UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ – UFC
CENTRO DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

JOSÉ GLEISSON DA COSTA GERMANO

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS COM O USO DO GEOGEBRA

FORTALEZA
2016

JOSÉ GLEISSON DA COSTA GERMANO

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS COM O USO DO GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Eixo Temático: Matemática. Linha de Pesquisa: Tecnologias no Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G323p Germano, José Gleisson da Costa.
Uma proposta de abordagem dos números complexos com o uso do GeoGebra / José Gleisson da Costa Germano. – 2016.
131 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

1. Números Complexos. 2. Interpretação Geométrica. 3. Software GeoGebra. 4. Sequência Didática. I. Título.

CDD 372

JOSÉ GLEISSON DA COSTA GERMANO

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS COM USO DO GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.
Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Aprovada em: 24/11/2016

BANCA EXAMINADORA

Fco Regis Vieira Alves

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)
Universidade Federal do Ceará – UFC

Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira
Membro Interno– UFC

Ana Cláudia Mendonça Pinheiro

Profa. Dra. Ana Cláudia Mendonça Pinheiro
Universidade Estadual do Ceará – UECE

AGRADECIMENTOS

Ao único Deus verdadeiro, ao Senhor Jesus Cristo, obrigado Espírito Santo, graças a Deus por tudo!

Ao meu orientador Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves por ter várias publicações na área de Educação Matemática.

À Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira, à Profa. Dra. Ana Cláudia Mendonça Pinheiro, à Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos por terem me ajudado com suas colocações que colaboraram para a elaboração e estruturação da dissertação.

À Profa. Sâmia dos Santos Salomão pela consideração, pelo respeito, pelo amor expresso em atitudes, pela lealdade e compaixão, pelo apoio num dos momentos mais decisivos que possibilitaram a continuidade dos estudos em Fortaleza – CE. Muitíssimo obrigado Sâmia!

À minha esposa Regina Sheila Guedes Barbosa Germano, que além de me auxiliar, compreendeu minhas ausências constantes. Aos meus irmãos, mãe, pai, à minha família muito obrigado!

Não podendo mencionar cada um, agradeço a todos aqueles que de alguma forma ajudaram neste empreendimento, entre eles os colegas da turma de mestrado; o núcleo gestor, o pessoal da secretaria, professores e alunos da EEEP Pedro de Queiroz Lima.

“Triste época, é mais fácil desintegrar um átomo do que um preconceito.” (Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho trata de uma proposta que envolve o GeoGebra e números complexos, de modo que possa ser utilizada em sala de aula por professores de Matemática do Ensino Médio com as devidas adaptações cabíveis. Foram construídas e propostas situações didáticas, com o objetivo de propor uma sequência didática, tendo-se como fundamentação a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau; bem como foram utilizados procedimentos metodológicos no âmbito da Engenharia Didática de Michele Artigue. Nesta investigação, a interpretação geométrica tem lugar fundamental, de maneira que o uso do GeoGebra possa fomentar a visualização e instigar uma possível aprendizagem. Dessa forma, em vez de se utilizar apenas do uso convencional de giz (ou pincel) e lousa nas aulas, este trabalho propõe a utilização desse software de matemática dinâmica no transcorrer das aulas de Matemática, dando-se destaque aos seguintes itens: representação geométrica do conjunto $\mathbb{C}$, operações em $\mathbb{C}$ e movimentos no plano (translação, homotetia e rotação). A pesquisa mostrou-se salutar, tendo em vista que os estudos realizados preliminarmente sinalizaram que a sequência didática elaborada, apoiada no uso do GeoGebra, pode corroborar para o bom ensino e à aprendizagem dos números complexos. Espera-se que este trabalho possa ter continuidade a fim de possibilitar um aprofundamento da temática.

Palavras-chave: Números Complexos. Interpretação Geométrica. *Software* GeoGebra. Sequência Didática.

ABSTRACT

This work deals with a proposal that involves GeoGebra and complex numbers, so that it can be used in the classroom by Mathematics teachers of the Secondary School with appropriate due adaptations. Teaching situations were constructed and proposed, with the aim of proposing a didactic sequence, based on Guy Brousseau's Theory of Educational Situations (TSD); as well as methodological procedures were used in the scope of Didactic Engineering of Michele Artigue. In this investigation, the geometric interpretation takes place fundamentally, so that the use of GeoGebra can foment the visualization and instigate a possible learning. Thus, instead of just using conventional chalk (or brush) and blackboard in class, this paper proposes the use of this dynamic mathematical software in the course of Mathematics classes, highlighting the following items: geometric representation Of the set C, operations in C and movements in the plane (translation, homotetia and rotation). The research was salutary, considering that preliminary studies showed that the elaborate didactic sequence, supported by the use of GeoGebra, can corroborate the good teaching and learning of complex numbers. It is hoped that this work can be continued in order to allow a deeper understanding of the theme.

Keywords: Complex Numbers. Geometrical interpretation. *Software* GeoGebra. Didactic Sequence.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$\mathbb{C}$	Conjunto dos Números Complexos
CA	Corrente Alternada
DCNGEB	Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica
DCNEM	Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
ED	Engenharia Didática
LABINFOR	Laboratório de Informática
LABMAT	Laboratório de Matemática
OCNEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
TSD	Teoria das Situações Didáticas
SD	Sequência Didática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho vem à tona numa perspectiva de abordagem dos números complexos com situações concatenadas com a utilização do software GeoGebra e apresentações de aplicações. Fomenta-se uma apropriação de tópicos correlatos a álgebra complexa, no campo de uma formação docente para o ensino de Matemática com a utilização de práticas pedagógicas arroladas numa didática que requer reflexões críticas sistemáticas e que corrobore para resultados positivos aos processos de ensino e de aprendizagem.

Isso no âmbito de uma metodologia que emprega tecnologias no trabalho docente. Destarte, esta pesquisa encontra-se em conformidade com o Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará – UFC, na área de concentração denominada "Ensino de Ciências e Matemática", na linha de pesquisa chamada "Tecnologias digitais no ensino de Ciências e Matemática".

Com este trabalho não se pretende afirmar nem estimular que o professor que ensina Matemática seja um mero contador/repetidor da sequência didática proposta nesta pesquisa. Muito menos que o professor seja um superdotado em Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) ou em novas tecnologias digitais. Não se trata disso.

O cerne da questão aqui levantada é dar um enfoque didático, no transcorrer de uma sequência didática, quanto ao uso do GeoGebra no ensino de números complexos, numa expectativa que possa eventualmente contribuir para o bom ensino de Matemática, bem como produzir colaborar para uma visão positiva em relação ao conteúdo estudado, dada a eventual aprendizagem daquele assunto.

1.1 Contextualização

Os números constituem um assunto de suma relevância para a Matemática, à Ciência, Tecnologia e Inovação e, por assim dizer, para o desenvolvimento da humanidade. Conforme nos esclarece Paiva (2013, p. 141), "A descoberta do número como abstração de quantidades observadas no cotidiano foi o primeiro e, talvez, o mais importante feito matemático da humanidade".

Desde o surgimento dos números naturais, passando pelos números reais, até chegar aos números complexos foi um longo e árduo processo (GARBI, 2007; PAIVA, 2013). Reconhecidamente tal processo não foi linear nem simples de ser alcançado. Vários seres humanos, dentre distintos matemáticos e os chamados usuários de Matemática (engenheiros, professores, estudantes, agrimensores, físicos, economistas, entre outros), colaboraram para a construção, divulgação, desenvolvimento e aplicação de tais objetos matemáticos cujas importâncias são indubitáveis na sociedade e no mundo em que vivemos.

Nesse cenário, os números complexos possuem considerada importância para a Matemática e demais áreas do conhecimento. Com o advento dos números complexos, por exemplo, questões cotidianas, problemas reais, que podem ser expressos em equações algébricas, puderam ser solucionados através de tais equações, independentemente de seu grau (LIMA, 2012).

De fato, o chamado Teorema Fundamental da Álgebra, “cuja demonstração se deve inicialmente a Euler e d’Alembert e posteriormente, em forma definitiva a Gauss” (LIMA, 2012, p. 30), afirma que toda equação algébrica possui pelo menos uma raiz complexa. Assim, além de resolver equações algébricas do 1º e 2° graus, os números complexos “são suficientes para dotarem de raízes as equações do terceiro, quarto, quinto, e todos os demais graus” (LIMA, 2012, p. 31).

De acordo com Elon Lages Lima:

> Este fato somente já é responsável em boa parte pela relevância matemática dos números complexos, indispensáveis em Álgebra Linear, Equações Diferenciais e em várias situações nas quais, mesmo que se desejem estudar apenas questões relativas a números reais, é indispensável considerar números complexos para se obter a solução real desejada (LIMA, 2012, p. 31).

Quer dizer, até mesmo em problemas que se referem a números reais, é indispensável considerar os números complexos para se conseguir a solução requerida. Isso revela um pouco da importância desse conteúdo e constitui-se em um dos motivos que originaram este trabalho, além de corroborar nossa defesa de que o ensino desse objeto matemático ocorra na Educação Básica, em especial em escolas de Ensino Médio.

Dessa forma, permitindo assegurar uma formação que, embora a nível básico, possa ser sólida[1], de qualidade, podendo garantir àqueles desse nível de ensino o acesso a esse

[1] Entendemos por formação sólida uma formação educacional que possibilite ao aluno dar prosseguimento, com segurança, em seus estudos e/ou atividades profissionais.

conhecimento – um assunto de natureza fundante na compreensão de vários processos naturais, científicos e da produção tecnológica (CAMARGO; VRIESMAN, 2012).

Não obstante, a relevância desse assunto não se restringe exclusivamente pelos resultados oriundos do Teorema Fundamental da Álgebra, conforme nos explica Lima (2012, p. 31):

> Não se julgue, entretanto, que a importância dos números complexos resulta apenas do Teorema Fundamental da Álgebra. Eles se fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da Matemática como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, etc. A Teoria das Funções de Variável Complexa é uma área nobre, de grande tradição matemática e, ao mesmo tempo, com notável vitalidade, refletida na intensa atividade de pesquisa que se desenvolve nos dias atuais.

Com efeito, a grande importância conferida aos complexos provém de suas inúmeras aplicações em variadas áreas, como as já expostas acima e dentre outras, além das contribuições dentro da própria Matemática.

Evidentemente que determinadas aplicações requerem um conhecimento mais aprofundado dos números complexos, porém, estas e outras podem ser elucidadas com conhecimentos desse assunto em nível de Ensino Médio, podendo ajudar, dessa forma, entre outras coisas, na compreensão de fenômenos, em especial aqueles ligados as áreas supracitadas.

É importante ressaltar que o conjunto dos números complexos levou centenas de anos decisivos, desde o século XVI até o século XIX, para ser aceito de uma vez por todas dentro da própria Matemática (EVES, 2004; GARBI, 2007; LIMA, 2012); e, a partir disso, sendo possível proporcionar, de forma viável e confiável sob a perspectiva matemática, contribuições práticas e teóricas no âmbito da Matemática, bem como em outras áreas das mais diferentes atividades humanas.

Ou seja, os próprios matemáticos ao longo de vários séculos se debruçaram sobre tal assunto que, depois de muitas discussões, polêmicas, demonstrações e, principalmente, com a “visualização” dos números complexos – proporcionada pela interpretação geométrica (MACHADO, 2009), passaram a admitir e a utilizar, com as devidas possibilidades, esses “novos” números.

Uma vez assumidos dentro da Matemática, os números complexos tornaram-se fundamentais no desenvolvimento dessa e de outras ciências, como, por exemplo, a Física. Seu ensino, então, deve ser ministrado e valorizado, de um lado, em prol de um entendimento mais amplo e profícuo da realidade, e por outro lado que possa colaborar com o desenvolvimento científico e tecnológico da humanidade.

No Brasil, o ensino de números complexos pode encontrar lugar em escolas de Educação Básica (BRASIL, 2006; 2014; LIMA *et al*, 2006; PAIVA, 2013), especialmente naquelas onde é ofertada a etapa chamada Ensino Médio (BRASIL, 2006; 2014), além, é claro, em instituições de ensino superior e outras cujos cursos apresentam programas que possuem relações com tal assunto.

Neste escrito, restringir-nos-emos ao ensino de números complexos a nível médio da Escola Básica, visando oferecer uma contribuição aos professores de Matemática desse nível de ensino. Nesse sentido, esta pesquisa foi realizada com vistas a eventualmente contribuir para um bom ensino dos números complexos em escolas da Educação Básica, por meio de uma proposta de abordagem desse assunto com o uso de um software.

Por conseguinte, vislumbra-se utilizar esse software com o intuito de facilitar a visualização da interpretação geométrica dos números complexos, bem como apresentar aplicações dos números complexos, em consonância com os objetivos do Ensino Médio consubstanciados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial a uma formação geral e não apenas um treinamento específico (BRASIL, 2000, p. 6).

Os PCN, referindo-se aos objetivos do Ensino Médio (BRASIL, 2000), fomentam o desenvolvimento de conhecimentos que possam ser praticados, que promovam a capacidade de inovar, a formação de cidadãos com uma cultura de aprendizagem, estimulando não apenas uma formação específica, mas uma formação mais abrangente, holística, com significados para os educandos.

Nessa perspectiva, a abordagem dos números complexos pode ser de modo que os estudantes percebam sentido em seu ensino e de maneira que ocorram eventuais benefícios em favor do bom ensino e vislumbrando favorecer a aprendizagem pelos estudantes deste tema tão importante e que tem várias aplicações em diversas áreas.

1.2 Justificativa e relevância do tema

Alguns livros didáticos comumente adotados no Ensino Médio, conforme assinala o Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2015 (BRASIL, 2014) e a exemplificação externada no segundo parágrafo subsequente a este, frequentemente trazem o assunto sobre o conjunto $\mathbb{C}$ (o conjunto dos números complexos será notado neste trabalho por $\mathbb{C}$) de forma estanque, descontextualizada, com reduzidas interações entre os campos algébricos e geométricos (BRASIL, 2014).

Leituras e discussões sobre o PNLD 2015 acerca de determinados livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio apontam uma certa carência ou redução de conexões/aplicações com outras áreas do conhecimento e da própria Matemática, de modo que o conjunto $\mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos) é apresentado provocando timidamente as devidas interações possíveis (e importantíssimas) entre este assunto e outros correlatos.

Por exemplo, referindo-se ao livro intitulado “Conexões com a Matemática”, de Leonardo (2013), adotado em algumas escolas públicas, o Ministério da Educação do Brasil (MEC), através do Guia de livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2015, referente a disciplina de Matemática no Ensino Médio, expõe que “No terceiro volume, o tratamento dado aos números complexos é predominantemente algébrico, além de serem reduzidas as articulações com a geometria” (BRASIL, 2014, p. 26).

Em relação ao trecho citado acima, percebe-se uma *certa* inquietação do Estado brasileiro, esboçada no PNLD 2015 (BRASIL, 2014), e em outros documentos oficiais, como, por exemplo, as DCNEM (BRASIL 2013), as OCNEM (BRASIL, 2006), os PCN (BRASIL, 2000), etc., com o ensino de Matemática.

Isso no sentido de fomentar interações entre os mais variados temas em Matemática, e em particular, aqueles que dizem respeito as articulações cabíveis e desejáveis envolvendo álgebra e geometria que podem e devem, no nosso entendimento, serem realizadas quando do ensino dos números complexos.

Dessa forma, existem problemas que podem ser identificados quanto ao ensino e à aprendizagem dos números complexos. Além daqueles que podem surgir em decorrência dos obstáculos/entraves mencionados acima, persistem problemas concernentes a prática docente em sala de aula.

Cerri e Monteiro (2001, p. 1) assinalam que:

> Quando um professor entra na sala de aula e diz que iniciará o estudo dos números complexos, os alunos pensam que são números, no mínimo, muito complicados. Ao saber que também existem números chamados de *imaginários* os alunos dirão que tais números, por serem imaginários, não existem, e portanto, para que estudá-los?

Nesta segunda década do século XXI, lamentavelmente, reflexões críticas e sistemáticas provindas de nossa experiência docente na disciplina de Matemática em salas de aulas em turmas de 3º ano do Ensino Médio, sinalizam nessa acepção externada pelas autoras supracitadas quando se trata do ensino de números complexos.

Então, será que é possível praticar o ensino de números complexos de modo que possa provocar nos estudantes uma visão positiva quanto aquilo que está sendo estudado? Será conceptível e exequível uma abordagem diferente dos números complexos, onde a visualização tenha lugar fundamental para a compreensão desse assunto?

Acreditamos que as respostas para as questões acima são afirmativas. Com o uso do software GeoGebra é possível colaborar com a visualização e para a interpretação geométrica e outras relações com a geometria dos números complexos.

Esta pesquisa aponta no sentido de colaborar para que eventualmente ocorram possíveis benefícios nos processos de ensino e de aprendizagem na disciplina de Matemática, em particular no que se refere ao ensino dos números complexos por meio de situações didáticas que corroboram para tal finalidade.

Cremos que é oportuno contribuir para que o ensino de números complexos aconteça na Educação Básica de modo que possa ser realizado salutarmente, onde um tratamento adequado, que possibilite e fomente a vinculação latente entre álgebra e geometria quando da abordagem dos complexos, pode corroborar para a prática docente em sala de aula de professores de Matemática.

Nesse sentido, surgiu este trabalho com o intuito de fomentar que a apropriação de tópicos correlatos à Álgebra Complexa, concatenada com o uso do GeoGebra e apresentações de aplicações, possa eventualmente influenciar positivamente no ensino dos números complexos numa turma de 3º ano do Ensino Médio.

1.3 Problemática

O professor pesquisador, responsável por este trabalho, desde quando começou a lecionar Matemática, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, em escolas públicas das redes municipal (Beberibe) e estadual (Ceará) percebeu, em sua experiência de magistério através da observação participante e de reflexões críticas constantes que, lamentavelmente, boa parte dos alunos apresentam dificuldades de aprendizagem na disciplina de Matemática.

Além disso, que determinados colegas professores também externam certas limitações quanto a variabilidade de opções de abordagens dos conteúdos matemáticos em suas respectivas salas de aula, onde muitos docentes acabam por restringir suas aulas com aquela alternativa historicamente conhecida como tradicional, com explanação (quando existe) de forma meramente expositiva e com o uso de giz (ou pincel) e quadro-negro (lousa).

Tal situação mostrou-se mais notória ainda no que se refere ao ensino de números complexos em escolas de nível médio, nas quais as turmas de alunos, quase que em sua totalidade, expressam um verdadeiro espanto quando se deparam com a notícia de que, por exemplo, existem raízes quadradas de números negativos. Admiram-se ao saberem que existem números chamados imaginários que são tão reais quanto aqueles conhecidos pelos alunos desde o Ensino Fundamental, pertencentes ao conjunto dos números reais - $\mathbb{R}$ (GARBI, 2007).

Notamos também que para boa parte dos professores de Matemática do Ensino Médio, os livros são tidos como a maioria das fontes (quando não é a única) dos assuntos que são costumeiramente abordados nessa etapa de ensino, como é o caso dos números complexos. E, como aponta o Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2015 (BRASIL, 2014), em relação aos números complexos, em determinados livros didáticos é feito, com certa predominância, um tratamento algébrico em detrimento da possibilidade de conexões com a geometria.

Por conseguinte, o não tratamento adequado quanto a interpretação geométrica e demais conexões dos números complexos com a geometria pode acarretar entraves que dificultam a visualização e a internalização desse assunto, sendo isto um dos motivos dos pífios resultados nos processos de ensino e aprendizagem.

Como já explicitado anteriormente, a importância dos complexos não se restringe apenas nas soluções de equações polinomiais. Nesse sentido, Amorim (2015), em sua dissertação de mestrado, defende o ensino dos números complexos no Ensino Médio, de maneira que seja fomentada a visualização geometrizada e interações com outras áreas, como a Física, por exemplo. A autora sustenta que:

> a visualização geométrica desses números promove outro sentido e significado ao seu estudo, além de permitir aos alunos a formulação e validação ou não de hipóteses. Outro fator importante, é que a forma geométrica dos números complexos propicia a interdisciplinaridade com fenômenos da Física, fator que é valorizado nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (AMORIM, 2015, p. 18).

Dessa forma, Amorim (2015) apoia que o ensino dos complexos ocorra dando-se destaque as interpretações geométricas intrínsecas a esses números, onde encontra-se um terreno fértil para interdisciplinaridade de fatos com a Física. Não obstante, o trabalho de Amorim (2015), apesar de fomentar o uso do GeoGebra, não se trata de uma sequência didática. Este nosso trabalho sim, traz um Produto Educacional que versa em seu bojo de uma sequência didática com o uso do GeoGebra.

Neves (2014), em seu Trabalho de Conclusão de Curso de mestrado pelo IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, embora realize em seu estudo um tratamento geométrico dos complexos para resolução de exercícios e provas de teoremas, afirma que não pretende "propor novas metodologias para a abordagem desse tema em classe" (NEVES, 2014, p. 1). Quer dizer, mesmo se dirigindo aos professores e trazendo a visualização geométrica dos complexos em seu trabalho, o autor não propõe o uso de metodologias novas para o ensino desse assunto em sala de aula nem traz explicitamente o uso de tecnologias, como, por exemplo, softwares educacionais.

