \text{ ou seja :}$$

$$\left| \left\{ \int \int \bar{u}_n(x) \bar{u}_n(y) \cdot f(x-y) dx dy \right\}^{1/2} - \left\{ \int \int u_n(x) u_n(y) \cdot f(x-y) dx dy \right\}^{1/2} \right| \leq \left| \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (\bar{u}_n(x) - u(x)) \cdot (\bar{u}_n(y) - u(y)) \cdot f(x-y) dx dy \right|^{1/2}.$$

É fácil constatar que: $f(\xi) = f(\xi)\chi_{f \leq \delta} + f_\delta(\xi) \leq f(\xi)\chi_{f \leq \delta} + g_\delta^R(\xi)\chi_{|\xi| \leq R} + f_\delta^R(\xi)$ (lembrando: $g_\delta^R(\xi) = \min\{f_\delta, R\}$ e $f_\delta^R(\xi) = (f_\delta - R)^+ \chi_{|\xi| \leq R} + f_\delta \chi_{|\xi| > R}$), assim:

$$\left| \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (\bar{u}_n(x) - u(x)) \cdot (\bar{u}_n(y) - u(y)) \cdot f(x-y) dx dy \right| \leq \delta \lambda^2 + \varepsilon_\delta(R) + \left| \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (\bar{u}_n(x) - u(x)) \cdot (\bar{u}_n(y) - u(y)) \cdot g_\delta^R(x-y) dx dy \right|$$

Passamos a introduzir a seguinte seqüência de funções :

$$v_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \{\bar{u}_n(y) - u(y)\} \cdot g_\delta^R(x-y) dy.$$

Desde que, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, $g_\delta^R(x - \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, por um argumento standard de interpolação garantimos que $g_\delta^R(x - \cdot) \in L^{\alpha'}(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, como

$\bar{u}_n \rightharpoonup u$ em $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ temos:

$$v_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}_n(y) \cdot g_\delta^R(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^N} u(y) \cdot g_\delta^R(x-y) dy \xrightarrow{n} 0$$

Em adicional:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}_n(y) g_\delta^R(x-y) dy \right) dx &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} g_\delta^R dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}_n dy \right) \\ &= \lambda \cdot \int_{\mathbb{R}^N} g_\delta^R dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u dy \cdot \int_{\mathbb{R}^N} g_\delta^R dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u(y) g_\delta^R(x-y) dy \right) dx \end{aligned}$$

ou seja, $\|\bar{u}_n * g_\delta^R\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|u * g_\delta^R\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$. Pelo Teorema de Frechet-Kolmogorov, o operador $G_\delta^R : L^\alpha(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^1(\omega)$ é compacto, para qualquer conjunto aberto e limitado $\omega \subseteq \mathbb{R}^N$, portanto como $\bar{u}_n \rightharpoonup u$ em $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ concluímos que $\bar{u}_n * g_\delta^R \rightarrow u * g_\delta^R$ em $L^1(\omega)$, e como $L^\alpha(\omega) \hookrightarrow L^1(\omega)$, vale que $\bar{u}_n * g_\delta^R \rightarrow u * g_\delta^R$ em $L^1(\omega)$ para todo conjunto aberto limitado ω no \mathbb{R}^N .

Observemos ainda que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists j \in \mathbb{N}$; $\int_{B(j)^c} u * g_\delta^R < \frac{\varepsilon}{2}$. Por outro lado existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \int_{B(j)} u * g_\delta^R - \int_{B(j)} \bar{u}_{n_j} * g_\delta^R \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Segue-se portanto que:

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(j)} \bar{u}_{n_j} * g_\delta^R = \int_{\mathbb{R}^N} u * g_\delta^R - \int_{B(j)} \bar{u}_{n_j} * g_\delta^R < \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(j)} u * g_\delta^R + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Finalmente, invocando o Corolário do Teorema de Frechet-Kolmogorov, a menos de uma subsequência, podemos garantir que $\bar{u}_{n_j} * g_\delta^R$ converge para $u * g_\delta^R$ na norma do $L^1(\mathbb{R}^N)$, ou seja: $v_n \rightarrow 0$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Afirmção: $v_n = (\bar{u}_n - u) * g_\delta^R \rightarrow 0$ em $L^{\alpha'}(\mathbb{R}^N)$, onde $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ (se $\alpha \neq 1$).

Com efeito:

$$\int |v_n|^{\alpha'} = \int |v_n|^{\alpha' - \frac{(\alpha-1)^2-1}{(\alpha-1)^2}} \cdot |v_n|^{\frac{(\alpha-1)^2-1}{(\alpha-1)^2}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int |v_n|^{(\alpha' - \frac{(\alpha-1)^2-1}{(\alpha-1)^2})(\alpha-1)^2} \right)^{\frac{1}{(\alpha-1)^2}} \cdot \left(\int |v_n|^{\frac{(\alpha-1)^2-1}{(\alpha-1)^2}(\frac{(\alpha-1)^2-1}{(\alpha-1)^2-1})} \right)^{\frac{(\alpha-1)^2-1}{(\alpha-1)^2}} \\ &= \left(\int |v_n|^\alpha \right)^{\frac{1}{(\alpha-1)^2}} \cdot \left(\int |v_n| \right)^{\frac{(\alpha-1)^2-1}{(\alpha-1)^2}} \end{aligned}$$

E como v_n é limitada em $L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ por ser fracamente convergente, a afirmação está provada ■

Finalmente, obtemos

$$\int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (\bar{u}_n - u)(x) \cdot (\bar{u}_n - u)(y) \cdot g_\delta^R(x - y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u}_n - u) \cdot v_n \longrightarrow 0.$$

Lembremos que já temos provado a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} &\left| \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (\bar{u}_n - u)(x) \cdot (\bar{u}_n - u)(y) \cdot f(x - y) dx dy \right| \\ &\leq \delta \lambda^2 + \varepsilon_\delta(R) + \left| \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (\bar{u}_n(x) - u(x)) \cdot (\bar{u}_n(y) - u(y)) \cdot g_\delta^R(x - y) dx dy \right| \end{aligned}$$

e assim:

$$\int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} (\bar{u}_n - u)(x) \cdot (\bar{u}_n - u)(y) \cdot f(x - y) dx dy \longrightarrow 0$$

Invocando a desigualdade (3.2):

$$E(u) \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^N} j(\bar{u}_n) - \frac{1}{2} \lim \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \bar{u}_n(x) \bar{u}_n(y) \cdot f(x - y) dx dy$$

donde concluimos que u é um mínimo para o problema (1). Em particular:

$$\int_{\mathbb{R}^N} j(\bar{u}_n) dx \xrightarrow{n} \int_{\mathbb{R}^N} j(u) dx$$

Passemos a utilizar a convexidade estrita da função j para mostrar que \bar{u}_n converge em medida para u ($\bar{u}_n \xrightarrow{\mu} u$).

Defina $v_n = \frac{\bar{u}_n + u}{2}$. Pelo mesmo argumento anterior (observe que v_n goza das seguintes propriedades: $\int v_n = \lambda$, $v_n \rightarrow u$ em L^α) v_n satisfaz:

$$\int_{\mathbb{R}^N} j(v_n) dx \xrightarrow{n} \int_{\mathbb{R}^N} j(u) dx$$

Usando a convexidade de j :

$$\int_{\mathbb{R}^N} j(v_n) dx < \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} j(\bar{u}_n) + j(u) dx \quad \text{e assim :}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} 2j(v_n) dx - j(\bar{u}_n) - j(u) dx \longrightarrow 0$$

ou seja $j(\bar{u}_n) + j(u) - 2j(v_n)$ converge a 0 no $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Seja $K < \infty$, e denote por:

$$0 < \delta_K(\lambda) = \inf \left\{ j(s) + j(t) - 2j\left(\frac{s+t}{2}\right) : 0 \leq s \leq K, 0 \leq t \leq K, |s-t| \geq \lambda \right\}$$

para todo $\lambda > 0$.

Observe que: $med(\{x \in \mathbb{R}^N : \bar{u}_n(x) \geq K \text{ ou } u(x) \geq K\}) \leq \frac{2\lambda}{K}$

De fato, se denotarmos por $A = \{x \in \mathbb{R}^N : \bar{u}_n(x) \geq K \text{ ou } u(x) \geq K\}$, podemos escrever:

$$\lambda = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}_n = \int_{A^c} \bar{u}_n + \int_A \bar{u}_n \geq -\lambda + K|A| \quad \blacksquare$$

Seja $\gamma > 0$, e passemos a estimar $med(|\bar{u}_n - u| \geq \gamma)$:

$$\begin{aligned} med(|\bar{u}_n - u| \geq \gamma) &\leq \frac{2\lambda}{K} + med(\gamma \leq |\bar{u}_n - u| \leq K) \\ &\leq \frac{2\lambda}{K} + med(\delta_K(|\bar{u}_n - u|) \geq \delta_K(\gamma)) \\ &\leq \frac{2\lambda}{K} + (\delta_K(\gamma))^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} \delta_K(|\bar{u}_n - u|) dx \\ &\leq \frac{2\lambda}{K} + (\delta_K(\gamma))^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} j(\bar{u}_n) + j(u) - 2j(v_n) dx \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e em seguida $K \rightarrow \infty$, concluímos que

$$(i) \quad \bar{u}_n \xrightarrow{\mu} u$$

Desde que $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $med(\Omega) < \delta$ então, $\int_{\Omega} u \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ademais, como $\bar{u}_n \rightarrow u$, para todo conjunto de medida finita Ω , vale que: $\int_{\Omega} \bar{u}_n \rightarrow \int_{\Omega} u$. Logo, para n suficientemente grande, $|\int_{\Omega} \bar{u}_n - \int_{\Omega} u| < \frac{\varepsilon}{2}$, donde obtemos, a menos de uma subsequência,

$$(ii) \quad \int_{\Omega} \bar{u}_n < \varepsilon$$

Finalmente, como conseqüência do Lema (2.12), dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que:

$$(iii) \quad \int_{B^c(R)} \bar{u}_n dx < \varepsilon$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência de Vitali, segue-se que $\bar{u}_n \rightarrow u$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$

Analogamente temos:

(i) Dado $\gamma > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|j(\bar{u}_n(x)) - j(u(x))| \geq \gamma$ então $|\bar{u}_n(x) - u(x)| \geq \delta$ (continuidade da j). Portanto, $med(|j(\bar{u}_n(x)) - j(u(x))| \geq \gamma) \leq med(|\bar{u}_n(x) - u(x)| \geq \delta) \xrightarrow{n} 0$, donde concluímos que $j(\bar{u}_n) \xrightarrow{\mu} j(u)$

(ii) Observemos que, para todo conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, vale:

$$\int_{\Omega} j(\bar{u}_n) \rightarrow \int_{\Omega} j(u).$$

Assim, pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, vale que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $med(\Omega) < \delta$, $\int_{\Omega} j(\bar{u}_n) < \varepsilon$

(iii) Por hipótese, $\lim_{t \rightarrow 0} j(t)t^{-1} = 0$. Logo, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $j(t) < t$, se $t \leq \delta_1$. Para cada $R < \infty$ defina o conjunto $A(R) = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus B(R) : u_n(x) \geq \delta_1 \forall n \in \mathbb{N}\}$. É claro que $med(A(R)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists R < \infty$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(R)} j(\bar{u}_n) \leq \int_{B^c(R) \setminus A(R)} \bar{u}_n + \int_{A(R)} j(\bar{u}_n) \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(R)} \bar{u}_n + \int_{A(R)} j(\bar{u}_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

onde a última desigualdade foi obtida levando em consideração o fato que $\bar{u}_n \rightarrow u$ no $L^1(\mathbb{R}^N)$ e a propriedade (ii) acima.

Mais uma vez, invocando o Teorema da Convergência de Vitali, garantimos que $j(\bar{u}_n)$ converge para $j(u)$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$



Capítulo 4

Uma Extensão do Lema de Concentração e Compacidade

Neste capítulo iremos apresentar uma "versão diferenciável" do Lema (2.12), a saber, estaremos interessados em uma extensão do Lema (2.12) ao espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Uma *idéia* da prova desta extensão do lema de concentração e compacidade pode ser encontrado em [PL2]. Em seguida apresentaremos uma aplicação do mesmo na resolução de uma equação de Schrödinger não linear, a qual não pode ser resolvida utilizando as técnicas clássicas de Métodos Variacionais.

4.1 O Princípio de Concentração e Compacidade no $H^1(\mathbb{R}^N)$

Lema 4.1 *Seja $\{\rho_n\} \subseteq H^1(\mathbb{R}^N)$ uma seqüência limitada tal que $\|\rho_n\|_2^2 = \lambda$ ($n \in \mathbb{N}$). Então existe uma subseqüência $\{\rho_{n_k}\}$ tal que uma e somente uma das alternativas abaixo se verifica:*

(i) *Anulamento:* $\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_y^{y+B_R} \rho_{n_k}^2 = 0, \forall R < \infty$

(ii) *Compacidade*: $\exists \{y_k\} \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists R_\varepsilon > 0; \int_{y_k + B_{R_\varepsilon}} \rho_{n_k}^2 \geq \lambda - \varepsilon \quad \forall k$

(iii) *Dicotomia*: $\exists \alpha \in (0, \lambda)$ tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ e seqüências $\{\varphi_k\}, \{\psi_k\}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo:

a) $\varphi_k, \psi_k \leq \rho_{n_k}$ q.t.p em \mathbb{R}^N

b) $\left| \|\varphi_k\|_2^2 - \alpha \right| < \varepsilon, \left| \|\psi_k\|_2^2 - (\lambda - \alpha) \right| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_\varepsilon$

c) $\left| \|\rho_{n_k} - \varphi_k - \psi_k\|_2^2 < \varepsilon \quad \forall k \geq k_\varepsilon$

d) $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_k|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_k|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \rho_{n_k}|^2 \right) (1 + 4\varepsilon) + C_\varepsilon \cdot \lambda$ onde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\varepsilon = 0$.

Prova: Como na prova do Lema (2.12), definamos

$$Q_n(R) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y + B_R} \rho_n^2(x) dx.$$

É claro que, como no Lema (2.12), $Q_n \geq 0$, monotamente não-decrescente, $\lim_{R \rightarrow \infty} Q_n(R) = \lambda$ e assim pelo corolário do Teorema de Helly, existe uma subsequência $\{Q_{n_k}\}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_{n_k}(R) = Q(R)$ onde $Q \geq 0$ monotona não-decrescente.

Defina $\alpha \in [0, \lambda]$ por $\alpha = \lim_{R \rightarrow \infty} Q(R)$.

Caso 1: $\alpha = 0$, logo acontece (i).

Caso 2: $\alpha = \lambda$, logo acontece (ii).

Caso 3: $\alpha \in (0, \lambda)$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists R_\varepsilon \geq \varepsilon^{-1} > 0$ tal que $\alpha - \varepsilon < Q(R) < \alpha + \varepsilon$, $\forall R \geq R_\varepsilon$.

Portanto deve existir $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\alpha - \varepsilon < Q_{n_k}(R_\varepsilon) \leq Q_{n_k}(2R_\varepsilon) < \alpha + \varepsilon, \quad \forall k \geq k_\varepsilon.$$

Por definição de Q_{n_k} podemos obter $y_k \in \mathbb{R}^N$ tal que:

$$\alpha - \varepsilon < \int_{y_k + B_{R_\varepsilon}} \rho_{n_k}^2 \leq \int_{y_k + B_{2R_\varepsilon}} \leq Q_{n_k}(2R_\varepsilon) < \alpha + \varepsilon, \quad \forall k \geq k_\varepsilon.$$

Considere $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi \equiv 1$ em $B(0,1)$ e $\varphi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B(0,2)$ com $|\nabla\varphi| \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \varphi \leq 1$ e defina:

$$\varphi_k(x) = \rho_{n_k}(x) \varphi\left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon}\right).$$

Análogo ao Lema (2.12), existe uma seqüência $\{R_k\} \subseteq \mathbb{R}^+$ com $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \infty$ tal que:

$$\alpha - \varepsilon < Q_{n_k}(R_k) \leq Q_{n_k}(2R_k) < \alpha + \varepsilon \quad \forall k \geq k_\varepsilon.$$

Defina:

$$\psi_k(x) = \rho_{n_k}(x) \left(1 - \varphi\left(\frac{x - y_k}{R_k}\right)\right).$$

Calculemos:

$$\text{a) } -\varepsilon < \int_{y_k + B_{R_\varepsilon}} \rho_{n_k}^2 - \alpha \leq \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_k^2 - \alpha \leq \int_{y_k + B_{2R_\varepsilon}} \rho_{n_k}^2 - \alpha < \varepsilon$$

logo $|\int \varphi_k^2 dx - \alpha| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{\mathbb{R}^N} \psi_k^2 - (\lambda - \alpha) &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{n_k}^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{x - y_k}{R_k}\right)\right)^2 - (\lambda - \alpha) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{n_k}^2 (1 - \chi_{y_k + B_{R_k}})^2 - (\lambda - \alpha) \\ &= - \int_{y_k + B_{R_k}} \rho_{n_k}^2 + \alpha < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_k^2 - (\lambda - \alpha) &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{n_k}^2 (1 - \chi_{y_k + B_{2R_k}}) - (\lambda - \alpha) \\ &= - \int_{y_k + B_{2R_k}} \rho_{n_k}^2 + \alpha > -\varepsilon. \end{aligned}$$

Obs: $(\alpha - \varepsilon < \int_{y_k + B_{R_\varepsilon}} \rho_{n_k} \leq \int_{y_k + B_{R_k}} \rho_{n_k} \leq Q_{n_k}(R_k) \leq Q_{n_k}(2R_k) < \alpha + \varepsilon$
se $R_k \geq R_\varepsilon$).

$$c) \quad \|\rho_{n_k} - (\varphi_k + \psi_k)\|_2^2 = \int_{R_\varepsilon \leq |x - y_k| \leq R_k} |\rho_{n_k}|^2 = \int_{y_k + B_{R_k}} \rho_{n_k}^2 - \int_{y_k + B_{R_\varepsilon}} \rho_{n_k}^2 < 2\varepsilon.$$

É claro ainda que $\varphi_k, \psi_k \leq \rho_{n_k}$.