Analogamente, Chagas (2014) defende o ensino e o uso de vetores no Ensino Médio, no entanto, com auxílio do software GeoGebra. Instiga a utilização de vetores em diversas áreas, como "Geometria Analítica, Números Complexos [...]" (CHAGAS, 2014, p. 83). O autor fomenta a interpretação geométrica dos complexos, mostrando vários benefícios advindos da interpretação vetorial desses números na resolução de problemas. Embora o autor traga em seu trabalho essa abordagem geométrica dos complexos, não traz, especificamente, atividades propostas sobre esse assunto.

Diferentemente dos autores supracitados, estamos trazendo neste trabalho, uma proposta de ensino dos números complexos para professores de Matemática do Ensino Médio pautada nos pressupostos metodológicos da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e da Engenharia Didática defendida por Michele Artigue, com suporte de tecnologia (apoio do software GeoGebra).

Sabemos que nos últimos anos, a humanidade passou e passa por mudanças cada vez mais abruptas, especialmente no que concerne aos avanços tecnológicos, onde notadamente o uso de computadores, softwares e da internet têm provocado alterações nunca antes vistas pela espécie humana, como, por exemplo, as opções e a velocidade de transmitir, enviar e receber mensagens, informações, notícias, conhecimentos, enfim, uma série de múltiplas ações que são possíveis, graças ao avanços científicos, ao uso de novas tecnologias e de outras inovações (BRASIL, 2013).

Assim, enquanto docente atuante e objetivando contribuir para uma eventual melhoria do ensino e com uma possível aprendizagem satisfatória dos estudantes, o professor pesquisador tratou de investigar e propor uma abordagem com a utilização de novas tecnologias no âmbito das aulas de Matemática, onde o assunto escolhido foram os números complexos, devido à grande importância desse tema.

Nesse contexto, apresentou-se uma inquietação no sentido de responder à pergunta a seguir, que se tornou, de fato, norteadora para a realização deste escrito.

Como uma proposta de Sequência Didática (SD)[2] pautada no uso de tecnologias digitais pode influenciar positivamente no ensino dos números complexos numa turma de 3º ano do Ensino Médio? No item 5.1 deste trabalho explicitamos do que se trata uma sequência didática.

Desse modo, nesta investigação o foco do trabalho foi direcionado para a construção e para a proposta de uma sequência didática, formada por situações didáticas[3], apoiada no uso do software GeoGebra.

A referida SD, assim, constitui-se em uma importante opção de uso para professores de Matemática, aumentando com qualidade o número de possibilidades de instrumentos didáticos disponíveis para os docentes, visando contribuir para um bom ensino dos números complexos, no sentido de que possa potencializar o favorecimento da aprendizagem dos alunos.

---

[2] Podemos dizer, grosso modo, que sequência didática (SD) refere-se a um conjunto de situações didáticas.

[3] Concordando com Pais (2008, p. 65) “uma *situação didática* é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico”.

1.4 Hipótese de trabalho

Nossa hipótese de trabalho consiste na crença de que situações didáticas com o uso do GeoGebra colaboram para uma melhor visualização da interpretação geométrica dos números complexos de modo a eventualmente potencializar um melhor entendimento do conjunto $\mathbb{C}$.

Como veremos posteriormente, essa hipótese detém um potencial de não ser refutada. Pelo contrário, à luz dos procedimentos metodológicos da Engenharia Didática (ED) conforme Artigue (1988, *apud* ALMOULOUD, 2007; 1996, *apud* PAIS, 2008), tal hipótese está imbuída de uma tendência de confirmação, uma vez que os estudos preliminares realizados, as concepções do professor pesquisador, obtidas pelas análises prévias e no decorrer da construção das situações didáticas e análise *a priori*, convergem para possivelmente ratificá-la.

Não obstante, como neste trabalho nos atemos as duas primeiras etapas da ED, a nossa hipótese não será submetida a validação, uma vez que não procederemos as fases de experimentação e análise *a posteriori*. Quem sabe, isso poderá ocorrer num eventual trabalho vindouro.

1.5 Objetivos

Aqui, expressamos o que almejamos no decorrer e ao término do presente estudo. Sabemos que houveram muitas dificuldades encontradas, mas sobrepujadas ao longo do trabalho, uma vez que foram tratadas com racionalidade e, com civilidade e dedicação, superadas. Este trabalho tem como objetivo geral propor uma sequência didática para uma abordagem dos números complexos com a utilização do software GeoGebra e apresentações de aplicações. Especificamente, os objetivos desta obra são:

(1) Determinar aspectos históricos, teóricos e metodológicos de ensino e aprendizagem dos números complexos;
(2) Conhecer aspectos teóricos e metodológicos de situação didática para o ensino de números complexos;
(3) Descrever uma sequência didática de ensino dos números complexos com suporte do GeoGebra.

Como veremos mais adiante, tais objetivos ao serem alcançados sinalizaram no sentido de que esta pesquisa aponta que a sequência didática proposta pode ser proveitosa aos processos de ensino e aprendizagem do referido assunto matemático.

Este trabalho está divido em 6 (seis) capítulos: 1 INTRODUÇÃO, 2 PERCURSO DE UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA, 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS, 4 ANÁLISES E DISCUSSÕES – ESTUDOS PRELIMINARES, 5 O PRODUTO EDUCACIONAL e 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.

O capítulo 1 traz uma visão introdutória sobre os números complexos, quanto às suas importâncias, aplicações, bem como externa a problematização, os objetivos, a justificativa e as hipóteses deste trabalho.

Já o capítulo 2, apresenta um pouco da história dos números complexos, sobre o software GeoGebra, traz algumas aplicações dos números complexos e aborda sobre os números complexos no Ensino Médio.

O capítulo 3 trata de explicar os procedimentos metodológicos e detalhar os princípios/pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e da Engenharia Didática (ED).

Por sua vez, o capítulo 4 discute e analisa os estudos preliminares da pesquisa, concernentes as análises preliminar e a priori da ED. Salienta a importância de se compreender aquilo que se está lendo, e fomenta a valorização do hábito da leitura, em especial, leituras correlatas com a literatura matemática, sobre números complexos, sobre o software GeoGebra. Por conseguinte, relata que é viável o estudo dos conceitos básicos desses assuntos no nível de ensino pesquisado, haja vista os estudos realizados preliminarmente no transcorrer da pesquisa.

O capítulo 5 expõe o Produto Educacional deste trabalho, ou seja, um Caderno de Atividades com uma proposta de Sequência Didática (SD) sobre o ensino de números complexos com o uso do software GeoGebra. Lembrando que tal SD foi construída segundo os pressupostos da TSD e da ED.

E, por fim, o capítulo 6 externa que os estudos preliminares sinalizam que a Sequência Didática (SD) sobre o ensino de números complexos apoiado no uso do GeoGebra pode colaborar com os professores de Matemática para uma eventual melhoria do ensino, haja vista que pode favorecer à aprendizagem desse assunto por parte dos alunos da Educação Básica.

2 PERCURSO DE UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, tem-se um pouco da história dos números complexos, algumas aplicações dos números complexos, uma breve análise de como os números complexos têm sido abordados no Ensino Médio e uma explanação sobre o software GeoGebra.

2.1 Um pouco da história dos números complexos

A origem dos números complexos é um tema bastante susceptível de discussões e reflexões acerca do desenvolvimento e aceitação de conceitos matemáticos. Segundo Carvalho (2005, *apud* CARMO, MORGADO, WAGNER, 2005, p. 109) a “história dos números complexos ilustra bem com um conceito matemático fundamental pode demorar muito até ser bem compreendido e aceito. É uma histórica de resistência, por parte de excelentes matemáticos, a admitirem a existência dos números complexos”.

Assim, consideramos importante conhecer um pouco da história dos números complexos, uma vez que isso pode ser uma atividade muito proveitosa em prol do bom ensino e pode favorecer à aprendizagem desse assunto. Sobre o surgimento das primeiras ideias acerca da criação do conjunto dos números complexos, Cerri e Monteiro (2001, p. 2) defendem que:

> O interesse pelo estudo da Matemática ressurgiu na Europa, mais especificamente na Itália, no século XVI. Lá, e no meio da disputa entre Cardano e Tartaglia pela resolução da equação do 3º grau, é que se percebeu que os números reais não eram suficientes e as primeiras ideias da criação do conjunto dos números complexos surgiram.

As autoras revelam que através de disputas entre matemáticos italianos (Cardano e Tartaglia) sobre soluções de equações cúbicas, surgiram inquietações que, posteriormente, vieram culminar em constatações acerca da insuficiência dos números reais e, consequentemente, fornecendo preâmbulos para criação de um novo campo numérico qual seja o conjunto dos números complexos.

Havia muita descrença quanto à existência de números, por exemplo, do tipo $\sqrt{-100}$ e suas utilidades práticas. Como exemplificar na prática acerca de um número negativo com raiz quadrada?

No entanto, embora houvesse certas resistências, tais números, que receberam diversos nomes, como “imaginários”, por exemplo, depois das contribuições de várias pessoas, passaram a ser tratados como deveriam. Isto é, passaram a ser tratados como números que, de fato, existem, não apenas na imaginação, mas que contribuem de forma teórica e prática para a Matemática e para outras áreas científicas e tecnológicas.

Nesse cenário, ocorreram muitos embates, dúvidas, desafios entre aqueles que se interessavam pela Matemática, num processo árduo de contribuições para elucidar assuntos referentes a esses "novos" números.

À guisa de exemplo, ocorreram disputas[4], que não iremos esmiuçá-las aqui, entre Nicolò Fontana (Tartaglia) - (1499-1557) e Cardano (1501-1576) envolvendo equações do 3º grau suscitaram questionamentos que contribuíram, posteriormente, para o desenvolvimento dos números complexos (GARBI, 2007).

Rafael Bombelli (1526–1572), discípulo de Cardano, foi um dos primeiros a levar adiante o trabalho com números com raízes quadradas negativas. Segundo Garbi (2007, p. 52), Bombelli criou regras envolvendo tais números como, por exemplo, " $(\sqrt{-1})\,(\sqrt{-1}) = -1$, $(-\sqrt{-1})\,(\sqrt{-1}) = 1$, $(-\sqrt{-1})\,(-\sqrt{-1}) = -1$", entre outras. A partir das contribuições de Bombelli, ficavam "lançadas as bases para o desenvolvimento de um gigantesco ramo da Matemática, com infindáveis aplicações práticas, principalmente na Eletrônica: ***A Teoria dos Números Complexos***" (GARBI, 2007, p. 52).

Ainda conforme Garbi (2007), existe

> um equívoco frequentemente cometido por alguns professores e livros-texto relativamente à origem dos números complexos: foram as equações do 3º grau e não as do 2º grau que desencadearam todo o desenvolvimento teórico havido naquela área, trabalho que durou mais de dois séculos a partir da ideia pioneira de Bombelli (GARBI, 2007, p. 53).

Dessa forma, apesar de determinados livros didáticos de Matemática do Ensino Médio darem margem à errônea ideia de que os números complexos teriam surgido a partir da necessidade de resolver equações quadráticas, não obstante, não foi na resolução de equações quadráticas que se deu a origem dos números complexos, mas sim na resolução de equações cúbicas.

De acordo com Pinto Junior (2009, p. 27):

> Bombelli foi o primeiro matemático com coragem suficiente para aceitar a existência dos números imaginários, dando uma nova luz ao quebra-cabeça das equações cúbicas. Sua habilidade em operar com números imaginários o capacitou a demonstrar a aplicabilidade da fórmula de Cardano até nos casos irredutíveis de uma equação cúbica.

É importante salientar a coragem que Bombelli teve ao aceitar a existência de números tidos até então como "imaginários". Não é impossível que outros em sua época ou no

[4] mais detalhes sobre isso podem vistos em Garbi (2007).

passado tivessem essa ideia, mas coube a Rafael Bombelli o mérito de continuar trabalhando com aqueles números imaginários, mostrando que, de fato, era um homem a frente de seu tempo, semeando com maestria no processo de abstração matemática. Para Garbi (2007, p. 51), "Bombelli era daquele tipo de pessoas nascidas para fazer a História: corajoso, pertinaz e sempre disposto a pensar em coisas novas".

Ressalte-se também a grande contribuição dada por René Descartes (1596-1650) no desenvolvimento de resoluções de equações cujas raízes nem todas são reais, as quais ele (Descartes) as denominou de números "imaginários", nomenclatura adotada por seus contemporâneos e utilizada até hoje, claro que atualmente num sentido mais formal, com definição precisa e plenamente legítima.

De acordo com Cerri e Monteiro (2001, p.6):

> personagens importantes da História da Matemática deram contribuições ao desenvolvimento da teoria dos números complexos, dentre os quais o matemático francês Abraham de Moivre, amigo de Isaac Newton, e também os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. Mas quem fez o trabalho mais importante e decisivo sobre o assunto foi Euler.

Leonard Euler (1707-1783), foi um grande matemático suíço, "considerado o mais prolífico matemático de todos os tempos" (MILES, 1993, *apud* PAIVA, 2013, p. 272). Com os trabalhos de Euler, "a existência de raízes no campo complexo ficou definitivamente estabelecida" (MILES, 1993, *apud* PAIVA, 2013, p. 273).

Como podemos perceber as origens históricas dos números complexos envolveram inúmeras pessoas, algumas dotadas de determinado prestígio, ao passo que outras nem tanto. Eis um breve resumo sobre a evolução dos números complexos, conforme Milies (2008):

> O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido em 1629 por Albert Girard. O símbolo *i* foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler em 1777, apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss em 1801. Os termos *real* e *imaginário* foram empregados pela primeira vez por René Descartes em 1637. A expressão *número complexo* foi introduzida por Carl Friederich Gauss em 1832. A representação gráfica dos números complexos foi obtida independentemente por Caspar Wessel, em 1799; Jean-Robert Argand, em 1822 e Carl Friederich Gauss, em 1831. A apresentação hoje usual dos números complexos como pares ordenados de números reais foi dada por Sir William Rowan Hamilton em 1837 (MILIES, 2008).

Nota-se que, historicamente, a evolução e consolidação dos números complexos enquanto parte integrante aceitável e exequível dentro e fora da própria Matemática envolveu um grande número de indivíduos em épocas e regiões diferentes da Europa (GARBI, 2007; MILES, 2008).

Não obstante, é importante lembrar que para um entendimento plausível dos números reais, foi necessário (e suficiente) uma interpretação geométrica dos elementos de $\mathbb{R}$, fazendo-se uma associação biunívoca entre cada número real com os pontos de uma reta (MACHADO, 2009).

Analogamente, conforme Machado (2009) foi necessário e suficiente uma interpretação geométrica dos números complexos, realizando-se uma associação também biunívoca entre cada elemento de C com um único ponto de um plano, denominado plano de Argand - Gauss ou plano complexo.

De acordo com Miles (1993, *apud* PAIVA, 2013, p. 273) a "representação geométrica dos números complexos mediante pontos do plano foi decisiva para sua aceitação".

Até meados do século XIX havia matemáticos que se sentiam desconfortáveis com o fato de poder existirem raízes quadradas de números negativos. No livro "A Matemática do Ensino Médio", Lima *et al* (2006) esclarecem que:

> Bombelli trabalhava sistematicamente com a quantidade $\sqrt{-1}$, que hoje chamamos de unidade imaginária e representamos por i. Apenas no século XIX, quando Gauss (1777-1855), o grande matemático da época e um dos maiores de todos os tempos, divulga a representação geométrica dos números complexos é que essa sensação de desconforto desaparece (LIMA *et al*, 2006, p. 161).

Dessa forma, percebemos a importância da interpretação geométrica dos números complexos para a efetiva aceitação e utilização desses números dentro da própria Matemática e, posteriormente, em outras áreas. Reconhecidamente, a representação geométrica dos complexos foi crucial para a inserção definitiva desse assunto na Matemática e extirpar eventuais posturas dúbias referentes ao conjunto $\mathbb{C}$.

Assim, esta investigação defende a visualização como elemento catalizador para um eventual ensino satisfatório dos números complexos. E temos a crença que o uso do GeoGeobra pode colaborar nesse sentido, uma vez que esse software possibilita, com certa dinamicidade proveitosa, visualizações, tanto algébrica, numérica como geométrica, e pode contribuir para internalizar melhor a interpretação geométrica das operações em $\mathbb{C}$.

2.2 Algumas aplicações dos números complexos

As aplicações dos números complexos estão nas mais diversas áreas. E é de suma importância que os estudantes percebam isso, de modo que vejam sentido naquilo estão estudando. Isto é, que o estudo dos números complexos não se trata de mero deleite intelectual, mas que tal conteúdo se aplica no dia-a-dia do mundo real, ajudando, e muito, o desenvolvimento da humanidade.

Nas Artes, por exemplo, Ribeiro (2010, *apud* CAMARGO e VRIESMAN, 2012) exterioriza aplicações dos números complexos na utilização dos conceitos de rotação de pontos em um eixo de sistema cartesiano por Maurits Cornelis Escher (1898-1972), considerado um dos artistas gráficos mais conhecidos no mundo, onde um dos exemplos está na sua obra Limite Circular III, que pode ser visualizada na figura 1.

Figura 1: Limite Circular III (1959), de M. C. Escher.

Fonte: Disponível em: <http://patisampaio.no.sapo.pt/limite.htm>. Acesso em: 04/06/2015.

Conforme Camargo e Vriesman (2012), na Matemática, destaca-se o uso de números complexos para aplicação de Fractais, sendo identificados por Benoit Mandelbrot como entidades geométricas especiais.

Segundo Dante (2010, *apud* CAMARGO e VRIESMAN, 2012), um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos, no qual permite desenhar (ou modelar) qualquer coisa (ou fenômeno) da natureza numa tela de computador (computação gráfica). Estas formas geométricas de dimensão fracionária servem como ferramenta para descrever formas irregulares da superfície da terra; modelar fenômenos, aparentemente imprevisíveis (teoria do caos), de natureza meteorológica, astronômica, econômica, biológica e outros fatores.

Conforme Alexander (2008, *apud* CAMARGO e VRIESMAN, 2012), pode-se ainda destacar a utilização de números complexos em vários ramos da Engenharia Elétrica, como, por exemplo, na análise de circuitos envolvendo corrente alternada (CA).

Com efeito, observa-se que atualmente os números complexos, em análise de circuitos de corrente alternada, são utilizados em instalações elétricas residenciais. De acordo com O'Malley (2014, p.340):

> A melhor forma de se analisar a maioria dos circuitos CA é usar álgebra complexa. [...], em análise de circuitos CA, tensões e correntes senoidais são *transformadas* em números complexos chamados *fasores*; resistências, indutâncias e capacitâncias são *transformadas* em números complexos e chamadas impedâncias.

É importante destacar o que O'Malley (2014) registra sobre o uso dos números complexos no âmbito da eletricidade em seu livro sobre análise de circuitos elétricos. Por exemplo, tensões e correntes senoidais são associadas a números complexos, o que facilita o procedimento de cálculos sobre tais entes físicos.

Por sua vez, impedâncias são associadas a números complexos que promovem uma melhor operacionalização matemática acerca de cálculos com resistências, indutâncias e capacitâncias dentro de uma análise de circuitos com corrente alternada (CA).

Ressalte-se ainda que a escola em que esta pesquisa pretende dar continuidade e ter lugar em sala de aula, é uma Escola Estadual de Educação Profissional (EEEP) na qual existem cursos técnicos profissionalizantes que exigem um conhecimento, pelo menos a nível básico, de CA. Os cursos em questão são: Técnico em Edificações e, *principalmente*, Técnico em Eletrotécnica.

Dessa forma, aqueles estudantes da Educação Básica que almejam seguir carreira em algum campo dessa importantíssima área de conhecimento e de aplicações da humanidade chamada Engenharia Elétrica (por exemplo, Sistemas Elétricos, Informática Industrial, Engenharia de Telecomunicações etc.) necessitam dos conhecimentos sobre números complexos, a fim de que possam compreender melhor os assuntos correlatos as atividades em suas respectivas funções.

2.3 Os números complexos no Ensino Médio

Como anunciado anteriormente, o ensino de números complexos pode ocorrer em escolas da Educação Básica (BRASIL, 2006; 2014; LIMA *et al*, 2006). No entanto, é sabido que parcela considerável dos professores de Matemática possuem como fonte de consultas e inspiração para as suas aulas o livro didático.

Com efeito, no livro “Exames de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio”, Lima *et al* (2001), apontam que:

> O livro didático é o instrumento essencial utilizado pelo professor para realizar o seu trabalho. Dele são tiradas as listas de exercícios, é nele que estão as definições, os exemplos, as observações, as demonstrações e a linguagem a ser usada na comunicação com a classe. Muitas vezes (quase sempre) o livro didático é onde o professor aprende aquilo que vai transmitir a seus alunos, pois em geral não estudou na faculdade (se é que frequentou alguma) um número considerável de assuntos que fazem parte do currículo escolar (LIMA *et al*, 2001, p.462).