Para concluirmos, basta verificar que acontece o item (d) para as seqüências construídas:

$$\nabla \varphi_k(x) = \rho_{n_k}(x) \nabla \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) \cdot \frac{1}{R_\varepsilon} + \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) \cdot \nabla \rho_{n_k}(x).$$

Lembremos que $R_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$, $|\nabla \varphi| \leq \sqrt{2}$ e $0 \leq \varphi \leq 1$, assim:

$$\begin{aligned} |\nabla \varphi_k(x)|^2 &= \frac{1}{R_\varepsilon^2} \cdot \rho_{n_k}^2(x) \left| \nabla \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) \right|^2 + \frac{2}{R_\varepsilon} \cdot \rho_{n_k}(x) \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) \langle \nabla \varphi, \nabla \rho_{n_k}(x) \rangle \\ &\quad + \left| \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) \right|^2 \cdot |\nabla \rho_{n_k}(x)|^2 \\ &\leq 2\varepsilon^2 |\rho_{n_k}(x)|^2 + 2\sqrt{2}\varepsilon \cdot |\rho_{n_k}| \cdot |\nabla \rho_{n_k}| + \left| \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) \right|^2 \cdot |\nabla \rho_{n_k}(x)|^2 \\ &\leq 2\varepsilon^2 |\rho_{n_k}(x)|^2 + \sqrt{2}\varepsilon \left[|\rho_{n_k}(x)|^2 + |\nabla \rho_{n_k}(x)|^2 \right] \\ &\quad + \left| \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) \right|^2 \cdot |\nabla \rho_{n_k}(x)|^2. \end{aligned}$$

Logo como $\|\rho_{n_k}\|_2^2 = \lambda$, obtemos:

$$\|\nabla \varphi_k\|_2^2 \leq 2\varepsilon^2 \lambda + \sqrt{2}\varepsilon \left[\lambda + \|\nabla \rho_{n_k}\|_2^2 \right] + \int \left| \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) \right|^2 \cdot |\nabla \rho_{n_k}|^2 dx.$$

De modo análogo, denotando $\psi = 1 - \varphi$ temos:

$$\psi_k(x) = \rho_{n_k}(x) \psi \left(\frac{x - y_k}{R_k} \right) \text{ e}$$

$$\|\nabla \psi_k\|_2^2 \leq 2\varepsilon^2 \lambda + \sqrt{2\varepsilon} \left[\lambda + \|\nabla \rho_{n_k}\|_2^2 \right] + \int \left| \psi \left(\frac{x - y_k}{R_k} \right) \right|^2 \cdot |\nabla \rho_{n_k}(x)|^2 dx.$$

Assim, somando as suas desigualdades, encontramos:

$$\begin{aligned} \|\nabla \varphi_k\|_2^2 + \|\nabla \psi_k\|_2^2 &\leq 4\varepsilon^2 \lambda + 2\sqrt{2\varepsilon} \left[\lambda + \|\nabla \rho_{n_k}\|_2^2 \right] \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \left| \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) \right|^2 + \left| \psi \left(\frac{x - y_k}{R_k} \right) \right|^2 \right\} |\nabla \rho_{n_k}(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Mas observemos que:

$$\begin{aligned} \left| \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) \right|^2 + \left| \psi \left(\frac{x - y_k}{R_k} \right) \right|^2 &\leq \left\{ \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) + \psi \left(\frac{x - y_k}{R_k} \right) \right\}^2 \\ &= \left\{ 1 + \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) - \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_k} \right) \right\}^2. \end{aligned}$$

Desde φ pode ser tomada decrescente radialmente e $R_\varepsilon \leq R_k$, temos que:

$$\left| \frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right| \geq \left| \frac{x - y_k}{R_k} \right| \Rightarrow \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) \leq \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_k} \right)$$

donde:

$$\left| \varphi \left(\frac{x - y_k}{R_\varepsilon} \right) \right|^2 + \left| \psi \left(\frac{x - y_k}{R_k} \right) \right|^2 \leq 1.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \|\nabla \varphi_k\|_2^2 + \|\nabla \psi_k\|_2^2 &\leq 4\varepsilon^2 \lambda + 2\sqrt{2\varepsilon} \left[\lambda + \|\nabla \rho_{n_k}\|_2^2 + \|\nabla \rho_{n_k}\|_2^2 \right] \\ &= (1 + 2\sqrt{2\varepsilon}) \|\nabla \rho_{n_k}\|_2^2 + (4\varepsilon^2 + 2\sqrt{2\varepsilon}) \lambda \\ &< (1 + 4\varepsilon) \|\nabla \rho_{n_k}\|_2^2 + C_\varepsilon \lambda \end{aligned}$$

onde $C_\varepsilon \rightarrow 0$ com $\varepsilon \rightarrow 0$ ■.

Obs: É clara a idéia da prova do Lema (4.1): Segue-se exatamente como Lema(2.12), a menos de "suavizar" a funções características $\chi_{y_k+B_{R_\varepsilon}}$ e $\chi_{y_k+B_{R_k}}$ usados na prova do Lema (2.12), com uso da função φ .

4.2 Uma Aplicação do Lema (4.1)

Consideremos a equação de *Schrödinger* não-linear:

$$(1) \quad \begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} u + \Delta_x u + |u|^{p-1} u = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Denominamos "Standing Wave" qualquer solução da forma:

$$(2) \quad u(t, x) = e^{iwt} \varphi(x), \quad w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Procurar uma solução fraca desta forma para a equação (1) equivale a determinar $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \neq 0$ tal que:

$$-\Delta \varphi + w\varphi - |\varphi|^{p-1} \varphi = 0$$

no sentido as distribuições, uma vez que se u é da forma (2) e satisfaz (1):

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} u + \Delta_x u + |u|^{p-1} u &= 0 \quad \text{se, e somente se,} \\ e^{iwt} (-w\varphi + \Delta \varphi + |\varphi|^{p-1} \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto é natural definirmos o funcional E por: $E : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta \varphi|^2 - \frac{1}{p+1} |\varphi|^{p+1}.$$

Pois assim, um ponto crítico de E sob uma determinada esfera do $L^2(\mathbb{R}^N)$, resulta em uma solução fraca do tipo "Standing Wave" (U_{φ_0} , φ_0 ponto crítico).

Definiremos ainda, para todo $\mu > 0$ o conjunto:

$$\Sigma_\mu = \left\{ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 = \mu \right\}.$$

Lema 4.2 *Se $v \in \Sigma_\mu$, então $v_\lambda = \lambda^{N/2} v(\lambda \cdot) \in \Sigma_\mu$, $0 < \lambda < 1$.*

Prova:: Utilizaremos a caracterização do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ via transformada de Fourier, a saber:

$$H^1(\mathbb{R}^N) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{1/2} \widehat{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

Mostremos inicialmente que se $v \in \Sigma_\mu$ então $\|v_\lambda\|_2^2 = \mu$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_\lambda|^2 = \lambda^N \int_{\mathbb{R}^N} |v(\lambda x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^2 dx = \mu.$$

(Teo. Mudanças de Variáveis) Falta mostrar que $(1 + |\xi|^2)^{1/2} \widehat{v}_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^N)$:

$$\begin{aligned} (v_\lambda)\widehat{(\xi)} : &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} v_\lambda(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{\lambda^{N/2}}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} v_\lambda(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} v(y) e^{-iy(\lambda^{-1}\xi)} \cdot \lambda^{-N} dy = \lambda^{-N/2} \cdot \widehat{v}(\lambda^{-1}\xi). \end{aligned}$$

Portanto, calculando $\|(1 + |\xi|^2)^{1/2} \widehat{v}_\lambda\|_2^2$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^{1/2} \lambda^{-N} \cdot |\widehat{v}(\lambda^{-1}\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^N} \lambda^{-N} (1 + |\lambda\eta|^2) \cdot |\widehat{v}(\eta)|^2 \lambda^{-N} d\eta \\ &= \frac{1}{\lambda^{2N}} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \lambda|\eta|^2) \cdot |\widehat{v}(\eta)|^2 d\eta \\ &< \frac{1}{\lambda^{2N}} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\eta|^2) \cdot |\widehat{v}(\eta)|^2 d\eta < \infty \end{aligned}$$

uma vez que $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. ■

Lema 4.3 Se $j(\mu) = \inf\{E(v) : v \in \Sigma_\mu\}$ e $1 \leq p < 1 + \frac{4}{N}$ então $-\infty \leq j(\mu) < 0$.

Prova:: Para cada $0 < \lambda < 1$ consideremos $v_\lambda(x) = \lambda^{N/2} v(\lambda x)$. Como vimos no

lema (4.2), se $v \in \Sigma_\mu$ então $v_\lambda \in \Sigma_\mu$. Calculemos então $E(v_\lambda)$:

$$\begin{aligned} E(v_\lambda) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\lambda|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} v_\lambda^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda^N |\lambda \nabla v(\lambda x)|^2 - \frac{\lambda^{\frac{N(p+1)}{2}}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} [v(\lambda x)]^{p+1} dx \\ T.V.M. &= \frac{\lambda^2}{2} \|\nabla v\|_2^2 - \frac{\lambda^{\frac{N(p-1)}{2}}}{p+1} \cdot \|v\|_{p+1}^{p+1} \\ &= \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 - \lambda^{\frac{N(p-1)}{2}-2} \cdot \|v\|_{p+1}^{p+1} \right) \end{aligned}$$

Se $\|v\|_{p+1}^{p+1} = \infty$ então $j(\mu) \leq E(v) = -\infty$. Portanto $j(\mu) = -\infty$. Suponhamos então que $v \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Para $1 \leq p < 1 + \frac{4}{N}$ temos $\frac{N(p-1)}{2} - 2 < 0$. Assim, fixado v temos:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \|v\|_2^2 - \lambda^{\frac{N(p-1)}{2}-2} \cdot \|v\|_{p+1}^{p+1} \right) = -\infty,$$

ou seja, para $0 < \lambda < 1$ suficientemente pequeno temos:

$$E(v_\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 - \lambda^{\frac{N(p-1)}{2}-2} \cdot \|v\|_{p+1}^{p+1} \right) < 0. \quad \blacksquare$$

Faremos uso do Teorema de Gagliardo-Nirenberg, o qual nos garante, em particular, que:

Teorema 4.4 (Gagliardo-Nirenberg) *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ e $0 < a < 1$ satisfazendo $\frac{1}{p} = a \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N} \right) + \frac{1-a}{q}$. Então existe uma constante $C(n, p, q, a)$ tal que para todo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ vale:*

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_2^a \cdot \|u\|_q^{1-a}.$$

Lema 4.5 *Se $1 < p < 1 + \frac{4}{N}$ então $j(\mu) > -\infty$.*

Prova: Lembremos inicialmente que $H_0(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$ e portanto $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Então utilizando o Teorema acima com $p = p + 1, q = 2$ e

$a = \frac{N}{2} \frac{p-1}{p+1}$ (observe que como $1 < p < 1 + \frac{4}{N}$, $0 < a < 1$), concluímos que:

$$\|u\|_{p+1} \leq C \|\nabla u\|_2^a \cdot \|u\|_2^{1-a} \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Logo, para cada $u \in \Sigma_\mu$ temos:

$$\begin{aligned} E(u) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 - \frac{\tilde{C}}{p+1} \|\nabla u\|^{\frac{N(p-1)}{2}} \cdot \|u\|_2^{(1-a)(p+1)} \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 - \frac{\tilde{C}}{p+1} \mu^{\frac{(1-a)(p+1)}{2}} \|\nabla u\|^{\frac{N(p-1)}{2}} \end{aligned}$$

Considere a função

$$f_\mu(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{\tilde{C}}{p+1} \mu^{\frac{(1-a)(p+1)}{2}} t^{\frac{N(p-1)}{2}}$$

$f_\mu(0) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} f_\mu(t) = +\infty$ pois se $1 < p < 1 + \frac{4}{N}$ então $\frac{N(p-1)}{2} < 2$. Portanto $\text{Min}\{f_\mu(t) : t \geq 0\} = \alpha_\mu > -\infty$ e assim:

$$j(\mu) \geq \alpha_\mu > -\infty. \quad \blacksquare$$

O principal resultado desta seção, o qual fará uso do Lema (4.1) é o Teorema seguinte.

Teorema 4.6 *Se $1 < p < 1 + \frac{4}{N}$, então para cada $\mu > 0$, existe $u \in \Sigma_\mu$ tal que:*

$$E(u) = \inf\{E(v) : v \in \Sigma_\mu\}.$$

Prova: Seja $\{v_m\}$ uma seqüência minimizante para E , ou seja $E(v_m) \rightarrow j(\mu)$.

Mostremos inicialmente que v_m é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como escólio dos Lemas 4.3 e 4.5 temos que:

$$(3) \quad \begin{cases} E(v_m) &= \frac{1}{2} \|\nabla v_m\|_2^2 - \frac{1}{p+1} \cdot \|v_m\|_{p+1}^{p+1} < 0, \quad \text{se } m \text{ é grande} \\ \|v_m\|_{p+1}^{p+1} &\leq C \|\nabla v_m\|_2^{\frac{N(p-1)}{2}} \mu^\beta, \quad \beta = \frac{(1-a)(p+1)}{2}. \end{cases}$$

Logo,

$$(4) \quad \|\nabla v_m\|_2^2 < \frac{2}{p+1} \|v_m\|_{p+1}^{p+1} \leq C_p \|\nabla v_m\|_2^\gamma \mu^\beta, \quad \gamma = \frac{N(p-1)}{2}$$

$\|\nabla v_m\|_2^{2-\gamma} < C_p \mu^\beta$ e como $2 - \gamma > 0$ segue-se que $\|\nabla v_m\|_2$ é limitada, digamos $\|\nabla v_m\|_2^2 \leq \bar{C}$, finalmente $\|v_m\|_{H^1}^2 = \|v_m\|_{L^2}^2 + \|\nabla v_m\|_{L^2}^2 < \mu + \bar{C}$. Pelo Lema 4.1, podemos extrair uma subsequência (que denotaremos por v_m) satisfazendo: concentração, anulamento, ou dicotomia.

Passo 1: Não ocorre anulamento.

A prova do passo 1 baseia-se no seguinte lema.

Lema 4.7 *Existe uma constante $C > 0$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \leq C \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{y+B_1} |u|^2 \right)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \|u\|_{H^1}^2$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $1 < p < 1 + \frac{4}{N}$.

Prova do Lema: Decompondo o \mathbb{R}^N como união de cubos unitários, Q_j disjuntos, temos:

$$\text{i) } \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} |u|^{p+1}$$

$$\text{ii) } \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|u\|_{H^1(Q_j)}^2$$

Temos ainda $2 < p+1 < 2 + \frac{4}{N} < \frac{2N}{N-2}$, então pela desigualdade de interpolação:

$$\|u\|_{L^{p+1}(Q_j)} \leq \|u\|_{L^2(Q_j)}^{1-\theta} \cdot \|u\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(Q_j)}^\theta,$$

onde $\frac{1}{p+1} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{2N/N-2}$ ou seja, $\theta = \frac{N}{2} \cdot \frac{p-1}{p+1}$ (observe que $0 < \theta < 1$).

Pela desigualdade de Sobolev:

$$\|u\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(Q_j)} \leq C \cdot \|u\|_{H^1(Q_j)}$$

e como para cada par Q_i, Q_j , existe $a_{ij} \in \mathbb{R}^N$ tal que $Q_i + a_{ij} = Q_j$, a constante C independe de j . $\{L^r(Q_j)$ e $H^1(Q_j)$ são isométricos a $L^r(Q_i)$ e $H^1(Q_i)\}$. Logo:

$$\begin{aligned} \int_{Q_j} |u|^{p+1} &\leq \|u\|_2^{(1-\theta)(p+1)} \cdot \|u\|_{\frac{2N}{N-2}}^{\theta(p+1)} = \|u\|_2^{\frac{2(p+1)-N(p-1)}{2}} \cdot \|u\|_{\frac{2N}{N-2}}^{\frac{N(p-1)}{2}} \\ &\leq C \|u\|_2^{p-1} \cdot \|u\|_2^{2-\frac{N(p-1)}{2}} \cdot \|u\|_{H^1(Q_j)}^{\frac{N(p-1)}{2}} \\ &\leq C \|u\|_2^{p-1} \cdot \|u\|_{H^1(Q_j)}^{2-\frac{N(p-1)}{2}} \cdot \|u\|_{H^1(Q_j)}^{\frac{N(p-1)}{2}} \\ &= C \|u\|_{L^2(Q_j)}^{p-1} \cdot \|u\|_{H^1(Q_j)}^2. \end{aligned}$$

Somando em j temos:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} |u|^{p+1} \leq C \left(\sup_y \int_{y+B(1)} |u|^2 \right)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|u\|_{H^1(Q_j)}^2$$

ou seja:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} \leq C \left(\sup_y \int_{y+B(1)} |u|^2 \right)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2. \quad \blacksquare$$

Concluiremos agora que o anulamento não pode ocorrer. Suponha por absurdo que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_y \int_{y+B(1)} |v_m|^2 = 0.$$

Isto implicaria, pelo lema que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|v_m\|_{p+1}^{p+1} = 0$ (observe que v_m é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$). Ou seja $\|v_m\|_{p+1} \rightarrow 0$ o que é um absurdo, uma vez que

$$E(v_m) = \frac{1}{2} \|\nabla v_m\|_2^2 - \frac{1}{p+1} \|v_m\|_{p+1}^{p+1} < -\delta_0$$

para $m > m_0$ e $-\delta_0 = j(\mu) + \varepsilon$ fixado. Assim,

$$\|v_m\|_{p+1}^{p+1} > (p+1) \left\{ \frac{1}{2} \|\nabla v_m\|_2^2 + \delta_0 \right\} > \delta_0 > 0.$$

A conclusão é que o anulamento não pode ocorrer.

Passo 2: Dicotomia não ocorre:

Se houvesse dicotomia, então existiria $\alpha \in (0, \lambda)$ tal que $\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \geq 1$ e seqüências $\{v_m^1\}, \{v_m^2\} \subseteq H^1(\mathbb{R}^N)$, satisfazendo para todo $m \geq k_\varepsilon$:

$$(i) \quad \left| \|v_m^1\|_2^2 - \alpha \right| < \varepsilon, \quad \left| \|v_m^2\|_2^2 - (\mu - \alpha) \right| < \varepsilon$$

$$(ii) \quad \|v_m - v_m^1 - v_m^2\|_2^2 < \varepsilon$$

$$(iii) \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_m^1|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_m^2|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_m|^2 \right) (1 + 4\varepsilon) + C_\varepsilon \mu$$

$$(iv) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \text{dist}(\text{Supp } v_m^1, \text{Supp } v_m^2) = +\infty.$$

Por (iii) obteríamos:

$$\begin{aligned} E(v_m) &= \frac{1}{2} \|\nabla v_m\|_2^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |v_m|^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_m^1| + |\nabla v_m^2| \right\} - C_\varepsilon \mu - 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_m|^2 \\ &= E(v_m^1) + E(v_m^2) + \frac{1}{p+1} (\|v_m^1\|_{p+1}^{p+1} + \|v_m^2\|_{p+1}^{p+1}) - C_\varepsilon \mu - 2\varepsilon \|\nabla v_m\|_2^2. \end{aligned}$$

Pela propriedade (iv), $v_m^1(x) \cdot v_m^2(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ portanto

$$|v_m^1(x) + v_m^2(x)|^{p+1} = |v_m^1(x)|^{p+1} + |v_m^2(x)|^{p+1},$$

integrando em \mathbb{R}^N temos:

$$\|v_m^1\|_{p+1}^{p+1} + \|v_m^2\|_{p+1}^{p+1} = \|v_m^1 + v_m^2\|_{p+1}^{p+1}.$$

Ademais como já vimos em (4) vale: $\|\nabla v_m\|_2^2 \leq \frac{2}{p+1} \|v_m\|_{p+1}^{p+1}$. Continuando a desigualdade acima:

$$\begin{aligned} E(v_m) &\geq E(v_m^1) + E(v_m^2) + \frac{1}{p+1} \|v_m^1 + v_m^2\|_{p+1}^{p+1} - C_\varepsilon \mu - \frac{4\varepsilon}{p+1} \|v_m\|_{p+1}^{p+1} \\ &\geq E(v_m^1) + E(v_m^2) + \frac{1}{p+1} \{ \|v_m^1 + v_m^2\|_{p+1}^{p+1} - \|v_m\|_{p+1}^{p+1} \} - C_\varepsilon \mu. \end{aligned}$$

Defina $J : L^{p+1}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, $J(\psi) = \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^{p+1} = \frac{1}{p+1} \|\psi\|_{p+1}^{p+1}$ então J é F -

diferenciável, $J'(\psi) \cdot \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^{p-1} \psi \cdot \varphi$ e portanto vale $J(\varphi) - J(\psi) = \int_0^1 \langle J'(t\varphi - (1-t)\psi), (\varphi - \psi) \rangle dt$ onde \langle, \rangle é o coquete de dualidade entre $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ e $(L^{p+1}(\mathbb{R}^N))' = L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$.

$$\begin{aligned} E(v_m^1) + E(v_m^2) &\leq E(v_m) + C_\varepsilon \mu - \frac{1}{p+1} (\|v_m^1 + v_m^2\|_{p+1}^{p+1} - \|v_m\|_{p+1}^{p+1}) \\ &\leq E(v_m) + C_\varepsilon \mu + |J(v_m^1 + v_m^2) - J(v_m)| \\ &\leq E(v_m) + C_\varepsilon \mu + \int_0^1 |\langle J'(v_m + t\omega_m), \omega_m \rangle| dt \end{aligned}$$

onde $\omega_m = v_m - (v_m^1 + v_m^2)$.

Observe que usando o produto de dualidade,

$$\begin{aligned} J' : L^{p+1}(\mathbb{R}^N) &\rightarrow L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N), \quad J'(\psi) = |\psi|^{p-1} \psi, \quad \text{logo} \\ \|J'(\psi)\|_{\frac{p+1}{p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^{p \cdot \frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{p}{p+1}} = \|\psi\|_{p+1}^p. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} E(v_m^1) + E(v_m^2) &\leq E(v_m) + C_\varepsilon \mu + \int_0^1 \|v_m + t\omega_m\|_{p+1}^p \cdot \|\omega_m\|_{p+1} dt \\ &\leq E(v_m) + C_\varepsilon \mu + \int_0^1 \{ \|v_m\|_{p+1} + t\|\omega_m\|_{p+1} \}^p \cdot \|\omega_m\|_{p+1} dt \\ &\leq E(v_m) + C_\varepsilon \mu + \int_0^1 2^{p-1} \{ \|v_m\|_{p+1}^p + t^p \|\omega_m\|_{p+1}^p \} \cdot \|\omega_m\|_{p+1} dt. \end{aligned}$$

Invocando novamente o Teorema de Gagliardo-Nirenberg com $a = \frac{N}{2} \cdot \frac{p-1}{p+1} < 1$ (pois $1 < p < 1 + \frac{4}{N}$) obtemos:

$$\|\omega_m\|_{p+1} \leq C \|\nabla \omega_m\|_2^a \cdot \|\omega_m\|_2^{1-a}.$$

Por (iii) temos:

$$\|\omega_m\|_2^2 = \|v_m - (v_m^1 + v_m^2)\|_2^2 < \varepsilon \quad \forall m \geq k_\varepsilon$$

e em vista de (iii):

$$\begin{aligned} \|\nabla\omega_m\|_2^2 &\leq (\|\nabla v_m\|_2 + \|\nabla v_m^1\| + \|\nabla v_m^2\|)^2 \leq 4(\|\nabla v_m\|_2^2 + \|\nabla v_m^1\|_2^2 + \|\nabla v_m^2\|_2^2) \\ &\leq 4(\|\nabla v_m\|_2^2 + \|\nabla v_m\|_2^2(1 + 4\varepsilon) + C_\varepsilon\mu) \quad C_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{com } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Já mostramos que a seqüência minimizante v_m é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, logo $\|\nabla\omega_m\|_2^a \leq C_1$ e portanto,

$$(5) \quad \|\omega_m\|_{p+1} \leq \tilde{C}_1 \varepsilon^{\frac{1-a}{2}}, \quad \|\omega_m\|_{p+1}^{p+1} \leq \tilde{C} \varepsilon^{\frac{1-a}{2}(p+1)}$$

além disso, por (3) : $\|v_m\|_{p+1}^{p+1} \leq \tilde{C} \|\nabla v_m\|_2^{\frac{N(p-1)}{2}} \cdot \mu^\beta \leq C_2 \mu^\beta$.

Implicando assim que:

$$\begin{aligned} (6) \quad E(v_m^1) + E(v_m^2) &\leq E(v_m) + C_\varepsilon\mu + 2^{p-1}C_1\varepsilon^{\frac{1-a}{2}} \cdot C_2\mu^\beta + \frac{2^{p-1}}{p+1}C \cdot \varepsilon^{\frac{(1-a)(p+1)}{2}} \\ &= E(v_m) + C_\mu(\varepsilon), \text{ onde } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\mu(\varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $E(u) = \frac{1}{\lambda^2}E(\lambda u) + \frac{1}{p+1}(\lambda^{p-1} - 1)\|u\|_{p+1}^{p+1}$ temos, para $i = 1, 2$:

$$E_m(v_m^i) = \frac{\|v_m^i\|_2^2}{\mu} E\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\|v_m^i\|_2} \cdot v_m^i\right) + \frac{1}{p+1} \left(\frac{\mu^{\frac{p-1}{2}}}{\|v_m^i\|_2^{p-1}} - 1\right) \|v_m^i\|_{p+1}^{p+1}.$$

Observe que $\frac{\sqrt{\mu}}{\|v_m^i\|_2} \cdot v_m^i \in \Sigma_\mu$ e portanto $E\left(\frac{\sqrt{\mu}v_m^i}{\|v_m^i\|_2}\right) \geq j(\mu)$ e, assim:

$$\begin{aligned} E(v_m^1) &\geq \frac{\|v_m^1\|_2^2}{\mu} \cdot j(\mu) + \frac{1}{p+1} \left(\frac{\mu^{\frac{p-1}{2}}}{\|v_m^1\|_2^{p-1}} - 1\right) \|v_m^1\|_{p+1}^{p+1} \\ &\geq \frac{\alpha + \varepsilon}{\mu} \cdot j(\mu) + \frac{1}{p+1} \left(\frac{\mu^{\frac{p-1}{2}}}{(\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-1}{2}}} - 1\right) \|v_m^1\|_{p+1}^{p+1} \quad (7) \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$E(v_m^2) \geq \frac{(\mu + \alpha) + \varepsilon}{\mu} j(\mu) + \frac{1}{p+1} \left(\left[\frac{\mu}{\mu - \alpha + \varepsilon}\right]^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \|v_m^2\|_{p+1}^{p+1}. \quad (8)$$

Utilizando novamente o fato que $v_m^1(x) \cdot v_m^2(x) = 0$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} (\|v_m^1\|_{p+1}^{p+1} + \|v_m^2\|_{p+1}^{p+1}) &= \frac{1}{p+1} (\|v_m^1 + v_m^2\|_{p+1}^{p+1}) \\ &\geq \frac{1}{p+1} (\|v_m\|_{p+1}^{p+1} - \|v_m^1 + v_m^2\|_{p+1}^{p+1}) \\ &= \frac{1}{p+1} \|v_m\|_{p+1}^{p+1} - |J(v_m) - J(v_m^1 + v_m^2)| \\ &\geq \frac{1}{p+1} \|v_m\|_{p+1}^{p+1} - \tilde{C}_\mu(\varepsilon), \end{aligned}$$

onde $\tilde{C}_\mu(\varepsilon) \rightarrow 0$ com $\varepsilon \rightarrow 0$ onde a última desigualdade é fruto da continuidade do funcional J e da estimativa $S : \|v_m - (v_m^1 + v_m^2)\|_{p+1} < \tilde{C} \cdot \varepsilon^{\frac{1-\alpha}{2}}$. Seja $\bar{\alpha} = \max\{\alpha, \mu - \alpha\}$ então:

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha+\varepsilon} \geq \frac{1}{\bar{\alpha}+\varepsilon} \\ \frac{1}{\mu-\alpha+\varepsilon} \geq \frac{1}{\bar{\alpha}+\varepsilon}. \end{cases}$$

Logo, por (7) e (8) temos:

$$\begin{aligned} E(v_m^1) + E(v_m^2) &\geq \frac{\mu + 2\varepsilon}{\mu} \cdot j(\mu) + \frac{1}{p+1} \left[\left(\frac{\mu}{\bar{\alpha} + \varepsilon} \right)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right] (\|v_m^1\|_{p+1}^{p+1} + \|v_m^2\|_{p+1}^{p+1}) \\ &\geq \frac{\mu + 2\varepsilon}{\mu} \cdot j(\mu) + \left(\frac{1}{p+1} \|v_m\|_{p+1}^{p+1} - \tilde{C}_\mu(\varepsilon) \right) \cdot \left[\left(\frac{\mu}{\bar{\alpha} + \varepsilon} \right)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Mas como $j(\mu) < 0$, $\exists \delta_0 > 0$ tal que

$$E(v_m) = \frac{1}{2} \|\nabla v_m\|_2^2 - \frac{1}{p+1} \|v_m\|_{p+1}^{p+1} < -\delta_0,$$

isto é, $\frac{1}{p+1} \|v_m\|_{p+1}^{p+1} > \delta_0$, logo por (6)

$$E(v_m) + C_\mu(\varepsilon) \geq E(v_m^1) + E(v_m^2) \geq \frac{\mu + 2\varepsilon}{\mu} \cdot j(\mu) + \left[\left(\frac{\mu}{\bar{\alpha} + \varepsilon} \right)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right] (\delta_0 - \tilde{C}_\mu(\varepsilon)).$$

Observe que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\mu}{\bar{\alpha} + \varepsilon} \right)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right] (\delta_0 - \tilde{C}_\mu(\varepsilon)) - C_\mu(\varepsilon) = \delta_0 \left[\left(\frac{\mu}{\bar{\alpha}} \right)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right] > 0$$

pois $\mu > \bar{\alpha}$, logo existe $\sigma > 0$ e um $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ vale:

$$\left[\left(\frac{\mu}{\bar{\alpha} + \varepsilon} \right)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right] (\delta_0 - \tilde{C}_\mu(\varepsilon)) - C_\mu(\varepsilon) \geq \sigma > 0.$$

Então, para qualquer $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ vale:

$$E(v_m) \geq \frac{\mu + 2\varepsilon}{\mu} \cdot j(\mu) + \sigma.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$j(\mu) \geq \frac{\mu + 2\varepsilon}{\mu} \cdot j(\mu) + \sigma,$$

lembrando do fato de que $j(\mu) > -\infty$ (i.e, $j(\mu) \in \mathbb{R}$ mostrado no lema (3), quando fazemos $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$j(\mu) \geq j(\mu) + \sigma$$

o que é um absurdo pois $\sigma > 0$ e $j(\mu) \in \mathbb{R}$, e assim concluímos que não pode ocorrer a dicotomia.

Passo 3: Conclusão.

Consequentemente há concentração, isto é, $\exists \{y_m\}_{m \geq 1} \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R_\varepsilon > 0$ satisfazendo:

$$\mu = \int_{y_m + B_{R_\varepsilon}} |v_m|^2 > \mu - \varepsilon, \quad \forall m \geq 0.$$

Defina $\omega_m(x) = v_m(x - y_m)$. Então, como v_m é limitado em $H^1(\mathbb{R}^N)$ o mesmo ocorre com ω_m e

$$\mu \geq \int_{B_{R_\varepsilon}} |\omega_m|^2 > \mu - \varepsilon, \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (9)$$

Portanto:

i) $\{\omega_m\}$ é pré-compacto em $L^2(B(R))$ devido a imersão de Sobolev $H^1(B(R)) \hookrightarrow L^2(B(R))$

ii) Dado $\varepsilon > 0$ existe $R_\varepsilon > 0$ tal que $\|\omega_m\|_{L^2(B(R_\varepsilon)^c)} < \varepsilon$ pela desigualdade (9).

Logo pelo corolário do Teorema de Frechet-Kolmogorov, existe uma subsequência $\omega_m \rightarrow \omega$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ademais, como $\{\omega_m\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ podemos extrair uma subsequência com $\omega_m \rightarrow \tilde{\omega}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Implicando que $\omega_m \rightarrow \tilde{\omega}$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, ou seja:

$$\begin{cases} \omega_m \rightarrow \omega \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N) \\ \omega_m \rightarrow \omega \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg se $1 < p < 1 + \frac{4}{N}$:

$$\|u\|_{p+1} \leq C \|\nabla u\|_2^a \cdot \|u\|_2^{1-a} \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad \left(a = \frac{N}{2} - \frac{N}{p+1}\right)$$

e portanto $\omega_m \rightarrow \omega$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ e como (ω_m) é ainda uma seqüência minimizante do funcional E temos:

$$\begin{aligned} E(\omega) &\geq J(\mu) = \lim_{m \rightarrow \infty} E(\omega_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \inf \left\{ \frac{1}{2} \|\nabla \omega_m\|_2^2 - \frac{1}{p+1} \|\omega_m\|_{p+1}^{p+1} \right\} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla \omega\|_2^2 - \frac{1}{p+1} \|\omega\|_{p+1}^{p+1} = E(\omega) \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue-se do fato de que $J : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, $J(\varphi) = \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_2^2 - \frac{1}{p+1} \|\varphi\|_{p+1}^{p+1}$ é fracamente semi-contínua inferiormente (por ser fortemente contínua e convexa).

Ademais, $\liminf_{m \rightarrow \infty} \|\nabla \omega_m\|_2^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\nabla \omega_m\|_2^2 = \|\nabla \omega\|_2^2$, assim:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\omega_m\|_{H^1} = \|\omega\|_{H^1} \text{ e } \omega_m \rightarrow \omega \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N)$$

e como $H^1(\mathbb{R}^N)$ é uniformemente convexa $\omega_m \rightarrow \omega$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. $\omega \in \Sigma_\mu$ e satisfaz $E(\omega) = \inf_{v \in \Sigma_\mu} E(v) = j(\mu)$. Isto demonstra o Teorema. ■

Além disso $E \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e $E' : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ satisfaz:

$$\begin{aligned} E'(\omega) \cdot v &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle \nabla \omega, \nabla v \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} |\omega|^{p-1} \omega \cdot v, \text{ donde:} \\ E'(\omega) \cdot \Phi &= \int_{\mathbb{R}^N} \omega \Delta \Phi - \int_{\mathbb{R}^N} |\omega|^{p-1} \cdot \omega \Phi \quad \forall \Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Sejam $v, \omega \in \Sigma_\mu$ com $E(\omega) = \inf_{\varphi \in \Sigma_\mu} E(\varphi)$ e $\langle v, \omega \rangle_{L^2} = 0$.

Defina $\alpha(t) = \omega \cos t + v \sin t \in \Sigma_\mu$. Então $E(\alpha(t))$ assume o mínimo no ponto $t = 0$ e portanto:

$$0 = \frac{d}{dt} \cdot E(\alpha(t))|_{t=0} = E'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)|_{t=0} = E'(\omega) \cdot v$$

ou seja $E'(\omega) \cdot v = 0 \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\langle v, \omega \rangle_{L^2} = 0$.