O livro didático foi, e continua sendo, uma importante ferramenta para a atividade docente. Lamentavelmente, boa parte dos livros didáticos de Matemática, trazem o assunto sobre números complexos sem fornecer, por exemplo, as devidas conexões entre álgebra e geometria (BRASIL, 2014).

Embora alguns itens sejam apresentados nos livros didáticos de maneira satisfatória, como, por exemplo, ausência de dificuldades na aritmética com números complexos, em outros aspectos os livros deixam a desejar, como as viáveis conexões com a Geometria. Segundo Lima *et al* (2001):

> A aritmética dos números complexos não apresenta dificuldades. A conexão com a Geometria, porém, é deficiente, o que é estranho, pois a Geometria Analítica acabou de ser estudada. É mais um exemplo de falta de conexão entre os capítulos. As aplicações geométricas das operações entre complexos (principalmente a multiplicação), tão belas como variadas, não são exploradas. Isto é imperdoável, pois todo matemático ou usuário da Matemática, ao pensar num número complexo, sempre o imagina como um ponto do plano coordenado e as operações são interpretadas como transformações geométricas (LIMA *et al*, 2001, p. 467).

Nesse sentido, torna-se relevante realizar as vinculações entre álgebra e geometria quando do ensino de números complexos, bem como efetivar as interpretações geométricas dessas operações, relacionando-as com as transformações geométricas pertinentes.

É importante que os professores de Matemática, quando do ensino de números complexos, possam contar com opções de materiais que tragam em seu bojo as conexões ente álgebra e geometria. E que tais materiais estejam disponíveis para colaborar em sua prática em sala de aula. Ressalte-se ainda a admirável forma de como os números complexos encontram lugar na geometria, onde é possível uma melhor abordagem quanto a explanação desses números.

As OCNEM[5], do Ministério da Educação, orientam que o professor de Matemática "aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas)." (BRASIL, 2006, p. 77).

Nossa proposta revela-se no sentido de fomentar as relações algébricas e geométricas propiciadas pelos números complexos, com o suporte do software GeoGebra, incluindo o uso de vetores, bem como são relacionadas as interpretações geométricas das operações com números complexos e as transformações, em especial a rotação, a translação e a homotetia.

2.4 O software GeoGebra

Neste trabalho fomenta-se o uso de tecnologias (no caso, computadores/smartphones com o software GeoGebra instalado) no ensino dos números complexos. No Brasil existem bases legais que fundamentam e propõem o uso de recursos tecnológicos, como computadores e softwares, em prol do bom ensino da Matemática.

Dessa forma, o uso de tecnologias no ensino da Matemática é fomentado. O computador pode ajudar professores e alunos, pois conforme os PCN:

> Ele é apontado como um instrumento que traz versáteis possibilidades ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, seja pela sua destacada presença na sociedade moderna, seja pelas possibilidades de sua aplicação nesse processo. Tudo indica que seu caráter lógico-matemático pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que ele permite um trabalho que obedece a distintos ritmos de aprendizagem. (...). O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. O trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as. (BRASIL, 1997, p. 35).

De acordo com os PCN (BRASIL, 1997) o computador pode ser bastante útil nos processos de ensino e de aprendizagem, sendo um elemento que pode ser utilizado de acordo com as intenções didáticas dos docentes. Tanto computadores como smartphones podem ter seu uso viabilizado em sala de aula em prol do desenvolvimento de atividades que corroboram para

[5] OCNEM - Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

o alcance, com determinada dinamicidade, de objetivos educacionais, conforme os interesses e condições dos alunos e dos professores.

Iremos utilizar no decorrer deste estudo um tipo de software de geometria dinâmica, a saber, o GeoGebra. É importante usar um software educacional? Observe o que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> Quanto aos *softwares* educacionais é fundamental que o professor aprenda a escolhê-los em função dos objetivos que pretende atingir e de sua própria concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que se prestam mais a um trabalho dirigido para testar conhecimentos dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 35).

A escolha do software educacional pelos professores deve ocorrer de acordo com os objetivos que almeja conseguir, além de suas convicções enquanto docente, no sentido de verificar a melhor forma de auxiliar na consecução das atividades.

Certamente, pretendemos colaborar com a facilitação da visualização e interpretação geométrica dos números complexos. E o GeoGebra pode oferecer isso de forma bastante dinâmica. Com esse intuito, tal software foi escolhido para ser utilizado. O que é o GeoGebra?

De acordo com o Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro[6], ligado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense (UFF):

> Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS. (Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>. Acesso em 18/06/2015).

Assim, o software GeoGebra foi criado com o intuito de auxiliar professores e alunos nas aulas de Matemática, em todos os níveis de ensino. Esse software é um instrumento poderoso para realização e mostra de ilustrações profissionais e outras ferramentas em diversos tipos de sistemas operacionais. Assim, apresenta uma variabilidade considerável de opções para uso em diversas máquinas (computadores, smartphones etc.). A seguir, é possível visualizar uma interface do GeoGebra.

[6] Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>. Acesso em: 18/06/2015.

Figura 2 – Uma interface do software GeoGebra.

Fonte: Produção nossa.

Note que com o GeoGebra um mesmo objeto matemático pode ser representado de várias formas, onde tem-se, por exemplo, a possibilidade de visualizar tanto algebricamente como geometricamente tal objeto. Esse é um dos motivos de escolhermos esse software em nosso trabalho.

Por que usar o GeoGebra e não outro software? Porque este software é gratuito e não está na lista de softwares proprietários – que precisam de licença para serem utilizados – como é o caso do *Microsoft Windows*; pelo contrário, o GeoGebra está disponível na rede mundial de computadores, onde qualquer estudante ou professor com acesso à internet pode fazer o download do mesmo e usufruir de suas variadas funções e aplicações.

Além do mais, nos últimos anos existe um número crescente quanto a sugestões de utilizações de softwares livres (BRASIL, 2014). Então, este trabalho segue nessa direção, estimulando que professores e alunos possam usar gratuitamente essa ferramenta tecnológica em suas práticas escolares concernentes ao ensino e a aprendizagem dos números complexos.

Apesar de existirem outros softwares como, por exemplo, o *scilab*, o *calc 3D*, que poderiam ter sido selecionados, o GeoGebra foi escolhido para corroborar com atividades desta pesquisa por ser de fácil acesso e oferecer vários comandos plausíveis em Geometria, Álgebra, em especial no tange aos números complexos, embora outros softwares, como os supracitados, tenham funções análogas a estas.

Por que ir além do uso convencional (e, às vezes, exclusivo) de pincel e lousa na sala de aula? Ora, optamos por não utilizar apenas o pincel e a lousa em sala de aula, tendo em vista que com o uso do software, a visualização e a interpretação geométrica dos números complexos podem ser facilitadas pela agilidade computacional, uma vez que se os mesmos procedimentos realizados pelo programa de computador fossem realizados por um ser humano no papel ou na lousa com pincel, tal tarefa poderia ser sobremaneira dispendiosa, no sentido de que levaria bastante tempo, a ponto de ser enfadonho seu processo. E não é isto que queremos.

Pelo contrário, almejamos que o ensino de números complexos seja agradável aos alunos, de maneira que estes venham perceber a importância dos números complexos tanto na Matemática como em outras áreas do conhecimento.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos o percurso metodológico seguido nesse estudo. Em relação aos procedimentos metodológicos, estes estiveram imbuídos de uma dupla cautela, onde de um lado tem-se uma preocupação com o ensino referente à Matemática, e de outro a precípua necessidade da adoção de uma metodologia de pesquisa também correlata com o ensino de Matemática. Assim, neste trabalho foi adotada uma metodologia de ensino pautada nos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), de acordo com Brousseau (2008; 1986, *apud* ALMOULOUD, 2007; 1986, *apud* PAIS, 2008); e na metodologia de pesquisa os pressupostos da Engenharia Didática (ED), conforme assevera Artigue (1988, *apud* ALMOULOUD, 2007; 1996, *apud* PAIS, 2008).

Com o intuito de atingir os objetivos desta pesquisa, encontramos na TSD e na ED princípios teóricos que se entrelaçam, de maneira a nos ajudar neste estudo. Por conseguinte, sabemos que a Teoria das Situações Didáticas pode servir de embasamento para a metodologia da Engenharia Didática.

A TSD e a ED estão intimamente relacionadas entre si, uma vez que a própria noção de Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e como criação de situações de ensino, advém da busca de condições necessárias à concretização da aprendizagem em Matemática (BROUSSEAU, 2008).

Embora desenvolvidas e defendidas por autores diferentes, a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a Engenharia Didática (ED) irmanaram-se na proeminente perspectiva de contribuir com pesquisas em didática da matemática (ALMOULOUD, 2007), que, por seu turno, constitui-se em "uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático [...]" (PAIS, 2008, p. 11).

Esse foi um dos motivos para escolha de utilizar os pressupostos teóricos, tanto da TSD, como da ED, nesta pesquisa, haja vista suas íntimas relações com o ensino e a aprendizagem em Matemática.

A Engenharia Didática (ED), como veremos mais adiante, compõe-se de várias etapas (ou fases) quais sejam: análises preliminares ou prévias; concepção e análise *a priori;* aplicação de uma sequência didática; análise a posteriori e a avaliação (validação).

Ressaltamos que:

> Segundo Artigue (1988), cada uma dessas fases é retomada e aprofundada ao longo do trabalho de pesquisa, em função das necessidades emergentes. Isso significa que a

> expressão “análises preliminares” não implica que após o início da fase seguinte não se possa retomá-las, visto que a temporalidade identificada pelo termo “preliminar” ou “prévia” é relativa, pois se refere apenas a um primeiro nível de organização. (ALMOULOUD, 2007, p. 173).

Por conseguinte, a metodologia de pesquisa assumida nesta investigação, encontra-se na seara de uma pesquisa qualitativa, onde foram utilizados procedimentos assentados nos pressupostos das duas primeiras fases (análises preliminares ou prévias; concepção e análise *a priori*) da Engenharia Didática (ED), sendo que tais etapas “permitem realizar a construção das sessões de ensino que detém a possibilidade de realizações didáticas em sala de aula” (ALVES, 2014, p. 149), em nosso caso, no âmbito do ensino de números complexos na escola básica.

Almouloud (2007, p. 184), referindo-se a ED, afirma que:

> Esta metodologia é geralmente utilizada nas pesquisas cujo propósito é identificar os fatores que interferem nos processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito matemático e a construção de uma sequência didática cujo intuito é proporcionar ao aluno condições favoráveis à aquisição e compreensão desse conceito.

Os fatores identificados nesta pesquisa que interferem nos processos de ensino e aprendizagem dos números complexos foram os seguintes: prática docente e escolhas didáticas dos professores. Estes fatores podem ser encontrados com mais detalhes ao longo do capítulo 1 (nos itens 1.2 e 1.3), bem como no capítulo 4 que expõe sobre as análises e discussões deste trabalho.

Tais fatores foram identificados no decorrer dos estudos realizados sobre os processos de ensino e de aprendizagem dos números complexos e dos estudos quando da realização da análise prévia e análise *a priori*, de acordo com os pressupostos da Engenharia Didática.

3.1 Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), revelada pela didática francesa no ensino e aprendizagem da Matemática, provém de experiências tanto profissionais como acadêmicas de Guy Brousseau em parceria com outras pessoas, tais como estudantes, pesquisadores e professores de Matemática (BROUSSEAU, 2008). A Teoria das Situações Didáticas “foi desenvolvida por Guy Brousseau no intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos” (ALMOULOUD, 2007, p. 31).

A TSD de Guy Brousseau representa um avanço significativo num ramo, de certa forma novo, qual seja o da didática da matemática, onde notadamente preocupa-se em dar respostas aos assuntos de interesse nos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática (BROUSSEAU, 2008).

Nesse sentido, nas palavras do próprio Brousseau (2008, p.16):

> a abordagem da *teoria das situações didáticas* apresenta-se como um instrumento científico. Tende a unificar e integrar as contribuições de outras disciplinas e proporciona uma melhor compreensão das possibilidades de aperfeiçoamento e regulação do ensino da matemática.

Cabe ressaltar a especificidade do uso da TSD e sua relação apropriada ao ensino da Matemática. De acordo com nossa experiência docente, podemos relatar que havia (e parece que ainda há) em determinados ambientes educacionais e momentos conhecidos como "capacitações para professores", uma ideia, que era propalada e que se queria impregnar nos docentes, de que: "independentemente da área do conhecimento, o importante seria saber aplicar 'corretamente' o método ou a metodologia de ensino".

Ou seja, se determinada metodologia era aplicada numa certa aula de Química, por exemplo, e cujos resultados foram tidos como sendo satisfatórios, tal metodologia poderia e deveria ser utilizada por outras áreas, inclusive Matemática, conforme apregoado por aqueles defensores desse pensamento.

Porém, esse modelo não considera as especificidades de cada área nem as peculiaridades das subáreas, o que se traduz como uma falha grave. Sem pretensões de redundância, mas é preciso afirmar que cada caso é um caso. É fundamental considerar as especificidades de cada assunto, inclusive dentro da mesma disciplina.

Repudiamos veementemente a ideia de que existe "um método único" de ensinar Matemática. Admitimos que existem várias maneiras, inúmeros métodos, enfim, existem formas diferentes de ensinar e aprender Matemática. Nesse cenário, inúmeras pesquisas foram e estão sendo desenvolvidas e aplicadas em Educação Matemática, que "é uma grande área de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis de escolaridade[...]" (PAIS, 2008, p. 10).

Ressaltamos que, diferentemente como aludia o subtítulo da obra "***Didática Magna – Tratado da arte universal de ensinar tudo a todos",*** escrita no século XVII, por João Amós Comênio (1592 – 1670), a TSD estrutura-se no fato de que não podemos nem devemos ensinar um conteúdo da mesma forma, independentemente da situação. É preciso estruturar e considerar as situações, pois na TSD, conforme destaca Brousseau (2008, p. 21) "ao tomarmos como objeto de estudo as circunstâncias que regem a difusão e a aquisição dos conhecimentos, vamos nos interessar pelas situações."

Assim, algumas metodologias que foram utilizadas com determinado componente curricular na escola, não necessariamente produzirá os mesmos efeitos se aplicada a outra área do conhecimento, pois isso depende de muitos fatores que precisam ser levados em conta, como, por exemplo, a obsolescência das situações ou o "envelhecimento das situações" (BROUSSEAU, 1986, p. 293, *apud* ALVES, 2014, p. 165), entre outros.

Segundo Almouloud (2007, p. 32): "O objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber." Observa-se que na TSD de Brousseau (2008) ocorre uma mudança de foco nos processos de ensino e de aprendizagem, em relação aos elementos envolvidos (alunos, professores, sistema educacional, etc.), quando em comparação com outras teorias concernentes à aprendizagem ou com as ideias pedagógicas, como as, por exemplo, apontadas e estudadas por Saviani (2008).

Saviani (2008, p. 6) afirma que "Por ideias pedagógicas entendo as ideias educacionais, não em si mesmas, mas na forma como se encarnam no movimento real da educação, orientando e, mais do que isso, constituindo a própria substância da prática educativa." Embora esteja além do escopo deste trabalho, consideramos importante a abordagem sobre as ideias pedagógicas realizada pelo autor supracitado, às quais não iremos nos ater, tendo em vista a alçada dessa obra.

Porém, à guisa de exemplificação acerca da mudança de quem estar no centro das atenções no processo de ensino-aprendizagem, ao arguir sobre as bases didático-pedagógicas da expressão "aprender a aprender", que o autor alega pertencer às ideias pedagógicas de um movimento chamado escolanovista, Saviani (2008) aponta que:

> O lema 'aprender a aprender', tão difundido na atualidade, remete ao núcleo das ideias pedagógicas escolanovistas. Com efeito, deslocando o eixo do processo educativo do aspecto lógico para o psicológico; dos conteúdos para os métodos; **do professor para o aluno**" (SAVIANI, 2008, p. 431, grifo nosso).

Nessa perspectiva, o aluno seria tomado na posição central não apenas nos processos de ensino e de aprendizagem, mas seria no próprio processo educacional como um todo. De acordo com Saviani (2008), existem outras tendências ou ideias pedagógicas que abonam atenção central a determinados elementos constituintes ou correlatos com o processo educacional brasileiro. Umas dão ênfase ao professor, outras ao aluno, outras de cunho religioso ou leigo, outras com caráter (neo) tecnicista, entre outras. Diferentemente do que é proposto na TSD por Brousseau (2008). Como anunciado antes, não iremos esmiuçar tais ideias pedagógicas aqui, pois estão além da abrangência deste trabalho.

Todavia, é oportuno destacar quem ou aquilo que ocupa lugar central como objeto de estudo na Teoria das Situações Didáticas. Desse modo, embora o aluno seja levado a assumir sua própria responsabilidade pela construção dos conhecimentos matemáticos ao longo das situações, nem o discente nem o professor estão como objeto central de estudo na TSD. A situação didática, onde na qual ocorrem as identificações das interações instituídas entre professor, aluno e saber (ALMOULOUD, 2007) é que ocupa o lugar principal nessa teoria.

Mas, de acordo com a TSD, o que é uma *situação*? O que é preciso para que uma situação seja tida como situação didática? Responderemos a seguir tais questionamentos.

3.1.1 Situação didática, situação adidática, situação fundamental

Neste trabalho, ao assumir a perspectiva dos pressupostos teóricos da TSD no transcorrer da metodologia de ensino, concordamos com Brousseeau (2008) na forma como denomina *situação*. Assim, “Denominamos *situação* o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como o recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável” (BROUSSEAU, 2008, p. 19).

Uma situação é vista como um modelo de interação de um sujeito com um determinado meio. Depreende-se, portanto, que, como podem existir uma certa variedade de meios, existem várias situações a serem consideradas.

Inclusive Brousseau (2008, p. 19-20) esclarece que:

> Algumas dessas *situações* requerem a aquisição “anterior” de todos os conhecimentos e esquemas necessários, mas há outras que dão ao sujeito a possibilidade de construir, por si mesmo, um conhecimento novo em um processo de gênese artificial. Cabe ressaltar que a palavra *situação* serve, em sua acepção comum, para descrever tanto o conjunto (não necessariamente determinado) de condições que delimitam uma ação como um dos modelos (eventualmente formais) usados para estudá-la.

Os esquemas ou conhecimentos prévios são aqueles que o sujeito possui antes e diante de determinadas situações, e que, no decorrer destas, podem ser utilizados (ou não), sendo importante considerar, entre outras coisas, os eventuais obstáculos, sejam epistemológicos, sejam didáticos, oriundos desses conhecimentos anteriores (PAIS, 2008).

O termo *situação*, usado corriqueiramente nas escolas e em outros locais educacionais, pode ser concebido como um conjunto de condições que norteiam ações provindas das relações que podem ser obtidas entre objetos e/ou seres (vivos ou inanimados) em determinados ambientes, bem como pode ser tido como um possível modelo para melhor examiná-la.

Antes de prosseguir e enunciar quando uma situação pode ser apresentada como didática de acordo com os preceitos da TSD, vale lembrar que o termo *didática* faz alusão a um importante área conhecida como Didática, que por seu turno, constitui-se, *grosso modo*, em teoria do ensino vinculada a práticas pedagógicas que, por sua vez, estão inseridas num contexto maior, a saber, a Educação. Todavia, sabemos que a Educação é um processo que se dá em diferentes situações, atendendo a determinados interesses circunstanciais.

E, devido as peculiaridades que cercam e norteiam a ciência matemática, existe, como já anunciamos anteriormente, a Didática da Matemática. Quanto a isso, concordamos com as seguintes ponderações de Brousseau (2008, p. 53):

> Se considerarmos o ensino como "projeto e ação social em que um aluno se apropria de um saber constituído ou em constituição", a didática da matemática transforma-se na "ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos úteis aos homens e a suas instituições".

Em nosso trabalho, nos alvitramos a elaborar e propor algumas situações didáticas, que possam favorecer as condições de transmissão e apropriação de assuntos sobre números complexos. Ademais, defendemos que o ensino de números complexos deve ser valorizado na Educação Básica, haja vista ser bastante útil em diversas áreas da vida humana (LIMA, 2012).

Desse modo, à luz da TSD, para uma *situação* ser tida como *situação didática*, é preciso que esta se refira a modelos que delineiam as interações entre os elementos humanos envolvidos nos efetivos processos de ensino e de aprendizagem. Brousseau (2008, p. 21) destaca que "Reservamos o termo *situações didáticas* para modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno".

Além dos elementos humanos, considera-se também a conjuntura que os cinge, inclusive em que sistema de educação se encontram. Assim, "a situação didática é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional" (BROUSSEAU, 2008, p. 21). Sendo objeto central da TSD, a situação didática é definida como:

> o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre aluno ou grupo de alunos, um certo *milieu* (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU, 1978, *apud*, ALMOULOUD, 2007, p. 33).

Uma situação didática é toda uma conjuntura que envolve o aluno, onde o sistema educacional e o professor exercem determinadas interações entre si, sendo que devem ser providenciados meios visando intencionalmente a aquisição de um saber específico considerado relevante e útil à humanidade. Notamos, assim, do que se compõe uma situação didática.

De acordo com Luis Carlos Pais[7]:

> Uma *situação didática* é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades

---

[7] Pesquisador com Doutorado em Educação Matemática pela Universidade de Montpellier (França).

> voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico. (PAIS, 2008, p. 65).

Ao invés de canalizar as atenções no professor, a Teoria das Situações Didáticas (TSD) fomenta os benefícios possíveis advindos das interações entre professor, aluno e os conhecimentos matemáticos; interações essas pactuadas pelo chamado contrato didático (BROUSSEAU, 2008). Explicitamos sobre contrato didático no item ***3.1.3***, subsequente a este.

Sobre essas interações, é importante notar que segundo Brousseau (2008, p. 53) "Uma interação torna-se didática se, e somente se, um dos sujeitos demonstra a intenção de modificar o sistema de conhecimentos do outro (os meios de decisão, o vocabulário, as formas de argumentação, as referências culturais)." Então, observa-se que é primordial a intencionalidade de modificações no arcabouço de conhecimentos do outro sujeito para que se tenha uma situação didática.

A *situação adidática* é um componente importantíssimo da situação didática, sendo definida como "uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar" (ALMOULOUD, 2007, p. 33). Percebemos quão relevante é a situação adidática, pois nesta o aluno é provocado a aprender por uma necessidade própria, sem uma imposição de terceiros (professores, sistema educacional).

Brousseau (2008, p. 35) afirma "que cada conhecimento matemático tem pelo menos uma situação que o caracteriza e o deferência dos demais." Tal situação configura-se numa situação adidática que é chamada de *situação fundamental* (ALMOULOUD, 2007).

A situação fundamental determina, conforme defende Almouloud (2007, p. 34), "o conhecimento ensinado a um dado momento e o significado particular que esse conhecimento vai tomar do fato tendo em vista as escolhas das variáveis didáticas e as restrições e reformulações sofridas em seu processo de organização e reorganização". Percebemos, então, que a situação fundamental é bastante e relevante no processo de aprendizagem, uma vez que delineia especificamente a aquisição de determinados conteúdos matemáticos, consideradas as variáveis didáticas[8] em questão.

---

[8] Variáveis didáticas são tipos de variáveis cognitivas as quais o professor pode determinar. Concordando com Brousseau (2008, p. 35) "Chamamos de *variável cognitiva* aquela que se encontra em uma situação tal que, pela escolha de valores diferentes, pode alterar o conhecimento ótimo.

Porém, vale destacar que não podemos nem devemos afirmar que a ocorrência de exclusividade da situação fundamental pode proporcionar uma aprendizagem mais proveitosa ou que possa vir a ganhar mais celeridade e eficácia nesse processo. É preciso ficarmos vigilantes quanto a isso.

Embora a situação fundamental seja crucial para a introdução de conhecimentos em sala de aula, faz-se necessário cautela. É como admoesta Brousseau (2008, p. 43): “Não é verdade que a aprendizagem por meio do uso exclusivo da situação fundamental seja mais rápida ou mais eficaz. Essa situação pode ser inutilmente enfadonha quando o aluno já assimilou aquilo que se lhe pretende ensinar.”

Assim, é importante avaliar quanto ao uso da situação fundamental, para que não seja utilizada exclusivamente essa situação, com vistas a não gerar prejuízos das mais diversas ordens, como monetário, temporal, de aprendizagens, tanto aos alunos, como aos professores e/ ou aos sistemas educacionais. Se o aluno já conseguiu assimilar determinado assunto, a situação fundamental não se mostra como sendo mais apropriada.

Além disso, também devemos ter o cuidado de saber lidar com os diversos obstáculos que existam ou possam aparecer no decorrer das situações de ensino. Conforme Brousseau (2008, p. 48) “Algumas das concepções adquiridas não desaparecem imediatamente em benefício de uma concepção melhor: resistem, provocam erros, tornando-se, então, ‘obstáculos.’”

3.1.2 Obstáculos, mileu, dialéticas

A palavra obstáculo pode, dependendo da tomada do ponto de vista, suscitar e sugerir a ideia de empecilho, de algo que pode ou deve causar impedimentos e que, portanto, deveria ser combatido, a fim de extirpá-lo, pois poderia pressupor-se que seja prejudicial. Os obstáculos, por exemplo, na ótica do senso comum, poderiam ser aquilo que simplesmente atrapalham alguém ou algo.

Porém, do ponto de vista dos princípios da TSD de Brousseau (2008), que é o sentido de obstáculo seguido em nossa pesquisa, o obstáculo é um tipo conhecimento que deve ser considerado com determinada relevância nas diferentes situações, uma vez que podem aparecer com certa frequência no decorrer das atividades.

Brousseau (2008, p. 48) afirma que:

> Devemos o conceito de "obstáculo epistemológico" a Bachelard[9], que explicou que esse tipo de obstáculo não acontecia na matemática. A modelagem das situações levou-me a pensar o contrário e a propor uma definição mais adequada:
>
> - Um obstáculo é um "conhecimento no sentido que lhe demos de "forma regular de um conjunto de situações".
> - Tal conhecimento dá resultados corretos ou vantagens observáveis em um determinado contexto, mas revela-se falso ou totalmente inadequado em um contexto novo ou mais amplo.
> - O conhecimento novo, verdadeiro ou válido sobre um contexto mais amplo não é determinado "de acordo com" o conhecimento anterior, mas em oposição a ele: utiliza outros pontos de vista, outros métodos etc. Entre eles não existem relações "lógicas" evidentes que permitam desacreditar facilmente o erro antigo por meio do conhecimento novo. Ao contrário, a competição entre eles acontece no primeiro contexto.
> - Os conhecimentos aqui considerados não são construções pessoais variáveis, mas, sim, respostas "universais" em contextos precisos. Portanto, surgem quase necessariamente na origem de um saber, seja ela histórica ou didática.

Nesse sentido, embora na redação final de um texto matemático, de um teorema possa transparecer determinada regularidade, a criação, os desenvolvimentos estão imbuídos de obstáculos que brotam frequentemente nesses processos (PAIS, 2008).

Existem autores que corroboram para o posicionamento de que podem existir obstáculos epistemológicos em Matemática, em especial quando do processo de criação, de produção e aprendizagem dessa ciência. Por exemplo,

> Lakatos (1978) descreve uma análise epistemológica importante para o entendimento da evolução conceitual da matemática através de processo de elaboração de suas provas e demonstrações. Suas conclusões contribuem para a interpretação do sentido em que os obstáculos epistemológicos podem ser estudados em matemática, pois é constatado que o desenvolvimento das provas se faz por uma sequência de rupturas parciais dos argumentos estabelecidos até então e, por outro lado, procura manter uma certa continuidade no espaço dos problemas considerados. [...]. Balacheff (1988) também analisa os obstáculos, destacando que a matemática não formal, ou seja, aquela que precede a qualquer tentativa de formalização, não se desenvolve segundo um simples processo de acréscimos, como se os teoremas pudessem ser facilmente conectados uns aos outros [...]. (PAIS, 2008, p. 42).

[9] Gaston Bachelard (1884 – 1962), filósofo francês autor de várias obras, em elas *A Formação do Espírito Científico*, publicada em 1938.

Deste modo, no processo de aprendizagem de assuntos matemáticos, como, por exemplo, os números complexos, é importante termos a consciência da existência de obstáculos e saber lidar com eles, no sentido de propiciar o favorecimento da aprendizagem.

Os obstáculos na visão de Bachelard ocorrem, por exemplo, quando da rejeição de certos conhecimentos antigos que são suplantados pelo aparecimento de novos conhecimentos. Segundo Pais (2008, p. 39) "esses obstáculos não se constituem na falta de conhecimentos, mas, pelo contrário, são conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, que resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento". Durante esse processo de instalação de novas concepções, da aquisição de conhecimentos podem acontecer erros que, de certa forma, externam esses obstáculos.

Os erros, reconhecidamente, são comuns em atividades humanas e podem surgir inclusive nos processos de aprendizagens. Segundo Brousseau (2008, p. 49): "Um obstáculo se manifesta pelos erros, os quais, em um sujeito, estão unidos por uma fonte comum: uma maneira de conhecer; uma concepção característica, coerente, embora incorreta; um 'conhecimento' anterior bem-sucedido na totalidade de um domínio [...]. "

Dessa forma, poderão ocorrer certos obstáculos que venham emergir entre conhecimentos anteriores e os novos que estão a surgir, quando o sujeito está habituado com determinada maneira de conhecer ou um modo de reconhecimento apropriado em certo conjunto de ações, mas que não é mais suficiente diante de novos cenários que se lhe aparecem como desafiadores e que podem favorecer a aprendizagem.

Quando do ensino de números complexos, eventualmente surgem obstáculos como, por exemplo, nas resistências que os alunos podem apresentar nas situações em que seja discutida em sala de aula a ampliação do conjunto dos números reais, tendo em vista a necessidade de construção e internalização, pelo menos em caráter elementar, do conjunto $\mathbb{C}$.

Segundo Pais (2008, p. 43 – 44), "Devido ao caráter específico do contexto histórico das ciências, em que surgiu a noção de obstáculo epistemológico, no plano pedagógico, é mais pertinente se referir à existência de *obstáculos didáticos*". Dessa forma, é importante observar o contexto em que ocorrem os obstáculos. No âmbito escolar, por exemplo, é fundamental termos a compreensão de que os conceitos evoluem.

Os obstáculos didáticos, ainda segundo Pais (2008, p. 44), "são conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar”. No caso do nosso objeto matemático em questão nesta pesquisa, boa parte dos alunos trazem consigo a ideia de que não existem números tais que elevados ao quadrado resultem em um número negativo.

Isso pode ser um indício da existência de um obstáculo didático que parece depender de escolhas realizadas durante o processo de ensino, além de outros que podem ser analisados sob a ótica da epistemologia. Nesse sentido, podem existir obstáculos de procedência epistemológica e outros de cunho didático.

Para Brousseau (2008, p. 51): “Os obstáculos de origem epistemológica são aqueles que não podem, nem devem, ser evitados, pois são constitutivos do conhecimento propriamente dito. Os de origem didática são os que parecem depender das escolhas feitas no processo de ensino”. Sejam quais forem suas origens, faz-se necessário cautela com os mais diferentes tipos de obstáculos.

Mesmo durante ou depois de um processo de aprendizagem os obstáculos podem persistir, se assim as circunstâncias permitirem. Segundo Brousseau (2008, p. 50): “o obstáculo não desaparece com a aprendizagem de um novo conhecimento. Pelo contrário, opõe resistência a sua aplicação, a sua compreensão, retarda sua aplicação, subsiste em estado latente e reaparece de súbito, em especial no contexto anterior [...]”.

Daí a necessidade de não desconsiderar a existência dos obstáculos, uma que fazem parte do processo de aprendizagem, podendo exercer influências consideráveis que precisam ser levadas em conta nesse processo.

“Portanto, é inútil ignorar um obstáculo. Deve-se rechaçá-lo de maneira explícita, integrar sua negação à aprendizagem de um conhecimento novo, em particular na forma de contraexemplos. Nesse sentido, é um constitutivo do saber”, conforme assevera Brousseau (2008, p. 50). Além das precauções quanto aos obstáculos, também é preciso considerar as circunstancias em que se dá o processo de aprendizagem.

Assim, o meio (*milieu*), que pode se modificar nas diferentes situações de ensino, adquire papel fundante nesse processo. A palavra *milieu* ou *milieux*, refere-se a um arcabouço que envolve o aluno no processo de aprendizagem. *Milieu*, uma palavra de origem francesa, na língua portuguesa pode ser relacionada com a palavra **meio**, embora alguns autores, como é o caso de Almouloud (2007), digam que *milieu* transcende o significado de meio em português.

Ressaltamos que para Brousseau (2008, p. 19) o meio (*milieu*) é encarado um "sistema autônomo, antagônico ao sujeito, e é deste que convêm fazer um modelo, visto como um tipo de autômato". O *milieu* antagonista, devido as retroações com o indivíduo, possibilita ao estudante que este realize reflexões sobre suas ações e sua aprendizagem, uma vez que a aluno se torna responsável nesse processo.

Por conseguinte, Guy Brousseau dá ênfase ao meio (*milieu)* em que ocorrem as interações entre aluno, conhecimentos matemáticos e o professor.

Brousseau (2008) evoca autores conhecidos em estudos das ciências da educação e da psicologia educacional, tais como Burrhus Frederic **Skinner** (1904 – 1990), Jean William Fritz **Piaget** (1896 – 1980), Lev Semenovitch **Vigôtski** (1896 – 1934), de maneira a explicitar a relevância que o meio pode oferecer àqueles que se encontram em suas circunscrições, onde os indivíduos tendem a se adaptarem ao meio naturalmente. Observe o que Brousseau (2008, p.17-18) relata:

> Pois bem, psicólogos demonstraram, a propósito dos fenômenos de aprendizagem e em diferentes perspectivas, a importância da tendência natural dos indivíduos de adaptação ao meio: Skinner estudou o papel dos estímulos e propôs a construção de um modelo de sujeito; Piaget trabalhou essencialmente a gênese não escolar dos conhecimentos e, para tanto, com base em sua formação científica, concebeu dispositivos experimentais com os quais a criança revela seus padrões de pensamento e o pesquisador reconhece, em seus comportamentos, as estruturas e conhecimentos matemáticos de sua preferência; Vigôtski estudou as modalidades de influência do meio sociocultural na aprendizagem dos alunos, deu lugar a um âmbito ideológico ou científico.

Assim, a circunvizinhança, a sociedade, os ambientes externos apresentam grande influência na formação do indivíduo, inclusive em sua formação estudantil, de maneira que "Sob essas perspectivas, o ensino passa a ser, pois, uma atividade que concilia dois processos: um, de *aculturação*, e outro, de *adaptação independente*" (BROSSEAU, 2008, p.18). Na busca de resultados mais satisfatórios nessa formação humana, procuram-se formas de otimizar esse processo.

Assim sendo, vem à tona uma perspectiva de que algo precisa ser modelado, a fim de que metas possam ser alcançadas com mais objetividade, perseguindo à consecução de determinados interesses. E nos processos de ensino e aprendizagem dos números complexos, isso torna-se cada vez mais imperativo, dada a importância e necessidade desse assunto para a compreensão e aperfeiçoamento dentro da própria Matemática e de outras áreas (LIMA, 2012).

Não obstante, surgem algumas perguntas: o que significa modelar? o que é um modelo? quem deve ser modelado? Ora, modelo é aquilo tomado como exemplo, algo ou alguém cuja relevância influencia sobremaneira outrem. Modelar quer dizer dar um modelo, adaptar-se.

Entretanto, modelar quem? o aluno, os conhecimentos matemáticos, o professor? Considerando a relevância das interações entre os diferentes elementos constitutivos do processo educativo, o meio (*milieu*) emerge como algo que ocupa fundamental importância na ótica da TSD de Guy Brousseau, a ponto do autor nos admoestar o seguinte: “Portanto, é o meio que deve ser modelado” (BROUSSEAU, 2008, p. 19).

Nesse sentido, a modelagem de situações tem papel importantíssimo no processo de aprendizagem. Ressalte-se que na TSD Guy Brousseau “modela as situações adidáticas em termos de jogo” (ALMOULOUD, 2007, p. 36).

Um jogo ou uma sucessão de jogos é um conjunto de instrumentos que se relacionam entre si e com o indivíduo, de maneira que responde ao sujeito obedecendo a alguns regramentos. Os arquétipos são utilizados de modo a instigar uma participação ativa do aprendiz, onde este é levado a usar e/ou adquirir determinados conhecimentos novos.

O jogo é empregado na perspectiva de propiciar ao aluno oportunidades de utilizar estratégias para iniciar o jogo, perceber que tais estratégias não são suficientes para prosseguir ou ganhar e, assim, o aluno tem consciência de seu estado no processo de aprendizagem e vai em busca de conhecimentos para dar continuidade ao jogo ou a sucessão de jogos, visando preservar ou obter um estado favorável.

Sob a ótica da TSD a interação entre discentes e o meio (*milieu)* é tão importante que “Dessa perspectiva, os comportamentos dos alunos revelam o funcionamento do meio, considerado como um sistema” (BROUSSEAU, 2008, p.19). Isto é, os alunos expressam, a seu modo, aquilo que receberam do sistema, do meio (*milieu)*, uma vez que este (re) alimenta a engrenagem social num processo dialético.

Conforme Almouloud (2007, p. 36):

> Para analisar o processo de aprendizagem, a teoria das situações observa e decompõe esse processo em fases diferentes, nas quais o saber tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com o saber. Nessas fases interligadas, podem-se observar tempos dominantes de *ação*, de *formulação*, de *validação* e de *institucionalização*.

A aprendizagem é um processo onde, nessa perspectiva, ficam expostas as diferentes formas que o saber pode assumir, numa expectativa de que dependendo das relações em distintas situações, ele adquire determinado significado para os estudantes. Segundo

Brousseau (2008, p. 28) “A aprendizagem é o processo em que os conhecimentos são modificados”.

Assim, não ficam estáticos os conhecimentos, mas são modificados ao longo do processo de aprendizagem. Modificação esta, por sinal, indicativa daquele processo. Ademais, alunos, saber, professor, sistema educativo estão dialeticamente entrelaçados nos processos de ensino e de aprendizagem, nas diferentes situações.

As situações são arquitetadas com o intuito de propiciar que o aluno venha progredir. Acontece que como os alunos podem adiantar-se no decorrer das situações, estas também podem progredir.

Para Brousseau (2008, p. 32) a dialética é um processo relevante no qual “Cada situação pode fazer com que o sujeito progrida, e por isso também pode progredir, de tal modo que a gênese de um conhecimento pode ser o fruto de uma sucessão (espontânea ou não) de novas perguntas e respostas”. Dessa forma, é importante observar as diferentes dialéticas que podem ocorrer ao longo das distintas situações (situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação de formulação).

Durante a situação de ação, como o próprio nome sugere, o aluno atua na situação, realizando ações e tomando atitudes conforme as reações do meio (*milieu*) antagonista. De acordo com Brousseau (2008, p. 28) “Para um sujeito, ‘atuar’ consiste em escolher diretamente os estados do *meio* antagonista em função de suas próprias motivações”.

Almouloud (2007, p. 37) destaca que a dialética da ação:

> consiste em colocar o aprendiz numa situação, chamada situação de ação, tal que:
>
> - coloca um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar;
>
> - o aluno possa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação.

O meio ao reagir com determinada regularidade, permite ao sujeito poder se precaver e passar a tomar atitudes e ter respostas antecipadas com vistas a otimizar as suas ações.

Na situação de formulação, o aluno é levado a formular suas ideias acerca das atividades inerentes ao jogo, ao meio em está se dando o processo de aprendizagem. “Nessa etapa, as crianças descobrem a importância de discutir e definir estratégias” (BROUSSEAU, 2008, p.24). Assim, os discentes podem suscitar elementos que eventuais conjecturas, levantar questionamentos sobre podem se desdobrar em possíveis hipóteses que serão ou não validadas e/ou institucionalizadas posteriormente.

O aluno, assim como o professor, é um ser social e como tal precisa se comunicar. Desse modo, conforme Almouloud (2007), na dialética de formulação ocorrem trocas de informações, no sentido de ocorrer uma comunicação linguística.

Na formulação, é importante destacar que o aluno é incitado a trabalhar em grupo, de modo que enquanto um aluno está em situação de ação, outro estudante observa as atividades, recolhe todas as informações pertinentes, e tem a incumbência de transmitir isso aos demais colegas. Assim, a comunicação entre os alunos é imprescindível para explicitar e dar continuidades aos momentos de aprendizagem.

Sobre essa comunicação, Brousseau (2008, p. 26) salienta que ela está "submetida a dois tipos de retroação: uma imediata, por parte dos colegas – que a compreendem ou não (concordam com ela ou não) –, e outra, mediata, por parte do *meio*, quando [...] a estratégia resulte vencedora ou não", caso seja referente especificamente a uma partida em especial.

Durante a situação de validação, os alunos são instigados a um debate saudável e proveitoso entre si, de modo que uns procuram convencer os outros que as suas respectivas estratégias são as mais adequadas para atingir determinados objetivos.

De acordo com Almouloud (2007), durante a dialética da validação coloca-se em xeque a validade do modelo, onde coexistem debates sobre a certeza das asserções propostas pelos alunos. E isso afirmando, no âmbito de um certo contexto, as suas razões que levam a ter essa postura, com argumentações convincentes.

Guy Brousseau ainda destaca que na situação de validação "O aluno não só deve comunicar uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado. Deve sustentar sua opinião ou apresentar uma demonstração" (BROUSSEAU, 2008, p. 27). Ou seja, na validação o aluno precisa além de expor de suas posições, trazer argumentações plausíveis, organizando seus enunciados através de demonstrações.

As situações de ação, formulação e validação são necessárias e "podem conjugar-se para acelerar as aprendizagens (sejam elas espontâneas ou não)" (BROUSSEAU, 2008, p. 32). Não obstante, para corroborar com a consolidação de determinados conhecimentos socialmente aceitos e tendo-se reconhecidas as suas importâncias culturalmente, faz-se a necessária a *institucionalização* das situações (BROUSSEAU, 2008).