Para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ vale: $v = \langle v, \frac{\omega}{\|\omega\|_2^2} \rangle \omega + \xi$, onde $\langle \omega, \xi \rangle_{L^2} = 0 \quad \xi = v - \langle v, \frac{\omega}{\|\omega\|_2^2} \rangle \omega$ e assim:

$$\begin{aligned} E'(\omega) \cdot v &= \langle v, \frac{\omega}{\|\omega\|_2^2} \rangle_{L^2} \cdot E'(\omega) \omega + E'(\omega) \cdot \xi \\ &= \langle v, \left(\frac{E'(\omega) \omega}{\|\omega\|_2^2} \right) \cdot \omega \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Portanto $E'(\omega) = \lambda \omega$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, onde $\lambda = \frac{E'(\omega) \cdot \omega}{\mu}$ e podemos escrever:

$$-\Delta \omega - |\omega|^{p-1} \omega = \lambda \omega \quad \text{em } H^{-1}(\mathbb{R}^N).$$

Evidentemente podemos escrever $\lambda = -\sigma \omega; \quad \sigma \in \mathbb{R}$.

Afirmção: $\lambda < 0$.

Com efeito:

$$\begin{aligned} \lambda \mu &= E'(\omega) \cdot \omega = \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla \omega\|_2^2 - |\omega|^{p+1} \\ \frac{\lambda \mu}{2} &= E(\omega) + \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2} \right) \cdot \|\omega\|_{p+1}^{p+1} \quad \text{logo:} \\ \frac{1}{2} \lambda \mu + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \cdot \|\omega\|_{p+1}^{p+1} &= E(\omega) = j(\mu) < 0 \end{aligned}$$

e assim $\lambda < 0$ pois $2 < p + 1$ e $\mu > 0$. ■

Demonstrado essa afirmação concluímos que $\text{ sinal } \omega = \text{ sinal } \sigma$.

Definimos, para $\sigma > 0$: $\omega(x) = \sigma^{\frac{1}{p-1}} \cdot u(\sqrt{\sigma}x)$. Temos:

$$\text{i) } (\Delta\omega)(x) = \sigma^{\frac{1}{p-1}} \cdot \sigma(\Delta u)(\sqrt{\sigma}x) = \sigma^{\frac{p}{p-1}}(\Delta u)(\sqrt{\sigma}x)$$

$$\text{ii) } \sigma\omega \cdot \omega(x) = \sigma\omega \cdot \sigma^{\frac{1}{p-1}} \cdot u(\sqrt{\sigma}x) = \sigma^{\frac{p}{p-1}}\omega \cdot u(\sqrt{\sigma}x)$$

iii) $|\omega(x)|^{p-1} \cdot \omega(x) = \sigma^{\frac{p}{p-1}} \cdot |u(\sqrt{\sigma}x)|^{p-1} \cdot u(\sqrt{\sigma}x)$, portanto a função satisfaz:

$$-\Delta u + \omega u = |u|^{p-1} \cdot u$$

onde

$$\omega = \frac{-\lambda}{\sigma} = \left(\frac{E'(\omega)\omega}{-\sigma\mu} \right)$$

o que finalmente prova que a equação possui uma solução fraca da forma "Standing Wave". ■

Capítulo 5

O Segundo Princípio de Concentração e Compacidade

Problemas com expoentes críticos tem prendido a atenção de matemáticos desde o início do século XX, quando foi constatado que os mergulhos dos espaços de Sobolev, envolvendo expoentes críticos, não são compactos. Esta dificuldade permaneceu por algumas décadas e estão aparecendo equações em Física-Matemática, em Geometria Diferencial e em outros campos do conhecimento científico envolvendo expoentes críticos, e devido a falta de compacidade, os matemáticos não conseguiam resolvê-las.

Neste capítulo iremos apresentar a principal ferramenta matemática, devida a Lions, P. L., ([PL3], [PL4]) para abordar problemas onde a perda de compacidade é devida ao aparecimento expoentes críticos. Em seguida resolveremos um problema envolvendo expoentes críticos modelada no \mathbb{R}^n . Para isto, o Lema (2.12) bem como *O Segundo Princípio de Concentração e Compacidade* deverão trabalhar harmonicamente, tendo em vista que o problema irá apresentar expoente crítico e domínios não limitados.

Para todo $u \in C_c^\infty(\Omega)$, $k \geq 1$, $p \geq 1$ defina

$$\|u\|_{D^{k,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx$$

Designamos por $D^{k,p}(\Omega)$ o completamento de $C_c^\infty(\Omega)$ munido com $\|\cdot\|_{D^{k,p}(\Omega)}$. Suponhamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $kp < n$. Pelo mergulho de Sobolev, $D^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, continuamente, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, e portanto existe uma constante maximal $S = S(k, n, \Omega, p)$ tal que:

$$S \cdot \|u\|_{L^q(\Omega)}^p \leq \|u\|_{D^{k,p}(\Omega)}^p \quad \forall u \in D^{k,p}(\Omega) \quad (5.1)$$

Proposição 5.1 *A constante de Sobolev independe do domínio Ω , isto é, $S = S(k, n, p)$.*

Prova: Defina a transformação $T_R(u) = u_R$ onde:

$$u_R(x) = R^{-\frac{n}{q}} u\left(\frac{x}{R}\right)$$

Afirmação: $\|u_R\|_{D^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{D^{k,p}(\mathbb{R}^n)}$ e $\|u_R\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$

Com efeito:

$$\|u_R\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q = \int_{\mathbb{R}^n} R^{-n} \left| u\left(\frac{x}{R}\right) \right|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q.$$

por outro lado

$$\begin{aligned} \|u_R\|_{D^{k,p}(\mathbb{R}^n)} &= \sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}^n} R^{-\frac{n}{q}p} \left| D^\alpha u\left(\frac{x}{R}\right) \right|^p dx = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}^n} R^{-\frac{n}{q}p-kp} \left| D^\alpha(u)\left(\frac{x}{R}\right) \right|^p dx \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathbb{R}^n} R^{-\frac{n}{q}p-kp+n} |D^\alpha u(y)|^p dy = \|u\|_{D^{k,p}(\mathbb{R}^n)}^p \end{aligned}$$

uma vez que se verifica: $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ ■

Para todo domínio Ω , podemos assumir que $C_c^\infty(\Omega)$ é um subespaço de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

extendendo as funções $u \in C_c^\infty(\Omega)$ por 0 fora de Ω . Similarmente, podemos pensar $D^{k,p}(\Omega) \subseteq D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Desta forma obtemos:

$$S(\Omega) = \inf\{\|u\|_{D^{k,p}(\Omega)} : u \in D^{k,p}(\Omega); \|u\|_{L^q(\Omega)} = 1\} \geq S(\mathbb{R}^n)$$

Reciprocamente, seja $\{u_m\} \subseteq D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ uma seqüência minimizante para $S(\mathbb{R}^n)$, por densidade podemos assumir $\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sem perda de generalidade, podemos admitir $0 \in \Omega$. Para $R_m > 0$ suficientemente pequeno, podemos garantir que $v_m = T_{R_m}(u_m) \in C_c^\infty(\Omega)$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Pela invariância de $\|\cdot\|_{D^{k,p}}$ e $\|\cdot\|_q$ mostrada na afirmação temos:

$$S(\Omega) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|v_m\|_{D^{k,p}(\Omega)}^p = \lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{D^{k,p}(\mathbb{R}^n)}^p = S(\mathbb{R}^n) \quad \blacksquare$$

Deixe-nos observar que se $p > 1$, e $k = 1$, a melhor constante da desigualdade (5.1) nunca é atingida em nenhum domínio diferente do \mathbb{R}^{n-1} , em particular para domínios limitados.

De fato, se $u \in D^{1,p}(\Omega)$ atingi-se $S = S(\mathbb{R}^n)$, um múltiplo do mesmo seria uma solução fraca da equação:

$$-\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = u|u|^{q-2} \quad \text{em } \mathbb{R}^n \quad (5.2)$$

e se anularia em $\mathbb{R} \setminus \Omega$, o que contradiz o *Princípio do Máximo Forte* aplicado à equação (5.2)

Devemos suspeitar que a invariância sob T_R seja responsável por este "defeito". Note que para todo $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $u_R \rightarrow 0$, se $R \rightarrow 0$, enquanto S é invariante por T_R . Assim não devemos esperar compacidade de uma seqüência minimizante.

Para simplificar a notação, será conveniente denotarmos $\sum_{\alpha=k} |D^\alpha u|^p$ por $|D^k u|^p$.

Lema 5.2 (Lema de Concentração e Compacidade II, [PL3]) *Seja $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $kp < n$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Suponha que $u_m \rightharpoonup u$, em $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, e $\mu_m = \int |D^k u_m|^p dx \xrightarrow{*}$*

¹Este é um bom exemplo de uma Aplicação Linear Contínua, entre espaços de Banach reflexivos, a qual a norma não é atingida.

$\mu, \nu_m = |u_m|^q dx \xrightarrow{*} \nu$, no sentido das medidas, onde μ, ν são medidas limitadas não negativas em \mathbb{R}^n ($\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)^+$). Então:

(1°) Existe um conjunto, no máximo enumerável, J , uma família $\{x_j \in \mathbb{R}^n : j \in J\}$ de pontos no \mathbb{R}^n , e uma família $\{\nu_j \in \mathbb{R}_*^+ : j \in J\}$ de números positivos tais que:

$$\nu = |u|^q dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$$

onde δ_x é a medida de Dirac concentrada no ponto x .

(2°) Em adicional:

$$\mu \geq |D^k u|^p dx + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$$

para alguma família de números reais positivos $\{\mu_j : j \in J\}$, satisfazendo:

$$S \cdot (\nu_j)^{p/q} \leq \mu_j \quad \forall j \in J$$

onde S é a constante de Sobolev. Em particular, $\sum_{j \in J} (\nu_j)^{p/q} < \infty$

Prova: Seja $v_m = u_m - u \in D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Desta forma, $v_m \rightarrow 0$ em $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Defina $w_m = \nu_m - |u|^q dx = (|u_m|^q - |u|^q) dx$.

Afirmação: $w_m = |v_m|^q dx + o(1)$, onde $o(1) \xrightarrow{*} 0$ com $m \rightarrow \infty$

De fato, devemos mostrar que: $(|u_m|^q - |v_m|^q) dx \xrightarrow{*} |u|^q dx$. Para isto, fixemos $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e calculemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_m|^q - |v_m|^q) \cdot \varphi dx &= - \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \frac{d}{dt} |u_m - tu|^q \cdot \varphi dt dx \\ &= q \int_{\text{supp} \varphi} \int_0^1 u(u_m - tu) |u_m - tu|^{q-2} \cdot \varphi dt dx \\ &\longrightarrow q \int_{\text{supp} \varphi} \int_0^1 u(u - tu) |u - tu|^{q-2} \cdot \varphi dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \cdot \varphi dx \end{aligned}$$

onde a convergência acima é justificada pois $u_m \rightarrow u$ em $L^{q-1}(\text{supp} \varphi)$.

Seja $\lambda_m = |D^k v_m|^p dx$. Como $v_m \rightarrow 0$ em $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, garantimos que $\|D^k v_m\|$ é

limitada e portanto λ_m é uma seqüência limitada em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema de Banach Alaoglu, podemos admitir que $\lambda_m \xrightarrow{*} \lambda$ enquanto que $w_m \xrightarrow{*} \nu - |u|^q dx = \omega$, onde λ e ω são medidas ≥ 0 no \mathbb{R}^n . Fixado $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^q d\omega &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^q d\omega_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |v_m \cdot \xi|^q dx \\ &\leq S^{-q/p} \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D^k(v_m \cdot \xi)|^p dx \right)^{q/p} \\ (\zeta) \qquad &= S^{-q/p} \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^p \cdot |D^k v_m|^p dx \right)^{q/p} \\ &= S^{-q/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^p d\lambda \right)^{q/p} \end{aligned}$$

onde a passagem (ζ) , é justificada pelo uso do Teorema de Rellich para garantir que os termos da forma $|D^r \xi| \cdot |D^{k-r} v_m| \rightarrow 0$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, quando $m \rightarrow \infty$. Isto é, provamos que:

$$S \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^q d\omega \right)^{p/q} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^p d\lambda. \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (5.3)$$

Seja $\{x_j \in \mathbb{R}^n : j \in J\}$ os pontos singulares da medida ω , e decomponha $\omega = \omega_0 + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$, com ω_0 livre de pontos singulares. Como $\omega(\mathbb{R}^n) < \infty$, segue-se que $\#J \leq \aleph_0$, ademais $\omega_0 \geq 0$. Escolhemos agora, $\xi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $0 \leq \xi_j \leq 1$ e $\xi_j(x_j) = 1$. De (5.3) nós vemos que:

$$S(\nu_j)^{p/q} \delta_{x_j}(E) \leq S \left(\int_E |\xi_j|^q d\omega \right)^{p/q} \leq \int_E |\xi_j|^p d\lambda \leq \lambda(E)$$

ou seja:

$$\lambda \geq S(\nu_j)^{p/q} \delta_{x_j} \quad \forall j \in J$$

Desde que $|D^k u_m|^p - |D^k v_m|^p$ é de ordem mais baixa do que $|D^k v_m|^p$ nos pontos singulares, a última desigualdade também é válida para $\mu = \omega^* - \lim |D^k u_m|^p dx$.

Por outro lado, pela fraca-semicontinuidade inferior, vale:

$$|D^k u|^p dx \leq \liminf |D^k u_m|^p dx = \mu.$$

Uma vez que as medidas δ_{x_j} e $|D^k u|^p dx$ são relativamente singulares,

$$\mu \geq |D^k u|^p dx + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$$

com $\mu_j \geq S(\nu_j)^{p/q}$. E portanto, mostramos (2°).

Agora para qualquer aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{x_j\}_{j \in J}$, obtemos por (5.3), fazendo $\xi = \xi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ uma seqüência convergindo para a função característica de Ω , χ_Ω :

$$\left(\int_{\Omega} d\omega_0 \right)^{p/q} = \left(\int_{\Omega} d\omega \right)^{p/q} \leq S^{-1} \int_{\Omega} d\lambda$$

logo $\omega_0(\Omega) \leq S^{-1} \lambda(\Omega)$ e assim ω_0 é absolutamente contínua em relação a λ .² Pelo Teorema de Radon-Nikodym, existe uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \lambda)$ tal que $d\omega_0 = f d\lambda$, $\lambda - q.t.p.$ Ademais, para $\lambda - q.t.p.$ temos:

$$f(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{\int_{B_\rho(x)} d\omega_0}{\int_{B_\rho(x)} d\lambda} \right)$$

Novamente invocando a desigualdade obtida em (5.3), se x não é um ponto singular de λ :

$$Sf(x)^{p/q} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{S \left(\int_{B_\rho(x)} d\omega_0 \right)^{p/q}}{\left(\int_{B_\rho(x)} d\lambda \right)^{p/q}} \right) \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\int_{B_\rho(x)} d\lambda \right)^{\frac{q-p}{q}} = 0,$$

Como λ possui, no máximo, um número enumerável de pontos singulares, e ω_0 não possui pontos singulares, segue-se que $f = 0$ $q.t.p.$ e assim $\omega_0 = 0$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Ou seja, acontece (1°), pois:

$$\omega = \nu - |u|^q dx = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j} \quad \blacksquare$$

Não obstante o fato deste resultado ter fundamental importância no estudo de problemas de minimização envolvendo expoentes críticos, como será visto no Capítulo seguinte, gostaríamos de apresentar inicialmente uma celebre aplicação neste método, devido a P. L. Lions:

²Se $\lambda(\Omega) = 0$ então $\omega_0(\Omega) = 0$

Teorema 5.3 [P. L. Lions] *Seja $k \in \mathbb{N}$, $p > 1$, $kp < n$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Suponha que $\{u_m\}$ é uma seqüência minimizante para S em $D^{k,p} = D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ com $\|u_m\|_{L^q} = 1$. Então $\{u_m\}$ é relativamente compacta em $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, a menos de translações e rotações.*

Prova: Encolhemos $\tilde{x}_m \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{R}_m > 0$ tais que a seqüência reescalada: $v_m(x) = \tilde{R}_m^{-n/q} u_m\left(\frac{x - \tilde{x}_m}{\tilde{R}_m}\right)$ satisfaça:

$$Q_m(1) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B_1(x)} |v_m|^q dx = \int_{B_1(0)} |v_m|^q dx = \frac{1}{2} \quad (5.4)$$

Desde que $p > 1$, podemos assumir, a menos de passar a uma subseqüência, que $v_m \rightharpoonup v$ em $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ e $v_m \rightarrow v$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$ (devido a injeção contínua $D^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$). Consideremos agora, a seguinte família e medidas:

$$\mu_m = |D^k v_m|^p dx$$

$$\nu_m = |v_m|^q dx$$

Iremos inicialmente aplicar o Primeiro Princípio de Concentração e Compacidade (Lema 2.12) a seqüência ν_m :

Passo 1: Anulamento não ocorre.

segue-se trivialmente da construção de v_m .

Passo 2: Dicotomia não ocorre.

Suponhamos que houvesse dicotomia, logo existiria $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\forall \varepsilon > 0 \exists R_\varepsilon > 0$, $\{x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ e medidas ν_m^1, ν_m^2 tais que:

$$\begin{cases} 0 \leq \nu_m^1 + \nu_m^2 \leq \nu_m \\ \text{supp}(\nu_m^1) \subseteq B_{R_\varepsilon}(x_m), \quad \text{supp}(\nu_m^2) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B_{2R_\varepsilon}(x_m) \\ \limsup_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} d\nu_m^1 - \lambda \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} d\nu_m^2 - (1 - \lambda) \right| \right\} \leq \varepsilon \end{cases}$$

Escolhendo uma seqüência $\varepsilon_m \rightarrow 0$, e correspondentes $R_m > 0$, a menos de uma subsequência, nós poderíamos garantir que:

$$\text{supp}(\nu_m^1) \subseteq B_{R_m}(x_m), \quad \text{supp}(\nu_m^2) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B_{2R_m}(x_m) \quad e$$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^n} d\nu_m^1 - \lambda \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} d\nu_m^2 - (1 - \lambda) \right| \right\} = 0$$

Ademais podemos assumir $R_m \rightarrow \infty$. Escolhemos portanto uma função $\varphi \in C_c^\infty(B_2(0))$ tal que $\varphi = 1$ em $B_1(0)$, $0 \leq \varphi \leq 1$. Definimos $\varphi_m(x) = \varphi\left(\frac{x - x_m}{R_m}\right)$. Decompos agora:

$$v_m = v_m \cdot \varphi_m + v_m \cdot (1 - \varphi_m)$$

Desta forma:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^k v_m|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^k(v_m \cdot \varphi_m)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n} |D^k(v_m \cdot (1 - \varphi_m))|^p dx + \delta_m$$

onde o erro δ_m pode ser estimado por:

$$\delta_m \geq -C \sum_{l < k} \int_{B_{2R_m}(x_m) \setminus B_{R_m}(x_m)} |D^l v_m|^p \cdot |D^{k-l} \varphi_m|^p dx$$

Seja $A_m = B_{2R_m}(x_m) \setminus B_{R_m}(x_m)$. Podemos estimar $|D^{k-l} \varphi_m| \leq CR_m^{l-k}$ por interpolação (vide [Ad], Teorema 4.14). Assim podemos limitar qualquer termo que configura acima por:

$$\begin{aligned} \| |D^l v_m| \cdot |D^{k-l} \varphi_m| \|_{L^p(A_m)} &\leq CR_m^{l-k} \|D^l v_m\|_{L^p(A_m)} \\ &\leq CK\gamma \|D^l v_m\|_{L^p(A_m)} + CKR_m^{-k} \gamma^{-\frac{1}{k-l}} \|v_m\|_{L^p(A_m)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde γ pode ser escolhido arbitrariamente entre $(0, 1)$, enquanto $K = K(k, n)$. (Note que 5.5 é invariante por dilatações). Ademais, pela Desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned} R_m^{-k} \cdot \|v_m\|_{L^p(A_m)} &\leq R_m^{-k} \cdot \{\text{med}(A_m)\}^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|v_m\|_{L^q(A_m)} \\ &= C \|v_m\|_{L^q(A_m)} \\ &\leq C \left[\int_{\mathbb{R}^n} d\nu_m - \left(\int_{\mathbb{R}^n} d\nu_m^1 + \int_{\mathbb{R}^n} d\nu_m^2 \right) \right]^{1/q} \end{aligned}$$

Assim este tende a zero com $m \rightarrow \infty$. Enquanto $\|D^k v_m\|_{L^p(A_m)}^p \leq \|v_m\|_{D^{k,p}}^p \leq \tilde{C}$. Escolhendo uma seqüência conveniente $\gamma_m \rightarrow 0$ em (5.5), nós obtemos $\delta_m \geq o(1)$, onde $o(1) \xrightarrow{m} 0$. Agora pela desigualdade de Sobolev:

$$\begin{aligned} \|v_m\|_{D^{k,p}}^p &= \|v_m \cdot \varphi_m\|_{D^{k,p}}^p + \|v_m \cdot (1 - \varphi_m)\|_{D^{k,p}}^p + \delta_m \\ &\geq S(\|v_m \cdot \varphi_m\|_{L^q}^p + \|v_m \cdot (1 - \varphi_m)\|_{L^q}^p) + \delta_m \\ &\geq S \left[\left(\int_{B_{R_m}(x_m)} d\nu_m \right)^{p/q} + \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R_m}(x_m)} d\nu_m \right)^{p/q} \right] + \delta_m \\ &\geq S(\lambda^{p/q} + (1 - \lambda)^{p/q}) - o(1) \end{aligned}$$

onde $o(1) \xrightarrow{m} 0$ Mas $0 < \lambda < 1$ e $p < q$, logo $\lambda^{p/q} + (1 - \lambda)^{p/q} > 1$, contradizendo a hipótese inicial que $\|v_m\|_{D^{k,p}}^p = \|u_m\|_{D^{k,p}}^p \rightarrow S$.

Logo ocorre Concentração: Seja $\{x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ a seqüência fornecida pelo Lema de Concentração e Compacidade. Para cada $\varepsilon > 0$ escolha $R = R(\varepsilon)$ tal que:

$$\int_{B_R(x_m)} d\nu_m \geq 1 - \varepsilon$$

Se $\varepsilon < 1/2$, nossa condição de normalização (5.4) implica que $B_R(x_m) \cap B_1(0) \neq \emptyset$. Então a conclusão do Primeiro Lema de Concentração e Compacidade (Lema (2.12)) acontece com $x_m = 0$, repassando $R(\varepsilon)$ por $2R(\varepsilon)+1$, se necessário. Assim, se $\nu_m \xrightarrow{*} \nu$ em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ segue-se que : $\int_{\mathbb{R}^n} d\nu = 1$

Pelo Lema de Concentração e Compacidade II, podemos assumir que:

$$\mu_m \rightharpoonup \mu \geq |D^k v|^p dx + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$$

$$\nu_m \rightharpoonup \nu = |v|^q dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$$

para certos $x_j \in \mathbb{R}^n$, $\mu_j, \nu_j, \in \mathbb{R}_*^+$ satisfazendo:

$$S(\nu_j)^{p/q} \leq \mu_j \quad \forall j \in J$$

Invocando, mais uma vez, a Desigualdade de Sobolev, podemos escrever:

$$\begin{aligned} S + o(1) &= \|v_m\|_{D^{k,p}}^p = \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_m \geq \|v_m\|_{D^{k,p}}^p + \sum_{j \in J} \mu_j + o(1) \\ &\geq S \left(\|v_m\|_q^{p/q} + \sum_{j \in J} (\nu_j)^{p/q} \right) + o(1) \end{aligned}$$

onde $o(1) \xrightarrow{m} 0$. Pela concavidade estrita da aplicação $\lambda \mapsto \lambda^{p/q}$ nós obtemos, continuando a seqüência de desigualdades acima:

$$\begin{aligned} S \left(\|v_m\|_q^{p/q} + \sum_{j \in J} (\nu_j)^{p/q} \right) + o(1) &\geq S \left(\|v_m\|_q + \sum_{j \in J} (\nu_j) \right)^{p/q} + o(1) \\ &= S \left(\int_{\mathbb{R}^n} d\nu \right)^{p/q} + o(1) = S + o(1) \end{aligned}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, no máximo um dos termos $\{ \|v\|_q, \{\nu_j\}_{j \in J} \}$ é diferente de zero. Note que a normalização (5.4) assegura que:

$$\nu_j \leq \frac{1}{2} \quad \text{para todo } j \in J.$$

Logo, todos ν_j devem ser 0, $\|v\|_q = 1$ e $v_m \rightarrow v$ fortemente em $L^q(\mathbb{R}^n)$ (devido a convexidade uniforme do espaço $L^q(\mathbb{R}^n)$). Mas então, pela Desigualdade de Sobolev:

$$S \leq \|v\|_{D^{k,p}} \leq \liminf \|v_m\|_{D^{k,p}} = S$$

donde, $\|v_m\|_{D^{k,p}} \rightarrow \|v\|_{D^{k,p}}$ e novamente por um argumento de convexidade uniforme do espaço $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, segue-se finalmente que: $v_m \rightarrow v$ fortemente em $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. ■

Corolário 5.4 Para todo $k \in \mathbb{N}$, $p > 1$ tais que $kp < n$, existe uma função $u \in D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ com $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 1$ e $\|u\|_{D^{k,p}(\mathbb{R}^n)}^p = S$ onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ e $S = S(k, n, p)$ é a constante de Sobolev.

Prova: Seja $\{u_m\}$ uma seqüência minimizante, i.e.,

$$\|u_m\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 1 \quad e \quad \|u_m\|_{D^{k,p}(\mathbb{R}^n)}^p \longrightarrow S$$

Como escólio do Teorema anterior, a seqüência $v_m = \tilde{R}_m^{-n/q} \cdot u_m \left(\frac{x - \tilde{x}_m}{\tilde{R}_m} \right)$ é relativamente compacta em $D^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Na demonstração da Proposição (5.1), provamos que $\|v_m\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|u_m\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ e $\|v_m\|_{D^{k,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \|u_m\|_{D^{k,p}(\mathbb{R}^n)}^p$ donde segue-se o resultado. ■

Corolário 5.5 *Existe solução não trivial para o problema*

$$(\star) \quad \begin{cases} \Delta_p u = \beta |u|^{q-2} u, & \beta > 0, \quad p > 1, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Prova: Consideremos o funcional associado ao problema (\star) :

$$E(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx - \frac{\beta}{q} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx$$

Devemos encontrar um ponto crítico de E . Pelo corolário anterior, existe um mínimo, que designaremos por u^* , do problema:

$$S = \inf \left\{ \|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p : u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n), \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 1 \right\}$$

Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^{p-2} \nabla u^* \cdot \nabla \omega = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |u^*|^{q-2} u^* \omega, \quad \forall \omega \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Fazendo $\omega = u^*$ na equação acima, obtemos $\lambda = S$. Finalmente se tomarmos a função $u_\beta = \left(\frac{\beta}{S} \right)^{q-p} \cdot u^*$, obtemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\beta|^{p-2} \nabla u_\beta \cdot \nabla \omega - \beta \int_{\mathbb{R}^n} |u_\beta|^{q-2} u_\beta \cdot \omega = 0 \quad \forall \omega \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

ou seja, u_β é um ponto crítico do funcional E ■

Capítulo 6

O Princípio de Concentração e Compacidade no Infinito

6.1 Preliminares

Seguindo a notação do Capítulo anterior, iremos denotar por $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ o fecho de C_c^∞ com respeito a norma:

$$\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

O seu dual será denotado por $D^{-1,2}(\mathbb{R}^n)$. É bem conhecido que $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ não está compactamente mergulhado no $L^2(\mathbb{R}^n)$. Contudo, iremos mostrar que este mergulho será compacto se mudarmos o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$ por $L_r^2(\mathbb{R}^n)$ sob uma conveniente condição a respeito do "peso" r .

Seja $r \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, $r \geq 0$, $r \neq 0$ em \mathbb{R}^n . Definimos:

$$L_r^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi)|^p r(\xi) d\xi < \infty \right\}$$

Equipamos o mesmo com a seguinte norma:

$$\|u\|_{r,p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi)|^p r(\xi) d\xi.$$

Por $Q(x, l)$, $l > 0$ iremos denotar seguinte cubo:

$$Q(x, l) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : |y_j - x_j| < \frac{l}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Lema 6.1 *Suponha que $r \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{p}{p-2}}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para algum $2 < p < 2^*$, $r \geq 0$ e $r \neq 0$ em \mathbb{R}^n , ademais,*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{Q(x, l)} r(y)^{\frac{p}{p-2}} dy = 0 \tag{6.1}$$

para algum $l > 0$. Então, $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ esta compactamente mergulhado em $L^2_r(\mathbb{R}^n)$

Prova: Sem perda de generalidade, podemos assumir $l = 1$.

Afirmação : É suficiente mostrarmos que para todo $\delta > 0$ existe $j > 0$ tal que:

$$(\zeta 1) \quad \|f - f \cdot \chi_{Q(0, j)}\|_{L^2_r} < \delta, \quad \text{para toda } f \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \text{ com } \|f\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \leq 1$$

Com efeito, seja $\{f_m\} \subseteq B_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)}$. Pela Desigualdade de Poincaré, $D^{1,2}(Q(0, R)) = W^{1,2}_0(Q(0, R)) \xrightarrow{\text{compacta}} L^p(Q(0, R))$, para $2 \leq p < 2^*$, assim podemos assumir que $f_m \rightarrow f$ em $L^p(Q(0, R))$ para cada $R > 0$ e $Df_m \rightarrow Df$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Como por hipótese ocorre (6.1), existe $j \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q(0, j)} |f_m - f|^2 \cdot r dx < 2\delta$$

Como $f_m \rightarrow f$ em $L^p(Q(0, j))$, assumindo $(\zeta 1)$ obtemos:

$$\int_{Q(0, j)} |f_m - f|^2 \cdot r dx \leq \left(\int_{Q(0, j)} |f_m - f|^p dx \right)^{2/p} \cdot \left(\int_{Q(0, j)} r^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}} \leq \delta, \quad \text{se } m > m_0$$

Logo $f_m \rightarrow f$ em $L^2_r(\mathbb{R}^n)$.

Passamos a mostrar que $(\zeta 1)$ acontece:

Começamos por cobrir o \mathbb{R}^n com cubos $Q = Q(z, 1)$, $z \in \mathbb{Z}^n$. Para cada $\eta > 0$, usamos a hipótese (6.1) para encontrarmos $j \in \mathbb{N}$ tal que $\int_Q r(y)^{\frac{p}{p-2}} dy < \eta$ para todo $Q = Q(z, 1)$ fora de $Q(0, j)$ e :

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q(0, j)} r(y) dy < \eta$$

Se Q é qualquer cubo, utilizando o Mergulho de Sobolev e a Desigualdade de Hölder nós temos:

$$(\zeta 2) \quad \int_Q f^2 dx \leq \left(\int_Q |f|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq S^{-1} \|Df\|_2^2$$

onde S é a constante de Sobolev. Também pela Desigualdade de Sobolev, encontramos:

$$(\zeta 3) \quad \int_Q |f - f_Q|^p dx \leq C \left[\int_Q |\nabla f|^2 dx \right]^{p/2}$$

onde $f_Q = \int_Q f(x) dx$, para $2 \leq p \leq 2^*$.

Segue-se de $(\zeta 2)$ e $(\zeta 3)$ que:

$$\begin{aligned} \int_Q f^2 \cdot r dx &\leq 2 \left[\int_Q |f - f_Q|^2 \cdot r dx + \int_Q \left(\int_Q |f(x)| dx \right)^2 r(y) dy \right] \\ &\leq 2 \left[\left(\int_Q |f - f_Q|^p dx \right)^{2/p} \cdot \|r\|_{L^{\frac{p-2}{p}}(Q)} + \left(\int_Q |f(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \|r\|_{L^1(Q)} \right] \\ &\leq C_1 \left(\int_Q |\nabla f|^2 \right) \cdot \left(\int_Q r^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}} + 2S^{-1} \cdot \left(\int_Q |\nabla f|^2 \right) \cdot \left(\int_Q r dx \right) \end{aligned}$$

onde C_1 independe de η . Agora somando todas estas desigualdades sobre $Q(z, 1)$ tais que $Q(z, 1) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus Q(0, j)$ obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q(0, j)} f^2 \cdot r dx \leq C_1 \eta^{\frac{p-2}{p}} + 2S^{-1} \eta < \delta, \quad \text{se } \eta \text{ for suficientemente pequeno} \quad \blacksquare$$

Lema 6.2 *Suponha que $r \in L_{loc}^{\frac{q+\varepsilon}{q}}(\mathbb{R}^n)$, para algum ε e q satisfazendo $2 < q < q + \varepsilon < 2^*$, $r \geq 0$ e $r \neq 0$ em \mathbb{R}^n , ademais,*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{Q(x, l)} r(y)^{\frac{q+\varepsilon}{q}} dy = 0$$

para algum $l > 0$. Então, $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ esta compactamente mergulhado em $L_r^q(\mathbb{R}^n)$

Prova: Similar ao Lema (6.1) ■

Como aplicação do Lema (6.1), iremos mostrar a existência do primeiro autovalor do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda k(x)u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u \neq 0, \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Teorema 6.3 *Suponha que $k \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, $k \neq 0$, $k \geq 0$ e que:*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{Q(x,l)} k(y)^{\frac{p}{p-2}} dy = 0$$

para algum $l > 0$ e $2 < p < 2^*$. Então existe uma função positiva $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que:

$$0 < \lambda_0 = \inf \left\{ \|Du\|_2^2 : \|u\|_{L_k^2} = 1, u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \right\} = \|Dv\|_2^2$$

Prova: Seja $\{u_m\}$ uma sequência minimizante. Desde que $\{u_m\}$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, podemos assumir que $u_m \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ e pelo Lema (6.1), $u_m \rightarrow v$ em $L_k^2(\mathbb{R}^n)$ e portanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} v^2(x) \cdot k(x) dx = 1 \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^n} |Dv|^2 dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |Du_m|^2 dx$$

uma vez que o funcional $\|\cdot\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^n)}$ é fracamente semi-contínuo inferiormente.

Assim, minimizamos o funcional $E(u) = \|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$ sob a variedade $F^{-1}(1)$ onde $F(u) = \|u\|_{L_k^2(\mathbb{R}^n)}^2$, logo pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que: $E'(v) \cdot w = \tilde{\lambda} F'(v) \cdot w$. Fazendo $w = v$ obtemos:

$$E(v) \cdot v = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \cdot \nabla v = \lambda_0 = \tilde{\lambda} F'(v) \cdot v = \tilde{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} k(x) \cdot v^2(x) dx = \tilde{\lambda} \quad \blacksquare$$

6.2 Concentração e Compacidade no Infinito

Inicialmente, iremos reescrever o segundo princípio de concentração e compacidade, desenvolvido no Capítulo anterior, no caso em que $k = 1$, $p = 2$, $q = 2^*$.

Lema 6.4 *Lema de Concentração e Compacidade II: Suponha que $u_m \rightharpoonup u$, em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, e $\mu_m = |Du_m|^p dx \xrightarrow{*} \mu$, $\nu_m = |u_m|^{2^*} dx \xrightarrow{*} \nu$, no sentido das medidas, onde μ , e ν são medidas limitadas não negativas em \mathbb{R}^n ($\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)^+$). Então:*

(1°) *Existe um conjunto J , no máximo enumerável, uma família $\{x_j \in \mathbb{R}^n : j \in J\}$ de pontos no \mathbb{R}^n , e uma família $\{\nu_j \in \mathbb{R}_*^+ : j \in J\}$ de números positivos tais que:*

$$(i) \quad \nu = |u|^{2^*} dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$$

onde δ_x é a medida de Dirac concentrada no ponto x .