Nesse sentido, existem conhecimentos que serão esquecidos, marginalizados e não estarão mais no repertório cultural de alunos e professores. Ao passo que outros conhecimentos ganham robustez no decorrer das situações, tendem a não serem esquecidos e adquirem um "*status* cultural indispensável de saber" (BROUSSEAU, 2008, p. 31).

À luz da TSD de Brousseau (2008; 1986, *apud* PAIS, 2008) é importante notar a distinção entre conhecimentos e saber. Segundo Brousseau e Centeno (1991, *apud* BROUSSEAU, 2008, p. 31-32):

> Os conhecimentos são meios transmissíveis (por imitação, iniciação, comunicação etc.), ainda que não necessariamente demonstráveis, de controlar uma situação e obter dela um resultado determinado, de acordo com uma expectativa e uma exigência social. O saber é o produto cultural de uma instituição que tem como objetivo identificar, analisar e organizar os conhecimentos, a fim de facilitar sua comunicação.

Nessa perspectiva, os conhecimentos são instrumentos utilizados em determinadas circunstâncias com o intuito de controlar e/ou preservar um estado favorável ao sujeito. Já o saber é um constructo humano com respaldo institucional, dentro de uma seara com um repertório especial, com importância e são confirmados culturalmente e socialmente ao longo dos tempos (BROUSSEAU, 2008).

Para Almouloud (2007) no escopo da dialética da institucionalização, o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto do saber. Nessa etapa, os conhecimentos são formalmente elaborados e instituídos, de maneira a serem notoriamente constituintes de um arcabouço cultural institucionalizado denominado saber.

Ainda segundo Almouloud (2007, p. 42): "é o aluno que tem a responsabilidade de gerenciar sua relação com o saber nas fases de ação, de formulação e de validação. O professor está encarregado da fase de institucionalização". Notamos, assim, que na TSD tanto o aluno como o professor possuem suas respectivas responsabilidades.

Ou seja, não fica somente o professor sendo o responsável pela aprendizagem do aluno, nem apenas o sistema educacional. O aluno também precisa assumir sua responsabilidade nesse processo tão trabalhado e formidável que pode ser a aprendizagem. Dessa maneira, enquanto o aluno responsabiliza-se durante as situações de ação, formulação e validação, o professor encarrega-se das fases de institucionalização no decorrer das situações.

Por conseguinte, Brousseau (2008, p. 33) defende que “A ação e, posteriormente, a formulação, a validação cultural e a institucionalização parecem constituir uma ordem razoável para a construção dos saberes”. Durante esta pesquisa, procuramos propiciar aos alunos e ao professor pesquisador as condições necessárias para que ocorressem tais situações, de modo a eventualmente favorecer o ensino e a aprendizagem de assuntos correlatos aos números complexos na Educação Básica, em escolas de Ensino Médio.

3.1.3 Contrato didático

A noção de contrato didático é uma das principais contribuições da TSD de Brousseau (2008). Isso porque o contrato didático revela-se como um conjunto de normas que primam pelo bom e efetivo relacionamento entre os principais elementos constituintes da educação escolar.

Concordando com Pais (2008, p. 77):

> torna-se necessário estudar a noção de *contrato didático*, a qual, descrita por Brousseau (1986), refere-se ao estudo das regras e das condições que condicionam o funcionamento da educação escolar, quer seja no contexto de uma sala de aula, no espaço intermediário da instituição escolar quer seja na dimensão mais ampla do sistema educativo.

Nessa teoria das situações, no contrato didático o professor apresenta os conteúdos, instiga o aluno, prevendo eventuais problemas, e os educandos observam as imposições feitas pelo professor concernentes ao seu jeito de ensinar ou ministrar aulas, de maneira que a figura do professor quase que desaparece nesse processo.

Assim, o aluno ganha maior liberdade no decorrer das atividades propostas, sendo que por meio de modificações, de acomodações e através das interações na sala de aula entre professor, aluno e o *milieu* (meio), os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática podem tender a ter melhores resultados.

Na proposta desse estudo, o contrato didático justifica-se pelos fatos que lhe são peculiares e intrínsecos aos processos de ensino e de aprendizagem do objeto matemático em questão (números complexos) com o suporte do GeoGebra. Fatos esses (já expostos acima) que corroboram para um melhor relacionamento entre professor e aluno, numa perspectiva que tais atores educacionais possuem e tendem a exercer suas respectivas funções e/ou responsabilidades no decorrer das situações didáticas.

3.2 Engenharia Didática

Concordando com Ferreira (2006), a proposta de sequência didática apresentada neste trabalho assenta-se nos princípios da metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática (ED), a qual permite que se recolham e analisem os elementos necessários à investigação durante o próprio processo de ensino (PAIS, 2001, *apud* FERREIRA, 2006).

Referindo-se a Engenharia Didática (ED), Alves (2015) nos revela, com muita propriedade, o seguinte esclarecimento:

> A importância e lugar conquistado, no cenário das investigações em Educação Matemática, em vários países, pela Engenharia Didática – ED é indubitável. Com efeito, a sistematização prevista e sua hierarquização por etapas, relativas aos fenômenos que surgem e evoluem em torno do saber matemático, proporciona ao pesquisador e, até mesmo para o professor, um olhar sistemático e cientificizado, bem como, a possibilidade de teorizar práticas educacionais de natureza diferenciada. (ALVES, 2015, p. 2).

Assim, a utilização dos princípios dessa metodologia de pesquisa neste trabalho, com a previsão de sistematização e fases (ou etapas) hierarquizadas, possibilitou a teorização de uma prática educacional na qual uma sequência didática é proposta sobre o ensino de números complexos apoiado no uso do software de geometria dinâmica chamado GeoGebra.

De acordo com Pais (2008, p. 99-100):

> A ideia de engenharia didática traz implícita uma analogia entre o trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro, no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto. Artigue (1996) deixa clara essa analogia quando diz que a engenharia didática expressa uma forma de trabalho didático comparável com o trabalho do engenheiro na realização de um projeto arquitetônico.

Ao realizar uma analogia da Engenharia Didática com o trabalho de um engenheiro, Artigue (1996, *apud* PAIS, 2008, p. 100) mostra uma preocupação com os cuidados que se deve ter quando da concepção e utilização dessa metodologia de pesquisa.

Um engenheiro é um profissional tido na sociedade como um dos mais gabaritados e que goza de uma reputação profissional, *grosso modo*, que poucas profissões desfrutam, e isso em especial aqui em nosso país.

Sabemos que a profissão de professor, no Brasil e em outras regiões do mundo em desenvolvimento ou subdesenvolvido, precisa ser mais valorizada pela sociedade, pelos governantes.

Não obstante, o professor, inclusive o de Matemática, também é um profissional que tem grande responsabilidade perante a sociedade e o mundo, podendo e devendo se atualizar para que cumpra sua profissão com maestria e dignidade, embora, lamentavelmente, muitas vezes não seja correspondido ou valorizado à altura de sua importância.

Desse modo, acreditamos que os pesquisadores e/ou professores da Educação Básica, principalmente na área de Educação Matemática, precisam estar atualizados e munidos de metodologias que possam corroborar no sentido de que venham contribuir com pesquisas/propostas objetivando possíveis melhorias nos processos de ensino e de aprendizagem.

Uma vez concebida e vista como metodologia de pesquisa, a Engenharia Didática apresenta-se como uma grande aliada em investigações na área de Educação Matemática, como é o caso deste nosso trabalho.

Segundo Artigue (1996, *apud* PAIS, 2008, p. 104):

> A engenharia didática, vista como metodologia de pesquisa, se caracteriza, em primeiro lugar, por ser um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino.

Nesta investigação, o professor-pesquisador utilizou-se das duas primeiras fases da Engenharia Didática, bem como esteve na iminência do início da terceira fase (aplicação da sequência didática).

3.2.1 Fases da Engenharia Didática

De acordo com Pais (2008) as fases de uma Engenharia Didática são: análises preliminares; concepção e análise *a priori;* aplicação de uma sequência didática; análise a posteriori e a avaliação (validação).

Ainda segundo Pais (2008), na análise preliminar são realizadas as inferências cabíveis, "tais como levantar constatações empíricas, destacar concepções dos sujeitos envolvidos e compreender as condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada" (PAIS, 2008, p. 101).

Nessa primeira etapa da Engenharia Didática (análise preliminar), procuramos em nossa pesquisa realizar um apanhado de verificações baseadas em constatações empíricas, observáveis pelo professor-pesquisador *in loco*, isto é, em sala de aula, no Laboratório de Matemática (LABMAT) e no Laboratório de Informática (LABINFOR) da escola onde o professor – pesquisador leciona Matemática em sala de aula. As percepções dos alunos foram levadas em conta, bem como foi almejado o entendimento das reais condições onde ocorreu a pesquisa.

Segundo Pais (2008) a etapa da *concepção e análise a priori* consiste na definição de um certo número de variáveis de comando do sistema de ensino que supostamente interferem na constituição do fenômeno. O objetivo da análise *a priori* é determinar quais são as variáveis escolhidas sobre as quais se torna possível exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a apreensão dos conceitos em questão (PAIS, 2008).

A construção de uma sequência didática é uma etapa importante da engenharia didática. Assim, é de suma importante ressaltar do que é formada uma sequência didática. “Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas (*sessões*) planejadas a analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática” (PAIS, 2008, p. 102). Ressalte-se que o registro da sequência didática deve ser fiel a realidade em que foi realizada (PAIS, 2008). Neste e em qualquer outro trabalho se faz necessário ser fidedigno com os fatos, a fim de que não haja discrepâncias quanto aos procedimentos metodológicos e a realidade encontrada.

Conforme Pais (2008, p. 103): “A *fase da análise a posteriori* refere-se ao tratamento das informações obtidas por ocasião da aplicação da sequência didática, que é a parte efetivamente experimental da pesquisa”. Esperamos que este trabalho possa ser utilizado na prática, em sala de aula, por professores de Matemática do Ensino Médio. Assim, poderemos obter mais resultados quanto a esta pesquisa, e realizar, então, uma possível confrontação entre os dados, com vistas a uma eventual validação desses resultados.

De acordo com Pais (2008, p. 103): “No caso da engenharia didática, a *validação* dos resultados é obtida pela confrontação entre os dados obtidos na análise *a priori* e *a posteriori*, verificando as hipóteses feitas no início da pesquisa”. Supomos que os resultados venham ser validados, em possíveis práticas por outros docentes, visto que os estudos preliminares desta pesquisa apontaram dados que parecem robustos e confiáveis, embora reconheçamos que temos que primar por adaptações pertinentes e cabíveis, bem como em ser cautelosos e vigilantes quanto ao envelhecimento das situações no ensino (BROUSSEAU, 2008).

No entanto, conforme pretendíamos neste projeto, nos atemos até as duas primeiras etapas (análises preliminares; concepção e análise *a priori*) da ED, pois nosso intento é, quem sabe assim, eventualmente poder contribuir com os professores de Matemática e gerar um potencial à aprendizagem dos estudantes de modo que venham ter uma visão positiva em relação à Matemática, em especial aos números complexos.

As outras duas fases – aplicação de uma sequência didática e análise a posteriori e a avaliação (validação) – poderão ser realizadas num eventual futuro projeto que poderá dar prosseguimento a este, sendo de maior envergadura.

4 ANÁLISES E DISCUSSÕES – ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo, os estudos preliminares são discutidos e analisados, sendo provenientes das duas primeiras etapas da Engenharia Didática (ED), a saber, a análise preliminar ou prévia e concepção e análise *a priori*. No entanto, é importante destacar que não ensejamos validar as hipóteses desta investigação, uma vez que a análise a posteriori ainda não foi realizada, mas que se constitui em uma possibilidade de trabalho que poderá dar continuidade a este estudo.

Ao identificar problemas referentes ao ensino e a aprendizagem concernentes aos números complexos, estamos procedendo com atividades no âmbito das análises preliminares (ALVES, 2014). Assim, procedimentos referentes a análise prévia podem ser observados ao longo deste trabalho, em especial nos capítulos 1, 2, 3 e 4. No âmbito das construções das situações e análise *a priori*, isso pode ser observado também ao longo deste trabalho, em especial no capítulo 4 e no capítulo 5 - quando apresentamos nosso produto educacional, que entre outros elementos, sugere leituras e discussões de, pelo menos, um texto introdutório acerca dos assuntos (conteúdos matemáticos) visados na situação.

Por se tratar de um trabalho que envolve estudantes e professores, fazemos questão de expressar também a importância da leitura para melhor compreender os termos utilizados no projeto, como números reais, números imaginários etc. Alguns podem não distinguir, por exemplo, real e imaginário. Além disso, é possível que muitos venham relatar que não têm o hábito de ler, nem livros, jornais, etc., muito menos livros ou textos científico-tecnológicos ou sobre Matemática.

Daí, podem surgir algumas perguntas: quais os motivos dessa falta de leitura? dessa aversão a literatura matemática, científico-tecnológica? Será pela falta de estímulos ou de material na escola? Provavelmente não, pois, nas escolas hoje em dia, há uma considerável gama de livros, jornais, revistas que os alunos têm acesso, seja biblioteca da escola, seja na biblioteca pública do município; além de projetos variados dentro e fora da escola, mesmo que não haja um número expressivo de exemplares específicos daquelas áreas. Será pela falta de uma cultura leitora, provocada pelos vícios de utensílios eletrônicos modernos, como a televisão, a internet, MP3, MP4, etc.? Será que os livros e autores que temos à nossa disposição não são bons, a ponto de seus conteúdos serem inacessíveis à nossa compreensão? Enfim, são várias discussões, cujas análises estão além dos objetivos desta obra, e poderão ser, casualmente, objeto de outro futuro trabalho de pesquisa.

Porém, para compreender um texto, certamente faz-se necessário concentração e dedicação de quem está lendo. É preciso a realização de um esforço pessoal. Observe o que Freire (2013, p. 35) nos ensina:

> A compreensão do que se está lendo, estudando, não estala assim, de repente, como se fosse um milagre. A compreensão é trabalhada, é forjada, por quem lê, por quem estuda... . Por isso mesmo, ler, estudar, é um trabalho paciente, desafiador, persistente. Não é tarefa para gente demasiado apressada ou pouco humilde que, em lugar de assumir suas deficiências as transfere para o autor ou autora do livro, considerado como impossível de ser estudado.

Isto é válido principalmente para textos matemáticos, devido a especificidade da linguagem e do rigor científico. Consideramos a importância de a pessoa que aspira ser, pelo menos, um bom usuário da Matemática, seja um apreciador da literatura matemática e ainda participar de atividades que possam instigar à leitura e, assim, estar bem informado para tomar decisões promissoras.

Reconhecidamente, estamos vivendo numa época em que os jovens, praticamente, nascem, crescem e se desenvolvem em ambientes com alto grau de uso de tecnologias, notadamente aquelas com a utilização de hardwares e softwares.

Nesse contexto, nota-se que os adolescentes estão imersos num mundo cujos espaços estão sendo preenchidos e modificados, numa velocidade vertiginosa nunca antes vista pela humanidade, acarretando mudanças nos mais variados tipos na sociedade, onde “O desenvolvimento científico e tecnológico acelerado impõe à escola um novo posicionamento de vivência e convivência com os conhecimentos capaz de acompanhar sua produção acelerada” (BRASIL, 2013).

Observem atentamente o que dizem as contribuições expostas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica:

> É preciso reconhecer que a escola se constitui no principal espaço de acesso ao conhecimento sistematizado, tal como ele foi produzido pela humanidade ao longo dos anos. Assegurar essa possibilidade, garantindo a oferta de educação de qualidade para toda a população, é crucial para que a possibilidade da transformação social seja concretizada. Neste sentido, a educação escolar, embora não tenha autonomia para, por si mesma, mudar a sociedade, é importante estratégia de transformação, uma vez que a inclusão na sociedade contemporânea não se dá sem o domínio de determinados conhecimentos que devem ser assegurados a todos (BRASIL, 2013, p. 167).

Os ambientes escolares, em particular as salas de aula, através dos professores (que neste nosso trabalho são os da disciplina de Matemática do Ensino Médio de escola pública, embora a sequência didática proposta nesta pesquisa possa servir como alternativa a ser também utilizada por professores da rede particular de ensino) com apoio da equipe de gestão (direção, coordenação etc.) e demais integrantes da comunidade escolar, precisam acompanhar o ritmo de desenvolvimento das tecnologias.

Faz-se necessário, numa perspectiva inovadora e com prudência e pudor educacional, saber utilizar as chamadas tecnologias da informação e comunicação (TIC) da melhor forma possível, de maneira que possa contribuir no oferecimento de um ambiente escolar propício e agradável aos jovens estudantes, no qual professores tenham mais opções qualitativas em suas práxis, onde também a aprendizagem venha, eventualmente, ser beneficiada em prol do desenvolvimento do educando.

Ressalte-se ainda que as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica apontam o seguinte:

> A apropriação de conhecimentos científicos se efetiva por práticas experimentais, com contextualização que relacione os conhecimentos com a vida, em oposição a metodologias pouco ou nada ativas e sem significado para os estudantes. Estas metodologias estabelecem relação expositiva e transmissivista que não coloca os estudantes em situação de vida real, de fazer, de elaborar. Por outro lado, tecnologias da informação e comunicação modificaram e continuam modificando o comportamento das pessoas e essas mudanças devem ser incorporadas e processadas pela escola para evitar uma nova forma de exclusão, a digital. (BRASIL, 2013, p. 167).

Nessa perspectiva, acreditamos que o uso de tecnologias no ensino de Matemática deve ser fomentado, de maneira que nas aulas possam ocorrer utilizações e integrações entre os mais variados tipos de tecnologias, como desde os habituais pincéis (ou giz), lousa (quadro negro ou branco) até os mecanismos de aplicações científicas mais sofisticados como, por exemplo, máquinas virtuais, computadores (hardwares) e programas computacionais (softwares).

Contudo, não estamos afirmando e nem defendendo que o uso de materiais tidos como tradicionais, como por exemplo, pincéis, lousa, sejam abolidos das salas de aula. Absolutamente! Todavia, as novas tecnologias podem contribuir nesses ambientes educativos.

Assim, defendemos, com prudência e sabedoria, o uso racional e saudável de tecnologias de modo que estas sejam aliadas de professores e alunos nos processos de ensino e de aprendizagem nas mais diversas áreas, inclusive Matemática, e, nesta área, em especial no ensino de números complexos.

Por conseguinte, cremos que a tecnologia pode proporcionar, novas formas de abordagem dos assuntos a serem trabalhados em sala de aula, além de propiciar diferentes possibilidades de exploração, fomentando uma eventual melhor prática docente. Ou seja, o uso do software GeoGebra pode permitir um aumento do número de possibilidades de abordagens de conteúdos matemáticos, até porque esse software foi programado nesse sentido, conforme assinalado anteriormente.

Especificamente neste trabalho, durante as análises preliminar e *a priori*, foram utilizados computadores disponíveis tanto no Laboratório de Informática (LABINFOR), como também no Laboratório de Matemática (LABMAT) da escola que serviu como ambiente de pesquisa.

O software utilizado foi o GeoGebra, uma vez que é um software livre e pode ser baixado gratuitamente em todos os computadores do LABINFOR e do LABMAT. Além dos laboratórios supracitados, também utilizamos o GeoGebra na própria sala de aula, no transcorrer das aulas de Matemática concernentes ao ensino do conjunto dos números complexos.

Ao ouvirem de seus professores que existem raízes quadradas de números negativos, muitos jovens, porventura, mostram-se inquietos, alguns não aceitam tal ideia, pois "aprenderam" em séries anteriores que não existem tais raízes no campo dos reais. E que isso agora é possível com números chamados, de forma não apropriada, de *imaginários*, formando um outro conjunto numérico com um nome mais uma vez historicamente utilizado de maneira inadequada: conjuntos dos números *complexos*. Tal reação, não foi diferente nesta investigação com os alunos envolvidos.

As palavras *imaginários* e *complexos*, lamentavelmente utilizadas no decorrer da história, podem provocar nos alunos a falsa ideia de que os números assim denominados não existem, uma vez que são tomados como sendo não reais, no sentido de não de existirem numa realidade, sem implicações para o dia-a-dia das pessoas, na natureza, no mundo real.

Segundo Miles (1993, *apud* PAIVA, 2013), referindo-se ao matemático alemão Carl Friederich Gauss (1777 – 1855), que com o apoio da intepretação geométrica contribuiu fortemente e decisivamente para a aceitação dos números complexos dentro da própria Matemática, "Ele observa também que as unidades 1, – 1, $\sqrt{-1}$ não fossem chamadas de positiva, negativa e imaginária, mas direta, inversa lateral, as pessoas não teriam tido a impressão de que há algo de misterioso nesses números" (MILES, 1993, *apud* PAIVA, 2013, p. 273).

O tema da existência de um objeto pode-se tornar em algo que está além dos objetivos deste trabalho, com discussões de cunho filosófico, matemático e de outras correntes de pensamento. Entretanto, sobre a questão de existirem numa realidade os elementos constitutivos do conjunto dos números complexos, ainda de acordo com Miles (1993, *apud* PAIVA, 2013, p. 273):

> A observação de Gauss a respeito da *existência objetiva* dos números complexos ilustra a visão da Matemática na época. Parece que o fato de esses números poderem ser representados geometricamente lhes dá essa existência. Em outras palavras, parece que, para os matemáticos daquele período, os entes geométricos tinham um tipo de realidade que faltava aos objetos da aritmética.

Assim, ao realizarmos uma tentativa de possibilidade de ensino dos números complexos com uso do GeoGebra, por meio de uma sequência didática proposta neste trabalho, fomentamos a visualização e a interpretação geométrica desses números, podendo eventualmente contribuir para aceitação, hoje em dia, pelos alunos desses números, indicando que os tais existem e que são bastante úteis na resolução de problemas e com aplicações em diversas áreas.

Conforme defendido pela TSD de Brousseau (2008), espera-se acerca dos comportamentos dos estudantes, que estes venham relatar uma mudança quanto a forma de ver a Matemática; externem que a Matemática, em particular o conjunto dos números complexos, pode ser muito útil em várias situações do dia-a-dia. Essa modificação de um conjunto de comportamentos apontará que a sequência didática aqui proposta pode favorecer de modo proveitoso o processo de aprendizagem.

Mas, o que pode caracterizar um processo de aprendizagem? De acordo com Brousseau (1975, *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 31):

> Um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificações de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos.

Assim, ao primar pelo bom ensino dos números complexos, desenvolvemos e propomos ao longo desta pesquisa situações didáticas que detém a possibilidade de provocar modificações nos comportamentos dos alunos, de maneira que tal modificação seja característica da aquisição de novos conhecimentos (ALMOULOUD, 2007).

Espera-se que alguns dos estudantes, que porventura apresentavam uma certa “aversão” à Matemática, tratando-a como uma matéria sem sentido, possam considerá-la com mais apreço, dada a compreensão daquilo que se estará estudando em sala de aula.

Acreditamos, então, que esta proposta de ensino dos números complexos com o uso do GeoGebra, instigando a visualização e as interpretações geométricas desses números e das operações em $\mathbb{C}$, pode eventualmente contribuir para criar e/ou proporcionar um ambiente de aprendizagem do referido assunto matemático.

5 O PRODUTO EDUCACIONAL

Neste capítulo, realizamos uma breve explanação sobre diferenças entre o mestrado acadêmico e o mestrado profissional, versamos sobre do que se trata uma sequência didática, além de apresentar um Produto Educacional que poderá ser utilizado efetivamente em sala de aula por professores de Matemática do Ensino Médio.

O presente trabalho encontra-se na área do Ensino, sendo uma das exigências para a conclusão de um Mestrado Profissional, a saber, o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UFC. Ressaltamos que o Mestrado Profissional da Área de Ensino é de natureza distinta em relação ao Mestrado Acadêmico, conforme alerta a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES[10] (2016) em vários documentos, como, por exemplo, sobre as ORIENTAÇÕES PARA APCN[11] 2016.

Sobre o Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Moreira e Nardi (2009, p. 2) também advertem que "é uma nova proposta de pós-graduação strictu sensu. Não é uma adaptação, ou variante, de propostas já existentes. Não é um mestrado mais simples; é diferente, isso sim." As orientações da CAPES (2016) e essas contribuições de Moreira e Nardi (2009) ajudam a desfazer a ideia falaciosa de que o Mestrado Profissional é mais simples do que o Acadêmico. Não se trata de um ser mais complexo ou não em relação ao outro. Contudo, a questão que se revela é que são mestrados distintos, de escopos e programas diferentes.

Ainda de acordo com as orientações da CAPES (2016), em um Mestrado Profissional deve-se ter o cuidado de originar um produto ou procedimentos de ensino visando, possivelmente, contribuir com os processos de ensino e de aprendizagem. Assim, fomenta-se a confecção de processos ou produtos educacionais, de maneira que estes possam ser concebidos e desenvolvidos em condições efetivas de ensino em sala de aula, ou em outros espaços, sejam eles formais ou não-formais na área do ensino.

[10] A CAPES é uma fundação do Ministério da Educação (MEC) do Brasil, com atuação em todos os estados de nosso país.

[11] APCN – APLICATIVO PARA PROPOSTAS DE CURSOS NOVOS. Disponível em: <http://www.capes.gov.br/images/documentos/Criterios_apcn_2016/Criterios_APCN_Ensino.pdf>. Acesso em: 11/08/2016.

Referindo-se ao trabalho de conclusão e ao produto educacional de um Mestrado Profissional, Moreira e Nardi (2009, p. 4) trazem o seguinte esclarecimento: "O mestrando deve desenvolver, por exemplo, alguma nova estratégia de ensino, uma nova metodologia de ensino para determinados conteúdos, um aplicativo, um ambiente virtual, um texto; enfim, um processo ou produto de natureza educacional." Ao pensar em desenvolver o produto educacional, tivemos essa preocupação de atentar para que nosso trabalho trouxesse uma estratégia diferenciada das tradicionalmente efetuadas em sala de aula (que usam apenas lousa e giz ou pincel, quando existentes), sem desmerecê-las ou abandoná-las, uma vez que ainda utilizamos tais materiais.

Nesse sentido, em nosso trabalho utilizamos uma nova metodologia de ensino apoiada nos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD). Diga-se de passagem, tal metodologia foi muita bem recebida pelos professores de Matemática lotados na escola onde se desenvolveu o trabalho, conforme indica uma pesquisa direta realizada com os mesmos (vide capítulo 5 Considerações Finais).

Apresentamos uma nova estratégia de ensino, propondo uma abordagem dos números complexos apoiada no uso de um aplicativo – o GeoGebra. O texto sugerido é uma proposta que pode ser adequada tendo em vista fatores pedagógicos e didáticos, de acordo com as condições e/ou necessidades ou intenções didáticas de cada sistema educacional, de modo que o nosso Produto Educacional "possa ser disseminado, analisado e utilizado por outros professores", conforme defendem Moreira e Nardi (2009, p. 4).

Contudo, qual (is) é (são) a (s) forma (s) que esse produto educacional pode assumir? Segundo Moreira e Nardi (2009, p. 4) "Este produto pode ter a forma de um texto sobre uma sequência didática, um aplicativo, um CD, um DVD, um equipamento." Por seu turno, as orientações da CAPES (2016) apontam que, de acordo com os campos da Plataforma Sucupira[12], os produtos educacionais podem ser categorizados em: 1. Desenvolvimento de material didático e instrucional; 2. Desenvolvimento de produto (páginas de internet etc.); 3. Desenvolvimento de Aplicativos; 4. Desenvolvimento de técnicas (Equipamentos etc.); 5. Cursos de curta duração e atividades de extensão; 6. Outros produtos como produções artísticas, produtos de comunicação e divulgação científica e cultural (programa de rádio e TV etc.).

---

[12] Plataforma utilizada para coleta de informações, realização de análises e avaliações, servindo de base de referência do Sistema Nacional de Pós-Graduação (SNPG). Mais informações sobre a Plataforma Sucupira podem ser obtidas em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/>. Acesso em 14/08/2016.

Assim sendo, o Produto Educacional que resulta deste trabalho é um conjunto de situações didáticas organizadas em um **Caderno de Atividades** que traz em seu âmago *uma Sequência Didática (SD) sobre algumas possibilidades para se abordar os números complexos com o uso do GeoGebra*. Dentre as categorias supracitadas, esse nosso Produto Educacional pode encontrar harmonia na categoria sobre "Desenvolvimento de material didático e instrucional", pois em consonância com as orientações da CAPES (2016) este tipo de produto traz uma proposta de ensino com sugestões de atividades no âmbito de uma sequência didática (SD), bem como pode ser encarado como um texto que trata de uma SD, conforme os esclarecimentos de Moreira e Nardi (2009).

5.1 Sequência Didática

Uma Sequência Didática (SD) é uma sequência de atividades propostas pelo professor ao (s) aluno (s), dentro de um ambiente educativo munido de elementos didáticos, numa conjuntura de intenções didáticas (uma delas refere-se ao ensinamento de determinado assunto), onde os conhecimentos são instrumentos utilizados para preservar e/ou alcançar um estado favorável ao sujeito aprendiz, primando-se pela aprendizagem do aluno. Podemos dizer, grosso modo, que SD é um conjunto de situações didáticas.

Pereira, Santiago e Morais (2015, p. 119) nos esclarecem que uma Sequência Didática "é o conjunto de atividades conectadas, delineadas para ensinar um determinado conteúdo, passo a passo, estruturada e ajustada com os objetivos que estão sendo propostos pelo professor de modo a alcançar a aprendizagem de seus alunos." Notamos a primazia pela aprendizagem discente, isto é, não é uma simples sucessão de atividades, sem preocupações com desempenho do aluno. É algo notadamente elaborado intencionalmente pelo professor com vistas a colaborar para que o aluno aprenda.

Conforme Teixeira e Passos (2013, p. 162, *apud* PEREIRA; SANTIAGO; MORAIS, 2015, p. 120):

> Uma sequência didática é uma série de situações que se estruturam ao longo de uma quantidade prefixada de aulas. Devidamente estruturadas, essas situações têm como objetivo tornar possível a aquisição de saberes bastante claros, sem esgotar o assunto trabalhado. Desse modo, uma sequência didática não pode, a priori, ter seu tempo de duração estipulado de acordo com o programado, pois o seu cumprimento leva em conta as necessidades e as dificuldades dos alunos durante o processo.

Assim, é importante considerar, sem atropelos, as diferentes situações da sequência didática, dando-se relevância também ao tempo de ocorrências das mesmas, bem como obstáculos que possam surgir durante o processo, de maneira que sejam, possivelmente, propiciadas as efetivas condições que eventualmente favoreçam a aprendizagem do sujeito.

O nosso Caderno de Atividades (Produto Educacional), como o próprio nome sugere, compõe-se de atividades propostas aos professores de Matemática da Educação Básica, bem como outros profissionais de espaços formais ou não-formais de ensino, de maneira que possam, eventualmente, utilizar em suas respectivas salas de aulas. Tais atividades formam a sequência didática aqui proposta.

Assim, as atividades propostas são constituídas de situações didáticas, onde em cada uma delas é construída uma situação – problema[13], na qual sua principal função, segundo Almouloud (2007, p. 174), "é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões colocadas pelos alunos no momento da resolução do problema." Para a estruturação das situações-problemas, algumas características devem ser asseguradas, conforme Almouloud (2007, p. 174):

> - Os alunos entendem facilmente os dados do problema e podem se engajar na resolução, usando seus conhecimentos disponíveis.
> - Essas situações devem colocar em jogo um campo conceitual que se deseja efetivamente explorar e no qual o conhecimento está inserido.
> - Os conhecimentos antigos dos alunos são insuficientes para a resolução completa do problema.
> - Os conhecimentos, objeto de aprendizagem, são as ferramentas que devem ser mobilizadas, em última instância, para obter a solução final.

Para o autor, as situações-problemas são construídas no sentido de propiciar ao aprendiz que este utilize seus próprios conhecimentos, onde o aluno compreende as regras e o objetivo do jogo. Além do que, as situações oferecerem condições nas quais os conhecimentos sejam usados, finalmente, como recursos para alcançar a solução requerida.

No entanto, nas situações propostas a seguir, os alunos necessitam conhecer determinados conhecimentos básicos sobre números complexos. Daí a importância de levar em consideração "os resultados dos estudos prévios e permitir aos alunos desenvolver certas competências e habilidades" (ALMOULOUD, 2007, p. 174). Segundo o autor, algumas dessas

---

[13] Concordando com Almouloud (2007, p. 174), "Entendemos por situação-problema a escolha de questões abertas e/ou fechadas numa situação mais ou menos matematizada, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber e de conhecimentos".

habilidades referem-se a saber ler, interpretar e utilizar diferentes formas de representações matemáticas, de modo a desenvolver o raciocínio dedutivo (ALMOULOUD, 2007).

Nesse cenário, o professor exerce a função de mediador no processo, oferecendo orientações com intervenções que "devem ser feitas de maneira a não prejudicar a participação do aluno no processo de aprendizagem" (ALMOULOUD, 2007, p. 175). O aluno, por si próprio, num processo investigativo e reflexivo de acordo com seus conhecimentos, tem a responsabilidade de adquirir novos conhecimentos.

Ainda de acordo com Almouloud (2007, p. 175):

> Para garantir, minimamente, o alcance desses objetivos, o pesquisador ou construtor dessas situações-problemas necessita escolher as variáveis didáticas que podem provocar as mudanças desejadas, no que diz respeito ao processo de ensino e de aprendizagem do objeto matemático em jogo.

Dessa forma, Almouloud (2007) pondera ser necessário o pesquisador/construtor ter o cuidado de, ao serem construídas as situações, escolher as devidas variáveis didáticas que podem auxiliar ao professor em algum tipo de controle. Em relação as variáveis didáticas, a pesquisadora francesa Artigue (1996, *apud* PAIS, 2008), aponta as *variáveis macrodidáticas (globais)*, referentes ao fenômeno geral da engenharia; e as *variáveis microdidáticas (locais)*, concernentes a organização local de uma sessão (aula) ou fase da Engenharia Didática (ED).

Assim, as variáveis microdidáticas (ou locais) que consideramos na construção da sequência didática aqui proposta são: acessibilidade tecnológica; habilidades quanto ao uso da tecnologia (hardwares – computadores, *smartphones*; software – GeoGebra) e assuntos (conteúdos matemáticos) referentes as atividades propostas.

Partindo dos estudos da análise preliminar da ED e na tentativa, com muito empenho, de alcançar a finalidade de responder às questões elencadas nessa fase e os objetivos deste trabalho, elaboramos e propomos a sequência didática (SD) a seguir. Para cada situação didática, temos os seguintes elementos essenciais: a identificação, a estrutura e a sugestão de aplicação. Na identificação, tem-se o tema, o objetivo da situação da SD e o conteúdo matemático a ser desenvolvido. Já na estrutura, temos os elementos que constituem a situação didática e que são necessários para a implementação da mesma (recursos materiais e os conhecimentos prévios), bem como uma apresentação de pelo menos uma situação-problema. Por sua vez, quanto a (s) sugestão de aplicação, existem propostas para a realização efetiva das atividades, com dicas que podem beneficiar quando do manuseio de materiais e eventualmente colaborar para um desenvolvimento satisfatório da situação.

Lembramos que o tema concernente a sequência didática aqui proposta, refere-se ao conjunto dos números complexos - ℂ, cujos assuntos são passiveis de abordagem na Educação Básica, em escolas de Ensino Médio (BRASIL, 2014).

Assim, ao longo das situações descritas, consideramos importante a realização de leituras e discussões de textos sobre os assuntos correlatos aos números complexos nas situações propostas. Na tabela 1, tem-se os temas e os conteúdos de cada situação da sequência didática proposta.

Tabela 1 - Temas e conteúdos das situações da sequência didática.

Situação A	**Tema:** O conjunto dos números complexos.	**Conteúdo:** Representação geométrica do conjunto ℂ.
Situação B	**Tema:** Adição de números complexos.	**Conteúdo:** Soma de dois números complexos.
Situação C	**Tema:** Diferença de números complexos.	**Conteúdo:** Diferença de dois números complexos.
Situação D	**Tema:** Multiplicação de números complexos.	**Conteúdo:** Multiplicação de dois números complexos.
Situação E	**Tema:** Movimentos no plano: rotação, uma primeira aplicação.	**Conteúdo:** Rotação e números complexos (Parte I).
Situação F	**Tema:** Movimentos no plano: rotação, uma segunda aplicação.	**Conteúdo:** Rotação e números complexos (Parte II).
Situação G	**Tema:** Divisão de números complexos.	**Conteúdo:** Divisão de dois números complexos.
Situação H	**Tema:** Movimentos no plano: translação.	**Conteúdo:** Translação e números complexos.
Situação I	**Tema:** Movimentos no plano: homotetia.	**Conteúdo:** Homotetia e números complexos.

Fonte: Produção nossa.

As **situações didáticas** com seus respectivos detalhamentos **encontram-se no apêndice A deste trabalho**. Tais situações, dependendo do nível do aluno ou da turma, podem ser realizadas não necessariamente na ordem que se segue, sendo possível o uso de acordo com o interesse do professor e/ou do sistema educacional. Ademais, os textos sobre números complexos podem ser obtidos através de várias fontes, como, por exemplo, este material, livros didáticos, sites na internet, revistas etc.

Ressaltamos que as referidas situações da sequência didática aqui proposta, devem acontecer, quando do seu efetivo exercício em sala de aula ou outro ambiente de ensino, de acordo com os pressupostos teóricos/metodológicos da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e da Engenharia Didática de Michele Artigue.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho se refere a uma proposta de abordagem dos números complexos com o uso do GeoGebra, sendo realizado de acordo com os princípios da TSD e da ED, onde elaboramos e propomos um produto educacional (vide capítulo 5) para que possa, possivelmente, ser utilizado por outros professores em condições reais de ensino em sala de aula.

Nesse sentido, como a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a Engenharia Didática (ED) são provenientes de pesquisadores franceses e, de certa forma, são recentes as publicações sobre TSD e ED no Brasil, realizamos uma investigação direta com os professores de Matemática lotados na escola onde o professor pesquisador também ministra aulas. Percebemos que todos os professores responderam que não conheciam a TSD. Assim, foi bastante oportuno e salutar fazer uma divulgação junto aos docentes daquela escola acerca da TSD, suas origens, exemplo de pesquisas que versam sobre a TSD, pesquisadores, pressupostos teóricos, possíveis contribuições etc.

Efetuamos outra indagação junto aqueles professores, agora para averiguar se conheciam a Engenharia Didática (ED). Os resultados estão no gráfico a seguir. Notamos que 100% dos referidos professores também alegaram não conhecer a ED. Esperamos que tanto os professores da escola envolvida no trabalho como outros docentes de Matemática de outros espaços formais ou não-formais de ensino, possam não somente conhecer a TSD e a ED, como, eventualmente, utilizarem em possíveis pesquisas e em suas práticas docentes, na efetiva atuação em sala de aula.

Os professores de Matemática lotados na escola onde o professor pesquisador ministra aulas, também revelaram que até conhecem o software GeoGebra, mas que não o utilizam com frequência em suas atividades, nem fora, tampouco dentro de suas respectivas salas de aula, exceto um professor que alegou ter utilizado em um ano letivo anterior.

Por conseguinte, este trabalho traz uma produção técnica/tecnológica na área de Ensino, em particular em Ensino de Matemática, concernente aos números complexos, constituindo-se em um produto educacional que possa oportunamente ser utilizado por professores, especialmente da Educação Básica, estudantes de licenciaturas em Matemática, bem como outros profissionais de espaços formais ou não-formais.

Reconhecidamente, os desafios na área educacional na contemporaneidade são tão gritantes que é preciso ter cautela para não se iludir com soluções “miraculosas” sem fundamentos sólidos que não trazem em seu bojo resultados promissores e muito menos sinalizam nesse sentido.

Muitos educadores podem até serem persuadidos por aqueles que, por exemplo, creditam no uso de tecnologias como sendo a salvação para todos os problemas e percalços que assolam o cenário educacional. Uma falácia! Com todo respeito a esses bitolados por tecnologias, acreditamos que estas podem sim ajudar professores e alunos, colaborando em ações que possam sinalizar melhorias para os processos de ensino e de aprendizagem. Mas, dizer que o uso das TIC’s é a única solução para os anseios e problemas que afligem a área educacional, certamente isso não enverada por caminhos proveitosos. Países com estimados índices em Educação, em especial na disciplina de Matemática, em avaliações de larga escala, como o PISA, utilizam sim tecnologias no ensino, mas não da forma como alguns cegamente defendem. O uso de hardwares (por exemplo, comutadores) e softwares (por exemplo, aplicativos) é importante? Sim, mas isso não é tudo. Acreditamos no elemento humano, na formação humana, onde o uso de tecnologias pode sim ser efetuado em prol do desenvolvimento humano.

Concernente a disciplina de Matemática, esse contexto se (falar sobre calculadora, computadores etc..). O tema conjunto dos números complexos – $\mathbb{C}$ contém assuntos que podem ser ministrados no decorrer das aulas da disciplina de Matemática na Educação Básica, em escolas de Ensino Médio, conforme apontam documentos oficiais do Ministério da Educação de nosso país, como, por exemplo, o Guia de livros didáticos - PNLD 2015 (BRASIL, 2014), entre outros. Ressalte-se ainda que não estamos propondo, nem apoiamos, abolir o livro didático nas aulas, uma vez que, no caso da maioria das escolas públicas, o livro didático pode ser um grande aliado nos processos de ensino e de aprendizagem e constitui-se numa conquista que foi adquirida com muito esforço ao longo dos últimos anos, pelo empenho de vários educadores e pela sociedade brasileira, em um de seus clamores em prol de uma educação de qualidade.