(2°) *Em adicional:*

$$(ii) \quad \mu \geq |Du|^2 dx + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$$

para alguma família de números reais positivos $\{\mu_j : j \in J\}$, satisfazendo:

$$(iii) \quad S \cdot (\nu_j)^{2/2^*} \leq \mu_j \quad \forall j \in J$$

onde S é a constante de Sobolev. Em particular, $\sum_{j \in J} (\nu_j)^{p/q} < \infty$

Deixe-nos citar uma proposição que tem se mostrado bastante útil:

Proposição 6.5 *Seja $\{u_m\}$ uma sequência fracamente convergente em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ e defina:*

$$i) \quad \nu_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} (\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |u_m|^{2^*} dx)$$

$$ii) \quad \mu_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} (\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |Du_m|^2 dx)$$

As quantidades ν_∞ e μ_∞ existem e satisfazem:

$$1) \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_m|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^n} d\nu + \nu_\infty,$$

$$2) \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |Du_m|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} d\mu + \mu_\infty, \text{ e}$$

$$3) \quad S\nu_\infty^{2/2^*} \leq \mu_\infty$$

Iremos agora direcionar nossa atenção para um caso subcrítico em $W_0^{1,2}(\Omega)$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio não limitado.

Para $\lambda > 0$ e $2 < p < 2^*$, definamos:

$$(M) \quad 0 < \alpha_\lambda(\Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda u^2 dx : \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\}$$

Proposição 6.6 *Seja $\{u_m\}$ uma sequência fracamente convergente para u em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e definamos:*

$$i) \alpha_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega \cap \{|x| > R\}} |u_m|^p dx \right)$$

$$ii) \beta_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega \cap \{|x| > R\}} |\nabla u_m|^2 + \lambda u_m^2 dx \right)$$

Estas quantidades estão bem definidas e satisfazem:

$$c) \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_m|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx + \alpha_\infty,$$

$$d) \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_m|^2 + \lambda u_m^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 + \beta_\infty$$

$$e) \alpha_\lambda \cdot \alpha_\infty^{\frac{2}{p}} \leq \beta_\infty$$

Prova: Seja $\Phi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\Phi_R|_{B_R(0)} = 0$, $\Phi_R|_{|x| > R+1} = 1$ e $0 \leq \Phi_R \leq 1$ em \mathbb{R}^n . Temos por (M):

$$\alpha_\lambda(\Omega) \leq \int_\Omega \left(\left| \nabla \left(\frac{u_m \cdot \Phi_R}{\|u_m \cdot \Phi_R\|_{L^p(\Omega)}} \right) \right|^2 + \lambda \left(\frac{u_m^2 \cdot \Phi_R^2}{\|u_m \cdot \Phi_R\|_{L^p(\Omega)}^2} \right) \right) dx, \text{ portanto:}$$

$$\alpha_\lambda \cdot \|u_m \cdot \Phi_R\|_{L^p(\Omega)}^2 \leq \int_\Omega (|\nabla (u_m \cdot \Phi_R)|^2 + \lambda (u_m^2 \cdot \Phi_R^2)) dx$$

Facilmente conclui-se que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega \cap \{|x| > R\}} |\Phi_R \cdot u_m|^p dx \right) = \alpha_\infty$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega \cap \{|x| > R\}} (|\nabla u_m|^2 + \lambda u_m^2) \cdot \Phi_R^2 dx \right) = \beta_\infty$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_\Omega \nabla u_m \nabla \Phi_R \cdot \Phi_R u_m dx = 0 \quad e,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_\Omega |u_m \cdot D\Phi_R|^2 dx = 0$$

Portanto obtemos, já que:

$$\begin{aligned} |\nabla(u_m \cdot \Phi_R)|^2 &= (|\nabla u_m \cdot \Phi_R + u_m \nabla \Phi_R|)^2 = \\ &= |\nabla u_m|^2 \cdot \Phi_R^2 + 2\nabla u_m \nabla \Phi_R \cdot \Phi_R u_m + u_m^2 |\nabla \Phi_R|^2 \end{aligned}$$

a desigualdade (e) ■

Para mostrarmos (c) escrevemos:

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_m|^p dx = \int_{\Omega \cap (|x| < R)} |u|^p dx + \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega \cap (|x| \geq R)} |u_m|^p dx$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$, a relação (c) segue-se. ■

Analogamente:

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 + \lambda u_m^2 dx &= \\ &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega \cap (|x| < R)} |\nabla u_m|^2 + \lambda \int_{\Omega \cap (|x| < R)} u^2 + \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega \cap (|x| \geq R)} |\nabla u_m|^2 + \lambda u_m^2 dx \end{aligned}$$

Fazendo novamente $R \rightarrow \infty$, concluímos (d) ■

6.3 O Problema de Yamabe

Como uma aplicação do *Princípio de Concentração e Compacidade no infinito*, estudaremos o seguinte problema:

$$(Y) \quad \begin{cases} -\Delta u - \lambda k(x)u = K(x)|u|^{2^*-2}u & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u(x) > 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \text{ e } u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

O problema (Y) é uma generalização de um problema que teve origem na Geometria Diferencial, conhecido como *O Problema de Yamabe*, (vide [Dao]).

Assumiremos que $k \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $K \neq 0$ e :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{Q(x,l)} |k(y)|^{\frac{p}{p-2}} dy = 0$$

para algum $l > 0$ e $2 < p < 2^*$.

$K \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e existam: $x_0 \in \mathbb{R}^n$, constantes $\sigma > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ e $R > 0$ tais que:

$$|K(x_0) - K(x)| \leq C_1 |x - x_0|^2 \quad \text{se } n = 4$$

$$|K(x_0) - K(x)| \leq C_1 |x - x_0|^{2+\sigma} \quad \text{se } n \geq 5$$

$$K(x_0) > 0, \quad |K(x_0) - K(x)| \leq C_2 |x - x_0| \quad \text{se } |x - x_0| \leq R \text{ e } K(x_0) = \|K\|_\infty$$

Nós definimos o funcional $F : D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^n} k(x) u^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^n} K(x) |u|^{2^*} dx$$

Segue-se do Lema (6.1) e do mergulho contínuo de Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ que o funcional está bem definido e pontos críticos de F são soluções (*fracas*) de (Y).

Iremos procurar, inicialmente, níveis de F para os quais a condição de *Palais–Smale* no nível c é satisfeita. $(PS)_c$

Faremos uso então das chamadas "*Funções truncadas extremas de Talenti*":

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\Phi(x)}{(\varepsilon + |x - x_0|^2)^{\frac{n-2}{2}}}, \quad \varepsilon > 0$$

onde $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \Phi(x) \leq 1$, $\Phi(x) = 1$ em $|x - x_0| < \frac{R}{2}$ e $\Phi(x) = 0$ se $|x - x_0| > R$. O funcional F foi estudado por *Daomin, C.* em [Dao], onde está demonstrado o seguinte lema técnico:

Lema 6.7 Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno nós temos:

$$\sup_{t \geq 0} F(t \cdot v_\varepsilon) < \frac{S^{\frac{n}{2}}}{n \|K\|_\infty^{\frac{n-2}{2}}}$$

$$\text{onde } v_\varepsilon(x) = \frac{u_\varepsilon}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}}$$

A prova deste lema pode ser encontrado em [Dao].

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema.

Teorema 6.8 *Seja $0 < \lambda < \lambda_0$ e $n \geq 4$. Então o problema (Y) possui uma solução.*

Prova: Definamos o funcional $F_* : D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$F_*(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^n} k(x)(u^+)^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^n} K(x)(u^+)^{2^*} dx$$

onde $u^+ = \max\{0, u\}$.

Pelo Teorema (6.3), podemos escrever, $\forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lambda_0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla \left(\frac{u}{\|u\|_{k,2}} \right) \right|^2 dx = \frac{1}{\|u\|_{k,2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2$$

assim: $\|u\|_{k,2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_0} \|\nabla u\|_2^2$, ademais $\|u^+\|_{k,2}^2 \leq \|u\|_{k,2}^2$ e portanto:

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^n} k \cdot (u^+)^2 dx \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0} \right) \cdot \|\nabla u\|_2^2$$

Pelo mergulho de Sobolev:

$$\int_{\mathbb{R}^n} K \cdot (u^+)^{2^*} \leq \|K\|_\infty \cdot \|u\|_{2^*}^{2^*} \leq \frac{\|K\|_\infty}{S^{\frac{2^*}{2}}} \cdot \|\nabla u\|_2^{2^*}$$

onde S é a constante ótima de Sobolev. Assim, para todo $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$:

$$F(u) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0} \right) \|\nabla u\|_2^2 - \frac{\|K\|_\infty}{S^{\frac{2^*}{2}}} \cdot \|\nabla u\|_2^{2^*}$$

Logo existem constantes $\alpha > 0$ e $\rho > 0$ tais que:

$$F_*(u) \geq \alpha \quad \text{se} \quad \|u\|_{D^{1,2}} = \rho$$

Temos também que $F_*(0) = 0$ e $F_*(t_0 \cdot v_\varepsilon) = F(t_0 \cdot v_\varepsilon) < 0$, para t_0 suficientemente grande, pois $2^* > 2$ e fixado v_ε ,

$$F(t \cdot v_\varepsilon) = a_{v_\varepsilon} t^2 - b_{v_\varepsilon} t^{2^*} \rightarrow -\infty \quad \text{se} \quad t \rightarrow \infty$$

Tomemos ε como no Lema (6.7).

Seja $\Gamma = \{g \in C([0, 1], D^{1,2}(\mathbb{R}^n)) : g(0) = 0 \text{ e } g(1) = t_0 \cdot v_\varepsilon\}$ e definamos:

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} F_*(g(t))$$

É claro que $\alpha \leq c$, pois para todo $g \in \Gamma$, como $\|g(0)\|_{D^{1,2}} = 0$ e $\|g(1)\|_{D^{1,2}} > \rho$ existe $t_g \in (0, 1)$ tal que $\|g(t_g)\| = \rho$ e portanto $F_*(g(t_g)) \geq \alpha$ donde: $\sup_{t \in [0,1]} F_*(g(t)) \geq \alpha$. Tomando o ínfimo sob todos os $g \in \Gamma$, segue-se que $\alpha \leq c$. Por outro lado, se considerarmos a função $g(t) = t \cdot t_0 v_\varepsilon \in \Gamma$ nós temos:

$$(\xi) \quad c \leq \sup_{t \in [0,1]} F(t \cdot t_0 v_\varepsilon) < \frac{S^{\frac{n}{2}}}{n \cdot \|K\|_\infty^{\frac{n-2}{n}}}, \quad (\text{devido ao Lema (6.7)})$$

Pelo Princípio do Passo da Montanha (sem a condição (PS)), existe uma sequência $\{u_m\} \subseteq D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que $F_*(u_m) \rightarrow c$ e $F'_*(u_m) \rightarrow 0$ em $D^{-1,2}(\mathbb{R}^n)$.

Passamos a mostrar que a sequência $\{u_m\}$ é limitada:

$$\begin{aligned} \langle F'_*(u_m), u_m^- \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_m \cdot \nabla u_m^- - \lambda \cdot \int_{\mathbb{R}^n} k u_m^+ \cdot u_m^- dx - \int_{\mathbb{R}^n} K(u_m^+)^{2^*-1} u_m^- dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_m^-|^2 dx \end{aligned}$$

pois $u_m = u_m^+ - u_m^-$ ($u_m^- = -\min\{0, u_m\}$). Assim:

$$\|u_m^-\|_{D^{1,2}}^2 = |\langle F'_*(u_m), u_m^- \rangle| \leq \|F'_*(u_m)\|_{D^{-1,2}} \cdot \|u_m^-\|_{D^{1,2}}$$

e portanto, como $F'_*(u_m) \rightarrow 0$, segue-se que $u_m^- \rightarrow 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Segue-se então que:

$$F_*(u_m) = F_*(u_m^+ - u_m^-) = F_*(u_m^+) + 2 \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_m^+ \cdot \nabla u_m^- - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_m^-|^2$$

donde: $F(u_m^+) = F_*(u_m^+) \rightarrow c$.

Por outro lado, se n é suficientemente grande:

$$\langle F'_*(u_m), u_m^+ \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_m^+|^2 - \lambda \cdot \int_{\mathbb{R}^n} k(u_m^+)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} K(u_m^+)^{2^*} dx \leq \|\nabla u_m^+\|_2$$

Pelos mergulhos contínuos: $D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_k^2(\mathbb{R}^n)$ e $D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2^*}$ temos:

$$\|\nabla u_m^+\|_2 \geq \|\nabla u_m^+\|_2^2 - \lambda \tilde{C} \|\nabla u_m^+\|_2 - \|K\|_\infty \tilde{C} \|\nabla u_m^+\|_2$$

o que nos mostra que $\|\nabla u_m^+\|_2$ é limitado e finalmente:

$$\|u_m\|_{D^{1,2}} = \|\nabla u_m\|_2 = \|\nabla u_m^+ - \nabla u_m^-\|_2 \leq \|\nabla u_m^+\|_2 + \|\nabla u_m^-\|_2$$

o que prova que $\{u_m\}$ é uma sequência limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, a menos de uma subsequência, podemos assumir que:

$$\begin{cases} u_m \rightharpoonup u \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^n) \\ u_m \rightarrow u \text{ q.t.p} \\ u_m^+ \rightarrow u^+ \text{ em } L^{2^*}(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Ademais, pelo Lema (6.1), $\int_{\mathbb{R}^n} k(u_m^+)^2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} k(u^+)^2$ (pois $u_m \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$).

Isto significa que: Para qualquer $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_m \cdot \nabla v &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v \\ \int_{\mathbb{R}^n} k u_m^+ \cdot v &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} k u^+ \cdot v \end{aligned}$$

Como $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ e $(u_m^+)^{2^*-1} \rightarrow (u^+)^{2^*-1}$ em $L^{(2^*)'}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(u_m^+)^{2^*-1} \cdot v \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} K(u^+)^{2^*-1} \cdot v$$

ou seja:

$$-\Delta u - \lambda k u^+ = K(u^+)^{2^*} \text{ em } D^{-1,2}(\mathbb{R}^n)$$

Se tomarmos a função teste u^- nós encontramos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^-|^2 = 0$$

uma vez que: $\nabla u \cdot \nabla u^- = ||\nabla u^-|^2|$ e $u^+ \cdot u^- = 0$ implicando portanto que $u^- = 0$ em \mathbb{R}^n , isto é, $u \geq 0$ em \mathbb{R}^n .

Iremos agora mostrar que $u \neq 0$ e conseqüentemente, $u > 0$ em \mathbb{R}^n , pela *Desigualdade de Harnack*. Do fato que $F_*(u_m) \rightarrow c > 0$, obtemos facilmente que:

$$l = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_m|^2 dx > 0$$

Pelo Lema (6.1) vale que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k(u_m^+)^2 dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k u^2 dx \quad (u = u^+)$$

Mostraremos a seguir que $\lambda \int_{\mathbb{R}^n} ku^2 dx \neq 0$.

Suponha por absurdo que $\lambda \int_{\mathbb{R}^n} ku^2 dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k(u_m^+)^2 dx = 0$, então teríamos que:

$$l = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} K(u_m^+)^{2^*} dx > 0 \quad (\text{pois } \langle F'_*(u_m), u_m^+ \rangle \rightarrow 0)$$

Ademais:

$$c = \lim_{m \rightarrow \infty} F'_*(u_m) = \frac{l}{2} - \frac{l}{2^*} = \frac{l}{n}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} l &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|\nabla u_m\|_2^2 \geq S \lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{2^*}^2 \geq S \|K\|_\infty^{\frac{2-n}{n}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathbb{R}^n} K(u_m^+)^{2^*} dx \right]^{\frac{n-2}{n}} \\ &= S \|K\|_\infty^{\frac{n-2}{n}} l^{\frac{2-n}{n}} \quad \left(\text{pois : } \int K(u_m^+)^{2^*} dx \leq \|K\|_\infty \int (u_m^+)^{2^*} dx \text{ e } \frac{2}{2^*} = \frac{n-2}{n} \right) \end{aligned}$$

isto equivale a:

$$l^{1-\frac{n-2}{n}} \geq S \|K\|_\infty^{\frac{2-n}{n}} \quad \therefore \quad l \geq S^{\frac{n}{2}} \|K\|_\infty^{\frac{2-n}{n}}$$

e assim, $c \geq \frac{S^{\frac{n}{2}}}{n \cdot \|K\|_\infty^{\frac{n-2}{n}}}$, o que contradiz a desigualdade (ξ) ■

Em virtude o *Lema de Concentração e Compacidade II* existem medidas μ e $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, um conjunto enumerável J , uma sequência de constantes positivas $\{\mu_j\}$ e $\{\nu_j\}$, $j \in J$ e uma sequência $\{x_j\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $j \in J$ tais que ocorrem (i), (ii) e (iii). Seja x_k um ponto singular das medidas μ e ν . Escolhemos $\Phi_\delta \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\Phi_\delta = 1$ em $|x - x_k| < \delta$, $\Phi_\delta = 0$ em $|x - x_k| \geq 2\delta$, $0 \leq \Phi_\delta \leq 1$ e $|D\Phi_\delta| \leq \frac{2}{\delta}$ em \mathbb{R}^n . Desde que $\langle F'_*(u_m), u_m \cdot \Phi_\delta \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ temos:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_m \cdot \nabla (u_m \Phi_\delta) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k u_m^+ u_m \Phi_\delta dx - \int_{\mathbb{R}^n} K(u_m^+)^{2^*-1} u_m \Phi_\delta dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_m|^2 \Phi_\delta dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k u_m^+ u_m \Phi_\delta dx - \int_{\mathbb{R}^n} K(u_m^+)^{2^*-1} u_m \Phi_\delta dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_m \cdot \nabla \Phi_\delta u_m \end{aligned}$$

converge a zero, quando m tende ao infinito. Em vista disto podemos escrever que:

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_m| |u_m| |\nabla \Phi_\delta| dx \geq - \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_m \cdot \nabla \Phi_\delta u_m dx =$$

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_m|^2 \Phi_\delta dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k u_m^+ u_m \Phi_\delta dx - \int_{\mathbb{R}^n} K (u_m^+)^{2^*-1} u_m \Phi_\delta dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta d\mu - \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k u^2 \Phi_\delta dx - \int_{\mathbb{R}^n} K \Phi_\delta d\nu. \end{aligned}$$

Reescrevendo a desigualdade acima, encontramos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta d\mu - \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k u^2 \Phi_\delta dx - \int_{\mathbb{R}^n} K \Phi_\delta d\nu &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_m| |u_m| |\nabla \Phi_\delta| dx \\ &\leq \tilde{C} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} u^2 |\nabla \Phi_\delta|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = \sup_{m \geq 1} \|\nabla u_m\|_2$. Pela *Desigualdade de Hölder* ainda nós temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u^2 |\nabla \Phi_\delta|^2 dx &\leq \left(\int_{|x_k - x| < 2\delta} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \cdot \left(\int_{|x_k - x| < 2\delta} |\nabla \Phi_\delta|^n dx \right)^{\frac{2}{n}} \\ &\leq \left[\left(\frac{2}{\delta} \right)^n \cdot \omega_n (2\delta)^n \right]^{\frac{2}{n}} \cdot \left(\int_{|x_k - x| < 2\delta} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &= 16 \omega_n^{2/n} \cdot \left(\int_{|x_k - x| < 2\delta} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \end{aligned} \tag{6.2}$$

onde ω_n é o volume da bola unitária no \mathbb{R}^n . Fazendo $\delta \rightarrow 0$ em (6.2), nós deduzimos que:

$$\mu_k - K(x_k) \nu_k \leq 0 \quad \therefore \quad K(x_k) \nu_k \geq \mu_k$$

Nós podemos assumir que $K(x_k) > 0$, pois caso contrário, x_k não seria ponto singular (μ_k e $\nu_k > 0$).