Cremos que a aprendizagem significativa se dá quando o sujeito aprendiz tem consciência do assunto em questão que é passível de aprendizagem, sabe o que é, conhece o porquê e o para que serve tal assunto, tem consciência de como se deu e como se dá os processos de ensino e de aprendizagem, além de saber se posicionar como discente e encontra-se numa situação tal que, mediante os acordos firmados no contrato didático (BROUSSEAU, 2008), assume e pratica a sua própria responsabilidade na construção dos conhecimentos.

Ressalte-se ainda que a participação efetiva do aluno nas atividades é de suma importância. Não basta apenas o professor mostrar aos discentes, por exemplo, as representações geométricas ou gráficas no GeoGebra. Santos (2012, p. 134), defende que: "É importante que o aluno compreenda, após vivenciar as possibilidades de representação gráfica que deve fazer seus próprios esboços, a partir de modelos que estejam diante de seus olhos, sejam paisagens, figuras, imagens, objetos quaisquer". Desse modo, a autora alerta para o fato de que o aluno precisa participar ativamente das atividades propostas. Não é interessante que o aluno seja um mero expectador nas situações. Ele deve assumir sua responsabilidade no decorrer dos processos de ensino e aprendizagem, conforme defendido pela TSD de Brousseau (2008).

Acreditamos que a abordagem dos números complexos com o uso de tecnologias digitais (neste caso, o software GeoGebra), onde é fomentada a visualização e a interpretação geométrica desses números, fundamentada nos princípios da TSD de Brousseau (2008), pode eventualmente beneficiar o seu ensino. Isto foi sinalizado nesta pesquisa, conforme apontam os estudos preliminares efetuados durante a análise preliminar e a análise a priori da ED (ARTIGUE, 1996, *apud* PAIS, 2008). Esperamos que este trabalho possa ter continuidade, a fim de que posteriormente ocorram as duas outras fases da ED quais sejam a aplicação da sequência didática e a análise a posteriori e a avaliação (validação).

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Sado Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Curitiba, PR: Editora UFPR, 2007.

ALVES, Francisco Regis Vieira. **Engenharia Didática no contexto de transição do Cálculo e os Registros Representação Semiótica**. Disponível em: <https://www.academia.edu/5297607/ENGENHARIA_DID%C3%81TICA_NO_CONTEXTO_DE_TRANSI%C3%87%C3%83O_INTERNA_DO_C%C3%81LCULO_E_OS_REGISTROS_DE_REPRESENTA%C3%87%C3%83O_SEMI%C3%93TICA>. Acesso em 31/05/2015.

ALVES, Francisco Regis Vieira. **Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análises preliminares e *a priori*. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia - R. B. E. C. T.**, vol 7, núm. 3, set-dez.2014. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1554/1935>. Acesso em: 09/06/2016.

ALVES, Francisco Regis Vieira. **História da Matemática: semestre V**- Coordenação Cassandra Ribeiro Joye. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2011.

AMORIM, Tânia Mara. **O estudo dos números complexos no ensino médio: uma abordagem com a utilização do GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos - São Carlos: UFSCar, 2015.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**/ Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. – Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLD 2015: matemática: ensino médio**. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

BRASIL. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. **(Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2.)** – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros Curriculares Nacionais**. **Ensino Médio** (Parte III). Brasília: MEC/SEMT, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 18/06/2015.

BRASIL. MEC/SEF. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CALDEIRA, Cláudia Rosana da Costa. **O Ensino dos Números Complexos numa Perspectiva Histórica: de Tartaglia ao Uso das TICs.** PPG Ensino de Matemática – UFRGS. Disponível em:

<http://matematica.ulbra.br/ocs/index.php/ebrapem2012/xviebrapem/paper/viewFile/459/377>. Acesso em 03/10/2014.

CAMARGO, Mara Viviane da Silva Pellegrinello; VRIESMAN, Teresa Cristina. **A EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS: HISTÓRIA E APLICAÇÕES.** Revista Tuiuti: Ciência e Cultura. Curitiba, 2012.

CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria – Números Complexos**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CERRI, Cristina; MONTEIRO, Martha S. **História dos Números Complexos**. CAEM - Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática-Instituto de Matemática e Estatística da USP. São Paulo, 2001.

CHAGAS, Alexandre Silva das. Dissertação de mestrado PROFMAT. **O GeoGebra como ferramenta de auxílio no ensino de vetores no Ensino Médio**. INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA: Rio de Janeiro, 2014.

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR. Diretoria de Avaliação. **ORIENTAÇÕES PARA APCN 2016**. Disponível em:< http://www.capes.gov.br/images/documentos/Criterios_apcn_2016/Criterios_APCN_Ensino.pdf >. Acesso em: 11/08/2016.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 2a. reimp. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

FERREIRA, Maria Suele Fonsêca. **Uma análise dos questionamentos dos alunos nas aulas de números complexos.** Dissertação (Mestrado) -Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática-Centro de Ciências Exatas e da Terra-UFRN. Natal, 2006.

FREIRE, Paulo. **Professora sim, tia não.** São Paulo: Paz e Terra, 2013.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

INSTITUTO GEOGEBRA NO RIO DE JANEIRO. **O que é o GeoGebra?** Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>. Acesso em: 18/06/2015.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v.3.

LIMA, Elon Lages. *et al.* **A Matemática do Ensino Médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v.3.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no Plano**. 5 ed. Rio Janeiro: SBM, 2005.

LIMA, Elon Lages. *et al*. **Exames de Textos:** Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, Elon Lages. **Revista do Professor de Matemática** – volume 41, Rio de Janeiro: SBM, 2001.

MACHADO, N. J. *et al*. **Caderno do Professor de Matemática** – 3ª série – Volume 2, SEE, São Paulo, 2009.

MILIES, Francisco César Polcino. **A Introdução dos Números Complexos.** São Paulo: USP, 2008. Disponível em: <http://www.matematica.br/historia/complexos.html>. Acesso em 05/10/2014.

MOREIRA, M. A.; NARDI, R. **O mestrado profissional na área de Ensino de Ciências e Matemática: alguns esclarecimentos**. **Revista Brasileira de Ensino, Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 3, set./nov. 2009.

NEVES, Robson Coelho. Dissertação de mestrado PROFMAT. **Aplicações de Números Complexos em Geometria**. INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA: Rio de Janeiro, 2014.

O´MALLEY, John. **Análise de circuitos**. – 2. ed. – São Paulo: Makron *Books*, 2014.

PAIS, Luis Carlos. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa**. – 2. ed. 2a. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. – 2.ed. – São Paulo: Moderna, 2013.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SANTIGAGO, Laura Andrade; MORAIS, Wendy Mesquita de. **O uso de episódios históricos no ensino de Matemática**: uma sequência didática utilizando quadrinhos. *In*: PEREIRA, Ana Carolina Costa; CEDRO, Wellington Lima (Orgs). **Educação matemática**: diferentes contextos, diferentes abordagens. – Fortaleza: EdUECE, 2015.

PINTO JUNIOR, Ulício. **A História dos números complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro -- Rio de Janeiro: UFRJ / Programa de Pós - Graduação em Ensino de Matemática, 2009.

SANTOS, Maria José Costa dos. **Geometria e simetria nas rendas de bilro**: contribuições para a Matemática escolar/Maria Jose Costa dos Santos. –NATAL, RN, 2012. 195 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Programa de Pós-Graduação em Educação. Linha de Pesquisa: Educação Matemática, sob a orientação do Professor Dr. Iran Abreu Mendes.

SAVIANI, Demerval. **História das ideias pedagógicas no Brasil**. - 2.ed.rev e ampl. – Campinas, SP: Autores Associados, 2008.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL

CADERNO DE ATIVIDADES COM UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA (SD) - UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS COM O USO DO GEOGEBRA

José Gleisson da Costa Germano

APRESENTAÇÃO

O presente Produto Educacional é um **Caderno de Atividades** que traz em seu âmago *uma Sequência Didática (SD) acerca de uma abordagem dos números complexos com o uso do GeoGeobra*. Esse Produto Educacional pode encontrar harmonia na categoria sobre "Desenvolvimento de material didático e instrucional", em consonância com as orientações da CAPES (2016), pois este tipo de produto traz uma proposta de ensino com sugestões de atividades no âmbito de uma Sequência Didática (SD), bem como pode ser encarado como um texto que trata de uma SD, conforme os esclarecimentos de Moreira e Nardi (2009).

Ressaltamos que esta nova estratégia de ensino, propondo uma abordagem dos números complexos apoiada no uso de um aplicativo – o GeoGebra, onde o texto sugerido não é inflexível, não é uma "camisa de força". Porém, é uma proposta que pode ser adequada conforme vários fatores, de acordo com as condições e/ou necessidades ou intenções didáticas de cada sistema educacional, de modo que o nosso produto educacional "possa ser disseminado, analisado e utilizado por outros professores", conforme defendem Moreira e Nardi (2009, p. 4).

Em vez de se utilizar *apenas* do uso convencional de giz (ou pincel) e lousa nas aulas, este trabalho propõe a utilização do GeoGebra (um software de matemática dinâmica) no transcorrer das aulas de Matemática, cujo objeto em questão são os números complexos, dando-se destaque aos seguintes itens: representação geométrica do conjunto dos números complexos - $\mathbb{C}$, operações em $\mathbb{C}$ e movimentos no plano (translação, homotetia e rotação). Em todas as situações didáticas aqui propostas, devem ser observados os pressupostos teóricos/metodológicos da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e da Engenharia Didática de Michele Artigue.

SUMÁRIO

1 SITUAÇÃO A

IDENTIFICAÇÃO

Tema: O conjunto dos números complexos.

Conteúdo Matemático: Representação geométrica do conjunto ℂ.

Objetivo: Essa atividade a propõe a levar o aluno a definir e interpretar geometricamente um número complexo.

ESTRUTURA: Nessa situação são necessários os seguintes elementos:

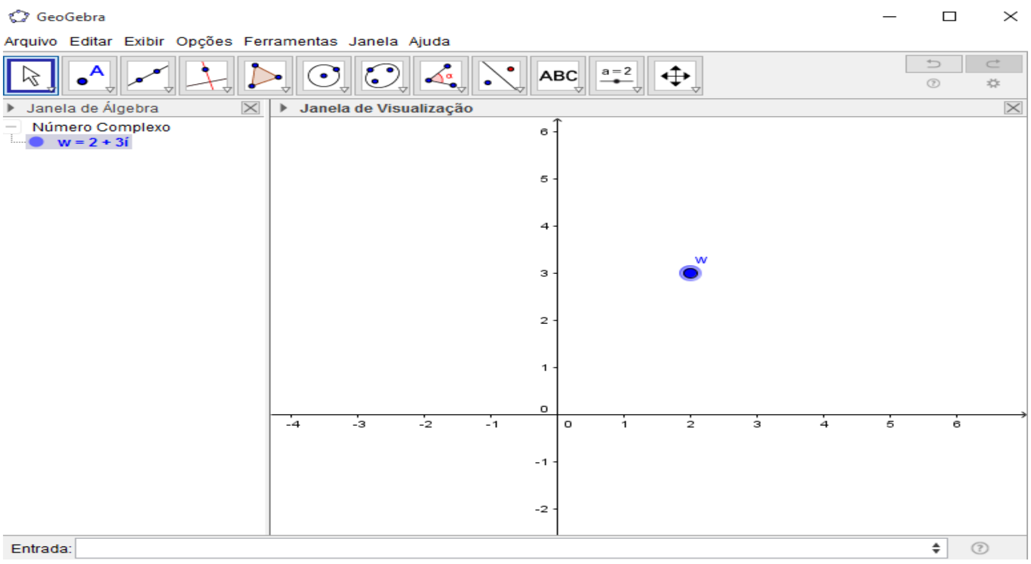
(1) Recursos materiais: texto introdutório sobre o conjunto ℂ; acesso a um computador ou smartphone com o software GeoGebra instalado;

(2) Conhecimentos Prévios: sistema de coordenadas retangulares, pares ordenados; conhecimentos básicos de uso do software.

Situação proposta: Representar geometricamente o conjunto dos números complexos.

SUGESTÃO DE APLICAÇÃO: O professor deve iniciar a sessão promovendo uma leitura e discussões de um texto sobre o assunto. Em seguida, deve apresentar como os números complexos podem ser alocados no GeoGebra, conforme a figura 3. A escolha do texto deve potencializar a História da Matemática como recurso didático de contextualização do tema.

Figura 3 - Inserindo o número complexo w = 2 + 3i no GeoGebra através da "caixa de Entrada".

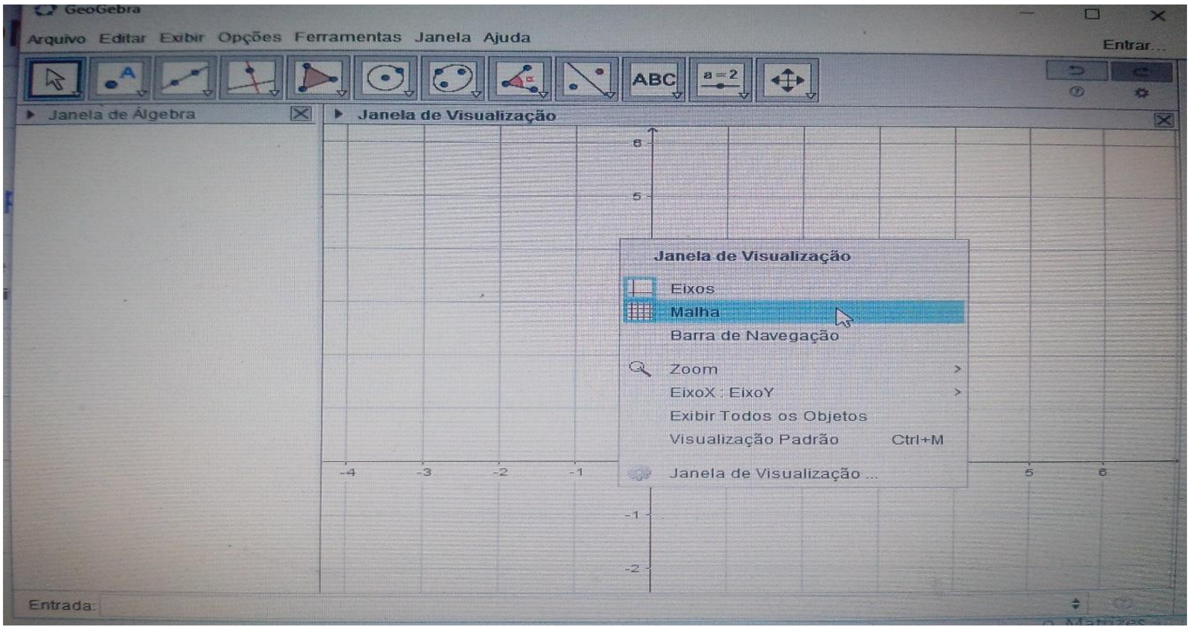


Fonte: Produção nossa.

Conforme apresentado na figura acima, na “caixa de Entrada” pode-se, normalmente, digitar, por exemplo, w = 2 + 3i, depois apertar a tecla “enter” e, então, aparece o ponto W (2,3) na Janela de Visualização e o objeto w = 2 + 3i na Janela de Álgebra do GeoGebra. Por conseguinte, pode proporcionar que alunos sejam inseridos nas situações de ação, formulação e de validação, conforme apregoado pela TSD de Brousseau (2008).

Na **situação de ação** espera-se que os alunos possam agir diretamente com o software, introduzindo números complexos e, dessa forma, propiciando a “visualização” dos pares ordenados referentes a esses números no plano de coordenadas retangulares, que pode ser facilmente visto com ou sem a Malha na figura abaixo. Para obter ou desfazer essa malha quadriculada, pode posicionar o mouse na Janela de Visualização, clicar com o botão direito no mouse e escolher a opção Malha.

Figura 4 – Inserir ou desfazer malha quadriculada no GeoGebra.

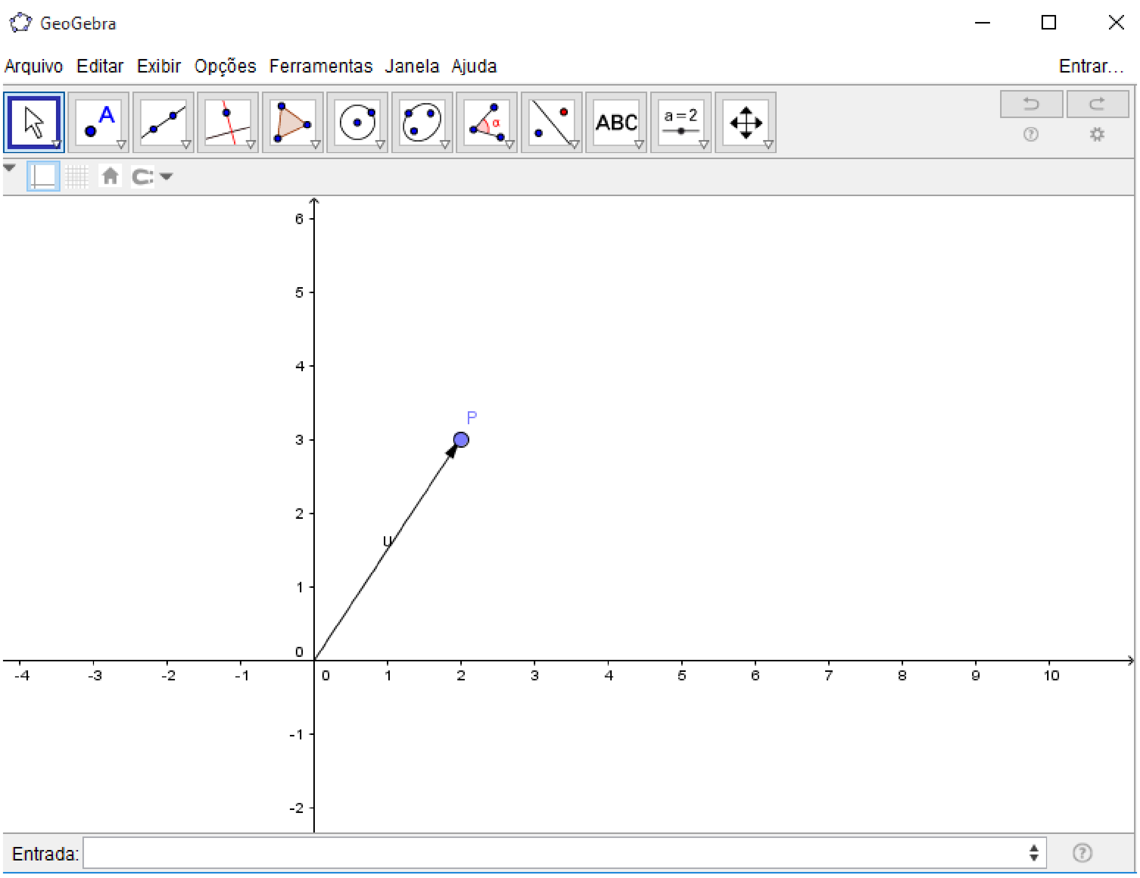


Fonte: Produção nossa.

Durante a **situação de formulação**, os alunos podem ser distribuídos em grupos, onde em cada um destes grupos tem-se pelo menos um aluno que pode ficar observando os demais que estão em situação de ação e assim, realizar registros, anotações, observações sobre os procedimentos daqueles discentes. Então, devem ocorrer comunicações entre os alunos, de modo que haja clareza em suas formulações, pois para conseguir resultados satisfatórios nas atividades não basta que um aluno saiba apenas como se faz, é preciso saber comunicar-se com outros colegas sobre suas estratégias, com vistas a externar que de fato está agindo na situação, não sendo um mero espectador.

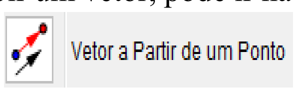
Na fase de formulação os alunos trocam ideias, informações entre si, de modo que “descobrem a importância de discutir e definir estratégias” (BROUSSSEAU, 2008, p. 24). Espera-se que os alunos venham associar um número complexo z = *a* + *b*i como o ponto (*a*, *b*) do plano cujas coordenadas são *a* e *b*. Além disso, conforme defendem Carmo, Morgado e Wagner (2005) é admissível que os alunos possam verificar que o complexo z pode ser representado pelo vetor $\overrightarrow{Oz}$, ou seja, o complexo *z* = a + bi pode ser pensado como um vetor (segmento de reta orientado) cuja origem é a origem do plano cartesiano e com extremidade (a, b), conforme mostrado no exemplo da figura 5.

Figura 5 - Número complexo u = 2 + 3i associado ao vetor $\overrightarrow{OP}$.