Lembramos que o item (iii) do *Segundo Princípio de Concentração e Compacidade*, (PCC-II) nos diz que:

$$S(\nu_k)^{2/2^*} \leq \mu_k, \quad \text{donde :}$$

(a) $\nu_k = 0$, ou

$$(b) S(\nu_k)^{2/2^*} \leq \mu_k \leq k(x_k) \nu_k \implies \nu_k \geq \left(\frac{S}{K(x_k)} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (\text{pois : } 1 - 2/2^* = 2/n)$$

No intuito de considerar a possibilidade da concentração das medidas μ e ν no

infinito, devemos introduzir as constantes μ_∞ e ν_∞ definidas na Proposição (6.5).

Se denotarmos por: $K(\infty) = \limsup_{|x| \rightarrow \infty} K(x)$, obtemos:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} K(x) |u_m|^{2^*} dx \leq K(\infty) \nu_\infty \quad (6.3)$$

Pelo Lema (6.1) nós temos:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} k(x) (u_m^+)^2 \cdot \Phi_R(x) dx = 0 \quad (6.4)$$

onde $\Phi_R \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\Phi_R|_{B(R)} = 0$, $\Phi_R|_{B^c(R+1)} = 1$, $0 \leq \Phi_R \leq 1$. Desde que $\langle F'_*(u_m), u_m \Phi_R \rangle \rightarrow 0$ deduzimos de (6.3 e 6.4) que:

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_m|^2 \Phi_R - \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k(x) u_m^+ u_m \Phi_R - \int_{\mathbb{R}^n} K(x) |u_m^+|^{2^*-1} u_m \Phi_R \right\} \\ & = \lim_{R \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_m \cdot \nabla \Phi_R u_m \implies \mu_\infty - K(\infty) \nu_\infty \geq 0 \end{aligned}$$

Segue-se agora da Proposição (6.5), item (3), que:

- (c) $\nu_\infty = 0$, ou
- (d) $\nu_\infty \geq \left(\frac{S}{K(\infty)} \right)^{\frac{n}{2}}$.

Para completar a demonstração do Teorema, mostraremos que $\nu_\infty = 0$ e $\nu_k = 0$, $\forall k \in J$

Se $\Psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \Psi \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned} c &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[F'_*(u_m) - \frac{1}{2} \langle F'_*(u_m), u_m \rangle \right] \\ &= \frac{1}{n} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} K(u_m^+)^{2^*} dx \geq \frac{1}{n} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi K(u_m^+)^{2^*} dx \end{aligned}$$

Assumindo (b), obtemos que $\#J < \infty$ e tomando $\Psi = \Psi_\delta$ nós obtemos, fazendo $\delta \rightarrow 0$, que:

$$c \geq \frac{1}{n} K(x_k) \nu_k \geq \frac{S^{\frac{n}{2}}}{n K(x_k)^{\frac{n-2}{2}}} \geq \frac{S^{\frac{n}{2}}}{n \|K\|_\infty^{\frac{n-2}{2}}}$$

o que contradiz (ξ). logo $\nu_\infty = \mu_\infty = 0$.

Invocando o item (1) da Proposição (6.5), adicionado ao fato que $u_m^+ \rightarrow u^*$ em

$L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ e da identidade $u^+ = u$ encontramos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_m^+|^{2^*} dx \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_m^+|^{2^*} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx$$

pois $\nu = |u|^{2^*} dx$ devido ao *Segundo Princípio de Concentração e Compacidade*. Logo: $u_m \rightarrow u$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$, uma vez que $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço uniformemente convexo. Ademais:

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle F'_*(u_m), u_m \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_m|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k u_m^+ u_m - \int_{\mathbb{R}^n} K (u_m^+)^{2^*-1} u_m \right\}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \langle F'_*(u_m), u \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_m \cdot \nabla u - \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k u_m^+ u - \int_{\mathbb{R}^n} K (u_m^+)^{2^*-1} u \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} K u^{2^*} dx \end{aligned}$$

Finalmente, como $u_m^+ \rightarrow u$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$, segue-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_m|^2 dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k u_m^+ u_m + \int_{\mathbb{R}^n} K (u_m^+)^{2^*-1} u_m \right\} \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^n} k u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} K u^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \end{aligned}$$

e assim, novamente usando a convexidade uniforme do espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, concluímos que $u_m \rightarrow u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ ■

Capítulo 7

Soluções Positivas de Equações Elípticas Não Lineares Envolvendo Expoentes Críticos de Sobolev

O primeiro importante trabalho envolvendo expoentes críticos, foi desenvolvido no artigo devido a Brezis H. e Nirenberg L. [BrN]. Apresentaremos, uma abordagem um pouco diferente da adotada em [BrN].

Seja Ω um domínio do \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Consideremos o caso limite $p = 2^* = \frac{2n}{n-2}$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, gostaríamos de resolver o problema:

$$-\Delta u = \lambda u + u|u|^{2^*-2} \quad \text{em } \Omega; \quad (7.1)$$

$$u > 0 \quad \text{em } \Omega; \quad (7.2)$$

$$u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \quad (7.3)$$

Observemos inicialmente que o problema acima pode ser abordado via minimização relativa do funcional

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 dx$$

sob a esfera unitária do $L^{2^*}(\Omega)$, i.e., sob o conjunto: $M = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{L^{2^*}} = 1\}$.

De fato, uma vez encontrado um $\underline{u} \in H_0^1(\Omega)$ uma função que minimiza o funcional

I_λ , sob a variedade \mathbb{M} , pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, $\exists \beta \in \mathbb{R}$ tal que $I'_\lambda(\underline{u})(\cdot) = \beta(\|\cdot\|_{2^*}^2)'(\underline{u})(\cdot)$, isto é:

$$I'_\lambda(\underline{u}) \cdot v = \int_{\Omega} \nabla \underline{u} \nabla v - \lambda \underline{u} v = \beta \int_{\Omega} |\underline{u}|^{2^*-2} \underline{u} \cdot v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Fazendo $v = \underline{u}$, obtemos: $2I_\lambda(\underline{u}) = \beta > 0$ se $\lambda < \lambda_1$. Definindo $u = \beta^{\frac{-1}{2^*-2}} \cdot \underline{u}$ obtemos:

$$I'_\lambda(u) \cdot v - \int_{\Omega} |u|^{2^*-2} u \cdot v = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \blacksquare$$

Ou equivalentemente, podemos minimizar o quociente de Sobolev:

$$S_\lambda(u; \Omega) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}}$$

Observe que se $\lambda = 0$, $S_0(\Omega) = S$ (constante de Sobolev)

7.1 O Resultado de Não Existência de Pohozaev

Teorema 7.1 *Suponha que $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ é um domínio suave (possivelmente ilimitado), $n \geq 3$, estritamente estrelado com respeito a origem e $\lambda \leq 0$. Então qualquer solução $u \in H_0^1(\Omega)$ do problema (7.1) e (7.3) é identicamente nula.*

Prova: A prova baseia-se na seguinte "Identidade de Pohozaev":

Lema 7.2 *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com primitiva $G(u) = \int_0^u g(\tau) d\tau$ e seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ solução da equação:*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.4)$$

no domínio $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$. Então ocorre a seguinte identidade:

$$\frac{n-2}{2} \int_{\Omega} g(u) u dx - n \int_{\Omega} G(u) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (x \cdot \nu) d\sigma = 0$$

Prova do Teorema 7.1: Seja $g(u) = \lambda u + u|u|^{2^*-2}$ com primitiva $G(u) = \frac{\lambda}{2}u^2 + \frac{1}{2^*}|u|^{2^*}$.

Por resultados clássicos que antecedem a teoria, qualquer solução de (7.1) e (7.3) é suave em $\bar{\Omega}$. Assim pela *Identidade de Pohozaev* nós obtemos:

$$\int_{\Omega} \lambda u^2 + |u|^{2^*} dx - 2^* \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} u^2 + \frac{1}{2^*} |u|^{2^*} \right) dx + \frac{1}{n-2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 x \cdot \nu d\sigma$$

assim:

$$\lambda \int_{\Omega} u^2 = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (x \cdot \nu) d\sigma$$

Ademais, como Ω é estritamente estrelado com respeito a origem, $x \cdot \nu > 0, \forall x \in \partial\Omega$.

Quando $\lambda < 0$, segue-se imediatamente que $u = 0$

Quando $\lambda = 0$, deduzimos que:

$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ em $\partial\Omega$. Utilizando da *Formula de Green*, adicionado ao fato que u é solução de (7.4), obtemos

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\Omega} u^{2^*-1}$$

assim $u = 0$ ■

Prova do Lema 7.2: Multiplicando a equação (7.4) por $x \cdot \nabla u$:

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta u + g(u))(x \cdot \nabla u) = \\ &= \operatorname{div}(\Delta u(x \cdot \nabla u)) - |\nabla u|^2 - x \cdot \nabla \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} \right) + x \cdot G(u) \\ &= \operatorname{div} \left(\nabla u(x \cdot \nabla u) - x \frac{|\nabla u|^2}{2} + x G(u) \right) + \frac{n-2}{2} |\nabla u|^2 - nG(u) \end{aligned}$$

Integrando sob Ω e observando que como $u = 0$ em $\partial\Omega$:

$$x \cdot \nabla u = x \cdot \nu \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ em } \partial\Omega$$

o lema segue-se ■

7.2 O Teorema de Brezis-Nirenberg

Em contraste ao Teorema (7.1), se $\lambda > 0$ o problema (1.1) – (1.3) admite solução. Contudo, uma sutil dependência da dimensão do ambiente é observada. O principal resultado desta seção é o seguinte Teorema:

Teorema 7.3 (Brezis-Nirenberg, [BrN]) *Suponha que Ω é um domínio em \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, e seja $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ com a condição de homogeneidade.*

(1°) *Se $n \geq 4$, então para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$ existe uma solução positiva de (1.1)–(1.3).*

(2°) *Se $n = 3$, existe $\lambda_* \in (0, \lambda_1)$ tal que para todo $\lambda \in (\lambda_*, \lambda_1)$ o problema (1.1) – (1.3) é solúvel.*

(3°) *Se $n = 3$ e $\Omega = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^3$, então $\lambda_* = \lambda_1/4$ e para $\lambda \leq \lambda_1/4$ não existe solução para o problema (1.1) – (1.3).*

Denotemos por $S_\lambda(\Omega) = \inf\{ S_\lambda(u; \Omega) : u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \}$, onde

$$S_\lambda(u; \Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}}$$

. É claro que podemos ver $S_\lambda(\Omega)$, mais convenientemente como:

$$S_\lambda(\Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{2^*} = 1 \right\}$$

assim vale que: $S = S_0(\Omega) = \inf \{ \int_\Omega |\nabla u|^2 : u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{2^*} = 1 \} \geq S_\lambda(\Omega)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}^+$, onde S denota a melhor constante de Sobolev.

Lema 7.4 *Se Ω é um domínio limitado em \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, e se $S_\lambda(\Omega) < S$. Então existe $u \in H_0^1(\Omega)$, $u > 0$ tal que $S_\lambda(u) = S_\lambda(u; \Omega)$.*

Prova: Considere uma seqüência minimizante $\{u_m\}$ para S_λ , normalizada, isto é, $\|u_m\|_{2^*} = 1$. Repassando u_m por $|u_m|$, podemos assumir que $u_m \geq 0$. Pelo mergulho contínuo $L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos:

$$S_\lambda(u_m; \Omega) = \int_\Omega |\nabla u_m|^2 - \lambda |u_m|^2 dx \geq \int_\Omega |\nabla u_m|^2 - C$$

logo $\|u_m\|_{H_0^1} < M$ e assim podemos assumir que $u_m \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_m \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$. Pelo Teorema de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev adicionado ao Teorema (1.50), novamente a menos de uma subsequência, $u_m \rightharpoonup u$ em L^{2^*} e $u_m \rightarrow u$ q.t.p., portanto segue-se do Teorema de Brezis-Lieb (Teorema (1.49)) que

$\|u_m\|_{L^{2^*}}^2 - \|u_m - u\|_{L^{2^*}}^2 \rightarrow \|u\|_{L^{2^*}}^2$. Ademais:

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 - \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega} -2\nabla u_m \cdot \nabla u + 2|\nabla u|^2 \rightarrow 0$$

uma vez que $u_m \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Segue-se então que:

$$(\zeta) \quad \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 = \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + o(1)$$

onde $o(1) \rightarrow 0$ se $m \rightarrow \infty$. Observando que também vale: $\int_{\Omega} |u_m|^2 = \int_{\Omega} |u|^2 + o(1)$ uma vez que $u_m \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} S_{\lambda}(\Omega) &= S_{\lambda}(u_m; \Omega) + o(1) = \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 - \lambda |u_m|^2 dx + o(1) \\ &= \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda \int_{\Omega} |u_m|^2 dx + o(1) \\ &= \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 dx + o(1). \end{aligned}$$

Ou seja:

$$S_{\lambda}(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 dx + o(1) \geq$$

$$\geq S \|u_m - u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 + S_{\lambda}(\Omega) \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 + o(1)$$

$$(\zeta\zeta) \quad \geq S \|u_m - u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 + S_{\lambda}(\Omega) \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 + o(1)$$

onde $(\zeta\zeta)$ é justificado com os seguintes argumentos: $u_m \rightharpoonup u$ em L^{2^*} portanto, $\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq \liminf \|u_m\|_{L^{2^*}(\Omega)} = 1$. Ademais, pelo Teorema (1.53), para n suficientemente grande, $\|u_m - u\|_{L^{2^*}} \leq 1$. Uma vez que $2 < 2^*$ podemos concluir então que:

$$\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 \geq \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} \quad e \quad \|u_m - u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2 \geq \|u_m - u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*}$$

Desde que, por hipótese, $S > S_\lambda(\Omega)$, a última desigualdade ($S_\lambda(\Omega) \geq S \|u_m - u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} + S_\lambda(\Omega) \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} + o(1)$) adicionado ao fato que

$$S_\lambda(\Omega) - S_\lambda(\Omega) \|u_m - u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} = S_\lambda(\Omega) \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} + o(1) \quad (\text{pelo Teorema (1.49)}),$$

implicam que $u_m \rightarrow u$ em $L^{2^*}(\Omega)$, pois substituindo encontramos:

$$o(1) \geq (S - S_\lambda(\Omega)) \cdot \|u_m - u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} \geq 0.$$

Em particular: $u \in \mathbb{M} = \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|_{L^{2^*}(\Omega)} = 1\}$. Pela semi-continuidade fraca da norma do $H_0^1(\Omega)$ temos:

$$S_\lambda(u; \Omega) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} S_\lambda(u_m; \Omega) = S_\lambda(\Omega).$$

Ademais, um múltiplo positivo de u satisfaz (1.1) e (1.3) e finalmente pelo princípio do máximo forte, nós obtemos que $u > 0$ em Ω ■

Passamos a introduzir o funcional diretamente associado ao problema (1.1) e (1.3) :

$$E_\lambda : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega |u|^{2^*} dx$$

Lema 7.5 *Seja Ω um domínio limitado em \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e qualquer seqüência $\{u_m\} \subseteq H_0^1(\Omega)$ satisfazendo:*

$$E_\lambda(u_m) \rightarrow \beta < \frac{S^{n/2}}{n}, \quad DE_\lambda(u_m) \rightarrow 0$$

é relativamente compacta.

Prova: Mostraremos inicialmente a limitação de $\{u_m\}$: Para m suficientemente grande vale:

$$2 \frac{S^{n/2}}{n} > 2 E_\lambda(u_m) = \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \lambda \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{2}{2^*} \|u_m\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*}$$

e

$$|\langle DE_\lambda(u_m), u_m \rangle| \leq \|DE_\lambda(u_m)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} \cdot \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \text{ou seja :}$$

$$-\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} < \langle DE_\lambda(u_m), u_m \rangle < \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} 2 \frac{S^{n/2}}{n} + \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} > 2 E_\lambda(u_m) - \langle DE_\lambda(u_m), u_m \rangle &= \left(1 - \frac{2}{2^*}\right) \int_\Omega |u_m|^{2^*} dx \\ &\geq C \left(\int_\Omega |u_m|^2 dx \right)^{2^*/2}. \end{aligned}$$

onde a última desigualdade foi obtida via o mergulho contínuo $L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Finalmente:

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= 2 E_\lambda(u_m) + \lambda \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{2^*} \|u_m\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} \\ &\leq C_1 + (C_2 + C_3 \cdot \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)})^{4/2^*} + C_4 \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

e como $\frac{4}{2^*} < 2$ segue-se a limitação da sequência $\{u_m\}$!

Desta forma nós podemos assumir que $u_m \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e portanto fortemente em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < 2^*$. Em particular, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ nós temos:

$$\begin{aligned} \langle DE_\lambda(u_m), \varphi \rangle &= \int_\Omega (\nabla u_m \cdot \nabla \varphi - \lambda u_m \cdot \varphi - u_m |u_m|^{2^*-2} \cdot \varphi) dx \\ &\longrightarrow \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi - \lambda u \cdot \varphi - u |u|^{2^*-2} \cdot \varphi) dx \\ &= \langle DE_\lambda(u), \varphi \rangle = 0 \end{aligned}$$

Assim $u \in H_0^1(\Omega)$ e resolve fracamente (1.1). Ademais, escolhendo $\varphi = u$, nós temos:

$$0 = \langle DE_\lambda(u), u \rangle = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 - |u|^{2^*}) dx$$

e assim:

$$E_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \int_\Omega |u|^{2^*} dx = \frac{1}{n} \int_\Omega |u|^{2^*} dx \geq 0$$

Procedendo como no Lema anterior, encontramos:

$$\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx = \int_\Omega |\nabla(u_m - u)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + o(1)$$

$$\int_{\Omega} |u_m|^{2^*} dx = \int_{\Omega} |u_m - u|^{2^*} dx + \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx + o(1)$$

Usando o fato que $u_m \rightharpoonup u$ em $L^{2^*}(\Omega)$ e o fato que $u|u|^{2^*-2} \in L^{(2^*)}'(\Omega)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_m|u_m|^{2^*-2} - u|u|^{2^*-2}) \cdot (u_m - u) dx &= \\ &= \int_{\Omega} |u_m|^{2^*} - u_m|u|^{2^*-2}u + |u|^{2^*} - u_m|u_m|^{2^*-2}u dx \\ &= \int_{\Omega} |u_m|^{2^*} - u_m|u_m|^{2^*-2}u dx + o(1) \\ &= \int_{\Omega} |u_m|^{2^*} - |u|^{2^*} dx + o(1) = \int_{\Omega} |u_m - u|^{2^*} dx + o(1) \end{aligned}$$

onde é claro, $o(1) \rightarrow 0$ se $m \rightarrow \infty$. Assim:

$$E_{\lambda}(u_m) = E_{\lambda}(u) + E_0(u_m - u) + o(1)$$

$$\begin{aligned} o(1) &= \langle DE_{\lambda}(u_m), u_m - u \rangle = \langle DE_{\lambda}(u_m) - DE_{\lambda}(u), u_m - u \rangle \\ &= \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 - |u_m - u|^{2^*} dx + o(1) \end{aligned}$$

Em particular, a última desigualdade nos diz que:

$$\begin{aligned} E_0(u_m - u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u_m - u|^{2^*} dx = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \cdot \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 + o(1) = \frac{1}{n} \cdot \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 + o(1) \end{aligned}$$

por outro lado:

$$\begin{aligned} E_0(u_m - u) &= E_{\lambda}(u_m) - E_{\lambda}(u) + o(1) \\ &\leq E_{\lambda}(u_m) + o(1) \leq C < \frac{S^{n/2}}{n} \text{ se } m > m_0 \end{aligned}$$

Portanto: $\|u_m - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C < S^{n/2}$ se $m > m_0$, e assim podemos escrever:

$$(\zeta\zeta\zeta) \quad 0 < \|u_m - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \left(1 - S^{-2^*/2} \cdot \|u_m - u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*-2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 - S^{-2^*/2} \|u_m - u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*} \\
 &\leq \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u)|^2 - |u_m - u|^{2^*} dx = o(1)
 \end{aligned}$$

uma vez que a Desigualdade de Sobolev nos diz que $-S^{-2^*/2} \|\Psi\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*} \leq -\|\Psi\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*}$.
 (ζζζ) é justificado da seguinte forma:

$$\|u_m - u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*-2} < S^{\frac{n}{2} \cdot \frac{2^*-2}{2}} = S^{\frac{n}{n-2}} = S^{2^*/2}$$

logo $-S^{2^*/2} \|u_m - u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*-2} > -1$ ■

O Lema acima motiva a introdução do seguinte variante de (P.S):

Definição 7.6 *Seja \mathbb{V} um espaço de Banach, $E \in C^1(V, \mathbb{R})$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Diremos que o funcional E satisfaz a condição (P.S.) $_{\beta}$ se qualquer seqüência $\{u_m\}$ em \mathbb{V} tal que $E(u_m) \rightarrow \beta$ enquanto $DE(u_m) \rightarrow 0$ é relativamente compacta.*

Lema 7.7 *Para $\lambda < \lambda_1$, o funcional E_{λ} satisfaz as condições do Teorema do Passo da Montanha, a saber:*

(1°) $E_{\lambda}(0) = 0$

(2°) $\exists \rho > 0, \alpha > 0 : \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \rho \implies E_{\lambda}(u) \geq \alpha$

(3°) $\exists u_1 \in H_0^1(\Omega) : \|u_1\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \rho$ e $E_{\lambda}(u_1) < \alpha$

Prova:

$$\begin{aligned}
 E_{\lambda}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} \\
 &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{S^{-2^*/2}}{2^*} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*}
 \end{aligned}$$

onde a inequação acima foi obtida via a Desigualdade de Poincaré e em seguida a Desigualdade de Sobolev. Segue-se diretamente da mesma que existem constantes como em (2°).

Fixando $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ temos:

$$E_{\lambda}(tu_0) = \frac{t^2}{2} - \frac{\lambda}{2} t^2 \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{t^{2^*}}{2^*} \|u_0\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} \longrightarrow -\infty$$

logo (3°) é satisfeito. ■

$$(\Xi) \quad \beta = \inf_{p \in \mathcal{P}} \sup_{t \in [0,1]} E_\lambda(p(t)) < \frac{S^{n/2}}{n}$$

onde para uma conveniente função u_1 satisfazendo $E_\lambda(u_1) \leq 0$ nós pomos:

$$\mathcal{P} = \{p \in C^0([0, 1], H_0^1(\Omega)) : p(0) = 0, p(1) = u_1\}$$

Vale a pena observar que a condição (Ξ) esta estritamente relacionada com a condição $S_\lambda(\Omega) < S$ do Lema (7.4):

Com efeito, dado $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\|_{2^*} = 1$, nós podemos por $p(t) = t \cdot u$, $u_1 = t_1 \cdot u$ para t_1 suficientemente grande:

$$\beta \leq \sup_{0 \leq t < \infty} E_\lambda(tu) = \sup_{0 \leq t < \infty} \left(\frac{t^2}{2} S_\lambda(u; \Omega) - \frac{t^{2^*}}{2^*} \right) = \frac{1}{n} \cdot S_\lambda^{n/2}(u; \Omega)$$

onde a última igualdade foi obtida derivando a expressão igualando a zero e encontrando o ponto de máximo.

Por outro lado, para todo $p \in \mathcal{P}$, existe $u = p(t)$ tal que:

$$u \neq 0 \text{ e } \langle DE_\lambda(u), u \rangle = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - \lambda|u|^2 - |u|^{2^*}) dx = 0 \tag{7.5}$$

De fato, como $\lambda < \lambda_1$, para $u=p(t)$ com t perto de zero, nós temos:

$$\langle DE_\lambda(u_1), u \rangle \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*} > 0.$$

Enquanto que para $u = p(1) = u_1$ nós temos:

$$\langle DE_\lambda(u_1), u \rangle < 2E_\lambda(u_1) \leq 0$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe u desejado!! Mas para tal u é fácil computar:

$$S(u; \Omega) = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda|u|^2 dx \right)^{1-2/2^*} =$$

$$= (n E_\lambda(u))^{2/n} \leq \left(n \sup_{t \in [0,1]} E_\lambda(p(t)) \right)^{2/n}$$

pois: $E_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda |u|^2 - \frac{1}{2^*} \int_\Omega |u|^{2^*} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \cdot \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega \lambda |u|^2\right)$ pela condição (7.5).

Finalmente, tomando o ínfimo sobre $p \in \mathcal{P}$ obtemos:

$$S_\lambda(\Omega) \leq \inf_{u \in \mathcal{P}} \langle DE_\lambda(u), u \rangle = 0 S_\lambda(u, \Omega) = \left[n \inf_{p \in \mathcal{P}} \sup_{t \in [0,1]} E_\lambda(p(t)) \right]^{2/n} = n \beta^{2/n}$$

ou seja:

$$\beta = \frac{1}{n} S_\lambda(\Omega)^{n/2}$$

Portanto a condição (Ξ) é equivalente a condição $S_\lambda(\Omega) < S$ ■.

Prova do Teorema (7.3): (1°) É suficiente, pela observação anterior, mostrar que $S_\lambda < S$

Considere a família:

$$u_\varepsilon^*(x) = \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{4}}}{[\varepsilon^2 + |x|^2]^{\frac{n-2}{2}}}, \quad \varepsilon > 0. \tag{7.6}$$

de funções $u_\varepsilon^* \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Note que :

$$u_\varepsilon^*(x) = \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} \cdot u_1^*\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{7.7}$$

e computando diretamente é fácil verificar que u_ε^* satisfaz a equação :

$$-\Delta u_\varepsilon^* = u_\varepsilon^* |u_\varepsilon^*|^{2^*-2} \quad \text{em } \mathbb{R}^n. \tag{7.8}$$

Afirmção: $S_0(u_\varepsilon^*, \mathbb{R}^n) = S$, isto é, a constante de Sobolev é atingida pela família u_ε^* , $\varepsilon > 0$. De fato, pelo Teorema de Lions, existe $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $S_0(u, \mathbb{R}^n) = S$. Usando a simetrização de Schwarz, podemos assumir que u é radialmente simétrica, i.e., $u(x) = u(|x|)$. Ademais u resolve (7) como vimos no corolário do Teorema de Lions. Escolha $\varepsilon_0 > 0$ tal que $u_{\varepsilon_0}^* = u(0)$. (Tal escolha

é possível pois $u_\varepsilon^*(0) = [n(n-2)]^{\frac{n-2}{4}} \cdot \varepsilon^{-\frac{(n-2)}{2}}$. Assim, não é difícil verificar que u e $u_{\varepsilon_0}^*$ são ambas soluções da equação diferencial ordinária de segunda ordem em $r = |x|$:

$$\begin{cases} r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) f = f|f|^{2^*-2}, & r > 0 \\ f(0) = u_{\varepsilon_0}^*(0) \\ \partial_r f(0) = \partial_r u_{\varepsilon_0}^*(0) = 0 \end{cases}$$

E o problema acima possui uma única solução; portanto $u = u_{\varepsilon_0}^*$. Donde $S_0(u_{\varepsilon_0}^*; \mathbb{R}^n) = S_0(u; \mathbb{R}^n) = S$. Pela observação (7.7), o fato que $\frac{-n}{2^*} = \frac{2-n}{2}$ e a Primeira Proposição do Capítupo 3, segue-se a afirmação. ■

Em Particular:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_\varepsilon^* \cdot \nabla \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon^* |u_\varepsilon^*|^{2^*-2} \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in D^{1,2}(\Omega)$$

uma vez que uma solução forte de (7.8) é uma solução fraca. Fazendo $\varphi = u_\varepsilon^*$ obtemos $\|u_\varepsilon^*\|_{D^{1,2}(\Omega)}^2 = \|u_\varepsilon^*\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*}$. Ademais, pela afirmação:

$$S \|u_\varepsilon^*\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} = \|u_\varepsilon^*\|_{D^{1,2}(\Omega)}^2$$

e assim:

$$\|u_\varepsilon^*\|_{D^{1,2}(\Omega)}^2 = \|u_\varepsilon^*\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^{2^*} = S^{\frac{2^*}{2^*-2}} = S^{n/2}.$$

Podemos admitir sem perda que $0 \in \Omega$. Seja $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\eta = 1$ em $B_\rho(0)$.

Definimos $u_\varepsilon = \eta \cdot u_\varepsilon^*$. Calculemos:

$$\nabla(u_\varepsilon) = \nabla(u_\varepsilon^* \cdot \eta) = \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{4}} \cdot \nabla \eta}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{4}} (n-2) \cdot \eta(x) \cdot x}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{n}{2}}}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 &= \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon^*|^2 \eta^2 dx + O(\varepsilon^{n-2}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon^*|^2 dx + O(\varepsilon^{n-2}) \\ &= S^{n/2} + O(\varepsilon^{n-2}) \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^{2^*} &= \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}^*|^{2^*} \eta^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u_{\varepsilon}^*|^{2^*} dx + O(\varepsilon^n) \\ &= S^{n/2} + O(\varepsilon^n) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_{\varepsilon}|^2 dx &\geq \int_{B_{\rho}(0)} |u_{\varepsilon}^*|^2 \geq \int_{B_{\varepsilon}(0)} \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{2}} \cdot \nabla \eta}{(2\varepsilon^2 +)^{n-2}} dx + \\ &\quad + \int_{B_{rho}(0) \setminus B_{\varepsilon}(0)} \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{2}} \cdot \nabla \eta}{(2|x|^2 +)^{n-2}} dx \\ &= C_1 \varepsilon^2 + C_2 \varepsilon^{n-2} \cdot \int_{\varepsilon}^{\rho} r^{3-n} dr \\ &= \begin{cases} c\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2) & \text{se } n \geq 5 \\ O(\varepsilon^2) + c\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| & \text{se } n = 4 \\ O(\varepsilon^2) + c\varepsilon & \text{se } n = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

com constantes positivas $c, c_1, c_2 > 0$. Assim, se $n \geq 5$

$$\begin{aligned} S_{\lambda}(u_{\varepsilon}) &\leq \frac{S^{n/2} - c\lambda\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2)}{[S^{n/2} + O(\varepsilon^n)]^{2/2^*}} \\ &= S - c\lambda\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2) < S \end{aligned}$$

se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

Similarmente, se $n = 4$ nós temos:

$$S_{\lambda}(u_{\varepsilon}) \leq S - c\lambda\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + O(\varepsilon^2) < S$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno ■

A prova do caso $n = 3$, bem como uma extensão do Teorema (7.3), podem ser encontrados em:

Moreira, D. R. "*Soluções Positivas de Equações Elípticas Não Lineares Envolvendo Expoentes Críticos de Sobolev*". Dissertação de Mestrado. U.F.C. (Agosto de 2001)

Bibliografia

Referências Bibliográficas

- [PL1] P. L. Lions - "The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, part 1". *Ann. Inst. Henri Poincaré* Vol. 1 n^o 2, 109-145 (1984).
- [PL2] P. L. Lions - "The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The locally compact case, part 2". *Ann. Inst. Henri Poincaré* Vol. 1 n^o 4, 223-283 (1984).
- [PL3] P. L. Lions - "The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case, part 1". *Revista Mat. Iberoamericana* Vol. 1 n^o 2, 145-201 (1985).
- [PL4] P. L. Lions - "The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case, part 2". *Revista Mat. Iberoamericana* Vol. 1 n^o 3, 45-121 (1985).
- [BrN] H. Brezis, L. Nirenberg - "Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents". *Comm. on Pure and Applied Math.*, Vol. XXXVI, 437-477 (1983).
- [BrL] H. Brezis, E. Lieb - "A relation between pointwise convergence of functions and functionals". *Proceeding of the American Mathematical Society.*, Vol. 88, 437-477 (1983). n^o 3, Julho de 1983.

- [LbLss] E. Lieb, M. Loss - "Analysis". *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society. Vol. 14 1997.
- [Br] H. Brezis - "Analyse fonctionnelle". *Masson Editeur.*, Paris. (1983).
- [Ch] J. Chabrowski - "Concentration-compactness principle at infinity and semilinear elliptic equation involving critical and subcritical Sobolev exponents". *Calc Var.*, Var. 3 493-512 (1995).
- [Par] K. R. Parthasarathy - "Probability measures on metric spaces", *Academic Press*, New York (1967).
- [GTr] D. Gilbarg, N. S. Trudinger - "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order". *Springer-Verlag.*, Segunda edição 1983.
- [Sw] M. Struwe - "Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and hamiltonian systems", *Springer*, 1996.
- [V] M. M. Vainberg - "Variational methods in the study of nonlinear operators", *Holden Day*, 1964.
- [Ev] L. C. Evans - "Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations". *Regional conference series in mathematics*. 0160-7642 AMC Vol. 74 (1990).
- [Ad] R. A. Adams - "Sobolev Spaces", *Academic Press*, Pure and applied mathematics series; Vol. 65. 1975.
- [V] M. M. Vainberg - "Variational methods in the study of nonlinear operators", *Holden Day*, 1964.
- [Fd] G. B. Folland - "A course in abstract harmonic analysis", *Studies in advanced mathematics*, 1995.

- [Lacey] H. E. Lacey - "The isometric theory of classical Banach spaces", *Springer-Verlag*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 208, (1974).
- [F] D. G. de Figueiredo - "The Ekeland Variational Principle with applications and detours ", *Springer-Verlag*, 1989.
- [Dao] C. Daomin - "The Yamabe problem in \mathbb{R}^n ". *Acta Mat. Scientia* Vol. 10 n^0 2, 201-216 (1990).