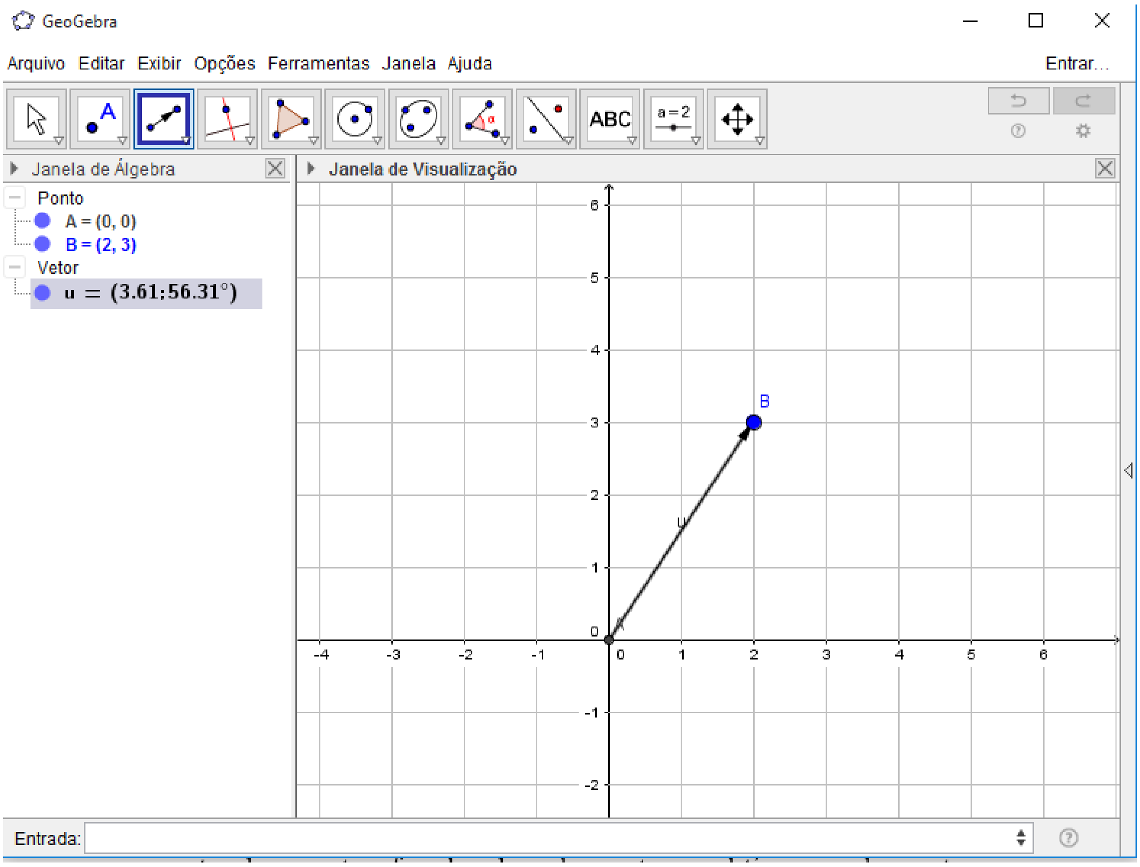
Fonte: Produção nossa.

Na figura 5 acima os alunos podem perceber que o ponto P (2, 3) é a imagem ou afixo do número complexo u = 2 + 3i. Para exibir um vetor, pode ir na “Barra de Ferramentas” do GeoGebra e clicar em: 

ou 

Pode ainda digitar na “caixa de Entrada” a palavra “vetor” e aparecer várias opções sobre vetores. Além do que, é possível exibir na Janela de Álgebra do GeoGebra as chamadas coordenadas polares desse complexo, ou seja, o módulo e o argumento. Para tanto, pode direcionar o mouse no vetor *u* e clicar com o botão direito na opção “Coordenadas Polares”. Assim, teremos o que se visualiza na figura 6 abaixo, isto é, o módulo de u é 3,61 unidades de comprimento e o seu argumento principal é de 56,31°.

Figura 6 - Número complexo u = 2 + 3i associado ao vetor $\overrightarrow{AB}$.



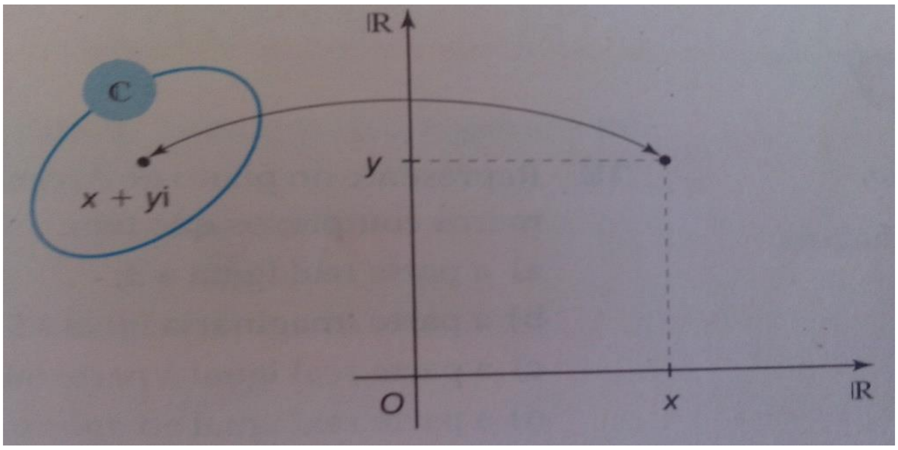
Fonte: Produção nossa.

Dando prosseguimento, segue-se a **situação de validação**, onde os alunos além de trocarem ideias, procuram validar seus posicionamentos através da exposição de seus enunciados em demonstrações, a fim de eventualmente convencer os demais colegas da veracidade ou não de suas estratégias ou dos outros alunos.

Na **situação de institucionalização**, o professor pode realizar esclarecimentos sobre dúvidas ou questionamentos sobre o assunto que ainda pairavam incertezas ou fatos desconexos com os constructos matemáticos estabelecidos histórico e epistemologicamente e formalizando e institucionalizando conhecimentos que detém o reconhecimento e importância cultural e que são tidos como saberes a serem adquiridos e/ou construídos.

Assim, espera-se que o professor institucionalize o fato de que, sendo x e y números reais quaisquer, cada ponto determinado pelo par de números reais (x, y) do plano do sistema de coordenadas está associado a um único número complexo, e cada complexo associa-se a um único ponto do plano considerado. Dessa forma, tem-se uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos e o conjunto de pontos do plano cartesiano. Então, por meio dessa associação biunívoca, representa-se geometricamente o conjunto $\mathbb{C}$ pelo plano, que é denominado **plano de Argand – Gauss**[14] ou **plano complexo**.

Figura 7 – Plano complexo ou Plano de Argand – Gauss.



Fonte: (PAIVA, 2013, p. 149).

O conjunto dos números complexos pode ser definido como um conjunto de pares ordenados de números reais onde estão definidas:

Igualdade: (a, b) = (c, d) $\Leftrightarrow$ a = c e b = d

Adição: (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)

Multiplicação: (a, b) · (c, d) = (ac – bd, ad + bc)

---

[14] **Carl Friedrich Gauss** (1777 – 1855) – matemático alemão com contribuições em vários ramos da Matemática e em outras áreas científicas, como a Física; principal matemático de sua época, também é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos e alguns o chamam de “o príncipe dos matemáticos” (EVES, 2007). **Jean Robert Argand** (1768 – 1822) – matemático francês.

Assim, um número complexo qualquer (a, b) pode ser expresso como

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1).$$

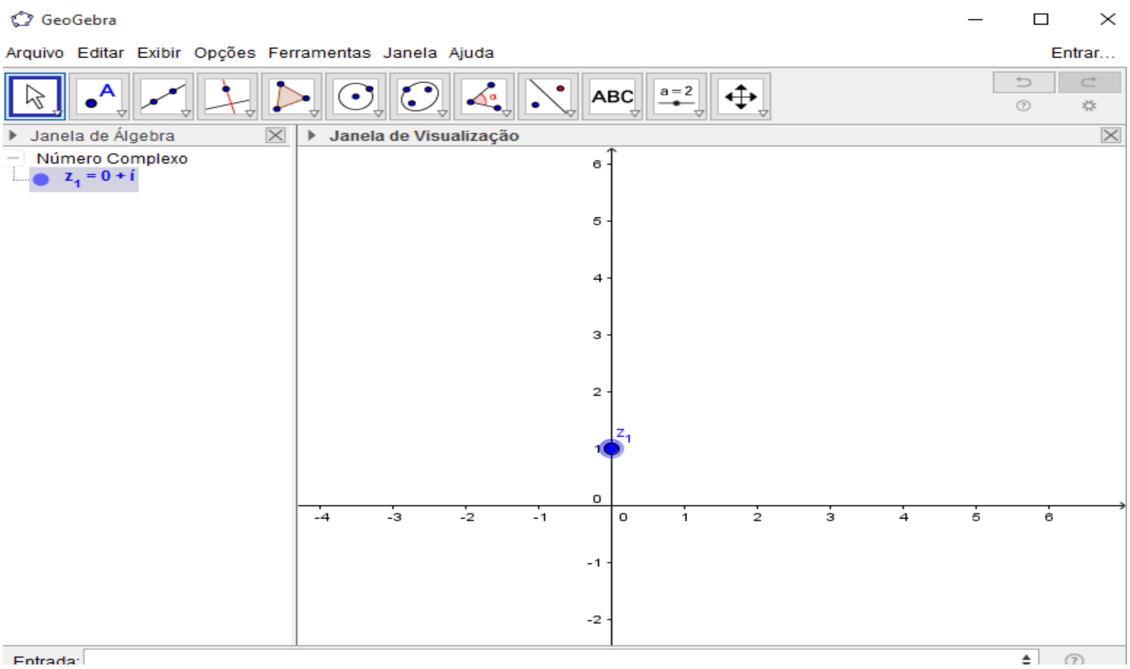
O par ordenado (0, 1) é representado pela letra i, cuja denominação é unidade imaginária (PAIVA, 2013). Agora, note com atenção o número complexo i = (0, 1) e observe o seguinte:

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

Não obstante, o par ordenado (- 1, 0) "se identifica com o real – 1!" (FERREIRA, 2013, p. 101). Então, um número complexo do tipo z = (*a*, *b*) pode ser escrito como z = *a* + *b*i, que é a chamada **forma algébrica ou retangular** desse complexo, onde *a* é a parte real de z, indicada por Re (z) = *a;* e *b* é parte imaginária de z, indicada por Im (z) = *b*. Se Re (z) = 0 e Im (z) ≠ 0 diz-se que z é um número *imaginário puro*; se Im (z) ≠ 0 diz-se que z é um número *imaginário*; e se Im (z) = 0 diz-se que z é um número *real*.

No GeoGebra, o número complexo i = (0, 1) pode ser inserido digitando-se diretamente a letra i ou (0,1) na "caixa de Entrada" ou ainda com o comando "Alt + i"; ao dar "enter", aparece na Janela de Álgebra o complexo $z_1 = 0 + i$ e na Janela de Visualização o ponto identificado com o par (0.1), conforme mostra a figura 8.

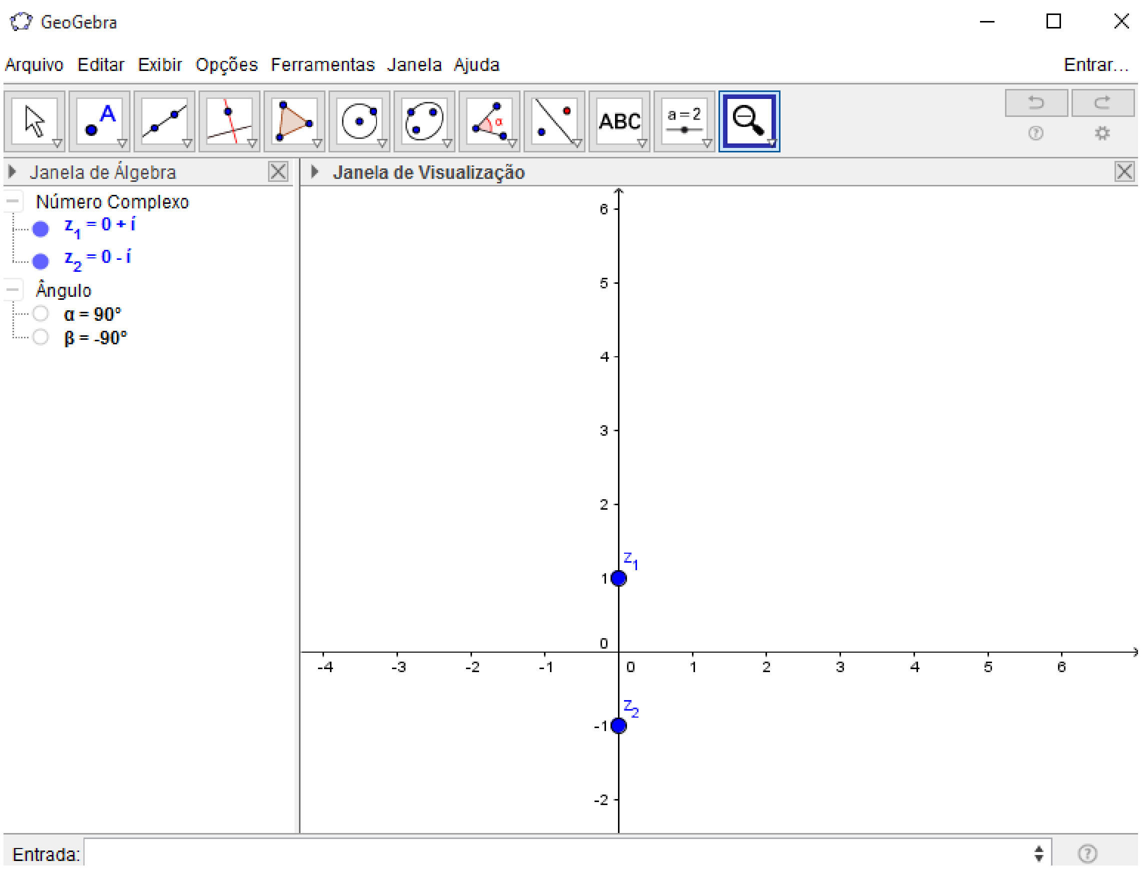
Figura 8 – O número complexo i = (0, 1).



Fonte: Produção nossa.

É importante o professor realizar a seguinte observação: o número complexo i, que alguns livros trazem como i = $\sqrt{-1}$ (LIMA *et al*, 2006), pode ser interpretado geometricamente como um ponto (0,1) e, assim, estando-se relacionado com o ângulo de 90°, ou seja, este valor é ao argumento do complexo i. Isso pode ser visto com mais detalhes na “Situação E” desta SD. No entanto, pode-se digitar na “caixa de Entrada” o comando “arg (<x>)”, que se refere ao argumento[15] de um número complexo, que em relação ao número $z_1 = (0,1) = 0 + i$ seu argumento é 90º. Já em relação ao número $z_2 = (0, -1) = 0 - i$, o argumento é 270º, que no GeoGebra aparece – 90°, por questões de programação do software. Observe a figura 9.

Figura 9 - O argumento do número z_1 = i.



Fonte: Produção nossa.

O professor pode ressaltar o fato de que um número complexo z = x + yi também pode ser representado por um vetor $\overrightarrow{OP}$ = (x, y), sendo O (0,0) a origem do plano complexo e P(x, y) o ponto de coordenadas x e y, conforme indicado na figura &. Essa abordagem vetorial pode trazer vários benefícios no processo de visualização das operações de adição, subtração e

[15] medida de um ângulo α tal que $0 \leq \alpha < 2\pi$, tomado no sentido anti-horário a partir do semieixo positivo Ox do plano complexo com um sistemas de coordenadas xOy.

multiplicação em $\mathbb{C}$, uma vez que tais operações podem ser interpretadas e representadas geometricamente com o auxílio de vetores no plano complexo. (Vide Situações B, C e D desta SD.)

2 SITUAÇÃO B

IDENTIFICAÇÃO

Tema: Adição de números complexos.

Conteúdo Matemático: Soma de dois números complexos.

Objetivo: Efetuar a adição de números complexos na forma algébrica e interpretar geometricamente essa soma.

ESTRUTURA: Nessa situação são necessários os seguintes elementos:

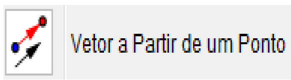
(1) Recursos materiais: texto introdutório sobre a soma de elementos (na forma algébrica) do conjunto $\mathbb{C}$; acesso a um computador ou smartphone com o software GeoGebra instalado;

(2) Conhecimentos prévios: sistema de coordenadas retangulares, operações com pares ordenados; noções sobre vetores no plano; conhecimentos básicos de uso do software.

Situação proposta: Representar geometricamente a soma de dois números complexos.

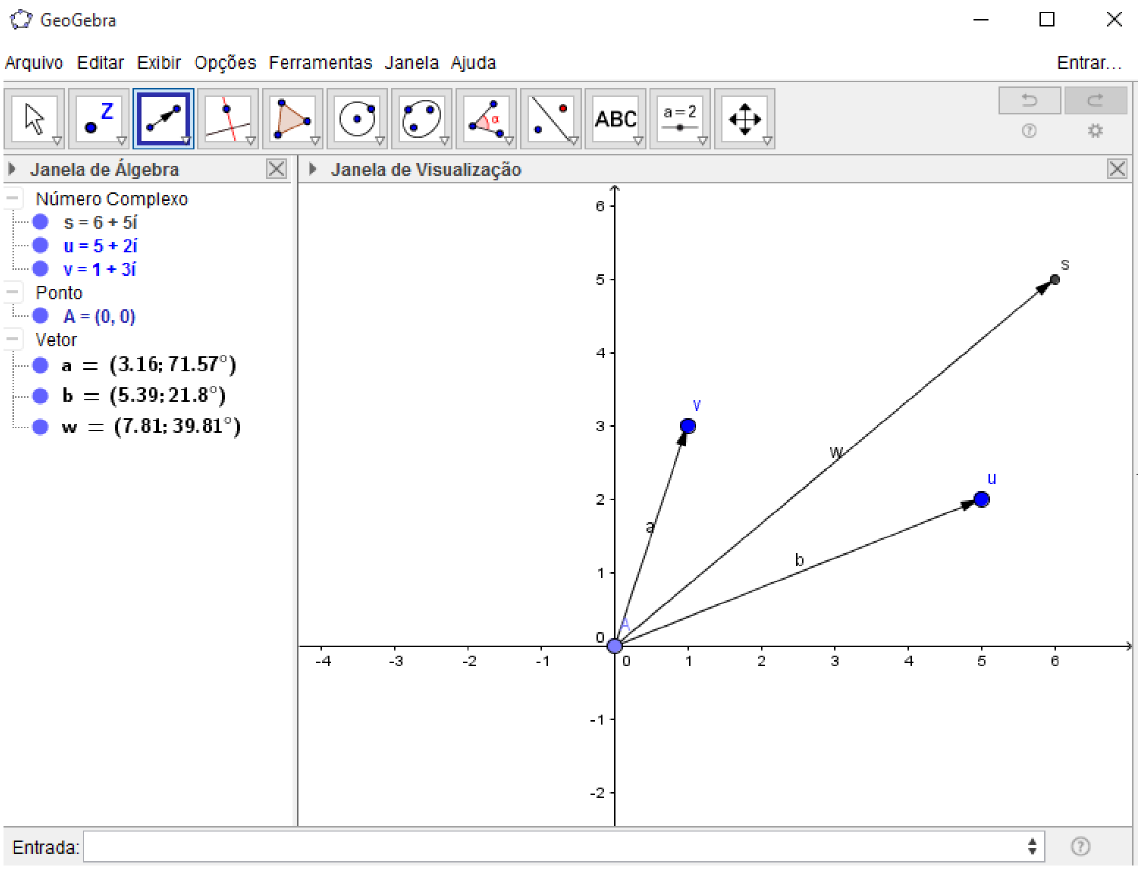
SUGESTÃO DE APLICAÇÃO: O professor deve iniciar a sessão promovendo uma leitura e discussões de um texto sobre o assunto. Em seguida, deve proporcionar que os alunos sejam inseridos nas situações de ação, formulação e de validação, conforme a TSD de Brousseau (2008).

Na **situação de ação**, espera-se que os alunos digitem diretamente na "caixa de Entrada" do GeoGebra números complexos na forma algébrica como, por exemplo, v = 1+ 3i, clicar em "enter", depois u = 5 + 2i, clicar em "enter", em seguida, digitar s = v + u, e apertar a tecla "enter". Assim, aparecerão na Janela de Álgebra os complexos v, u e s, todos na forma algébrica, e na Janela de Visualização os pontos que representam tais números. A seguir, podem ir na "Barra de Ferramentas" do GeoGebra e clicar em 

ou 

Pode ainda digitar na "caixa de Entrada" a palavra "vetor" e aparecer várias opções sobre vetores. Além do que, é possível exibir na Janela de Álgebra do GeoGebra as chamadas coordenadas polares desses complexos, ou seja, o módulo e o argumento. Para tanto, pode direcionar o mouse no vetor em questão e clicar com o botão direito na opção "Coordenadas Polares". O resultado desses procedimentos é o que está na figura 10 abaixo.

Figura 10 - Soma de dois números complexos na forma algébrica no GeoGebra.



Fonte: Produção nossa.

Na **situação de formulação** é possível que os alunos troquem informações entre si, onde pelo menos um dos discentes observa os demais em seus respectivos procedimentos referentes a soma de dois números complexos no GeoGebrae, registra tais observações e socializa isso com os colegas. Nessa fase a comunicação entre os alunos é de grande importância. Além do que, numa perspectiva de situação adidática, cada aluno nessa etapa toma para si a responsabilidade de sua própria aprendizagem.

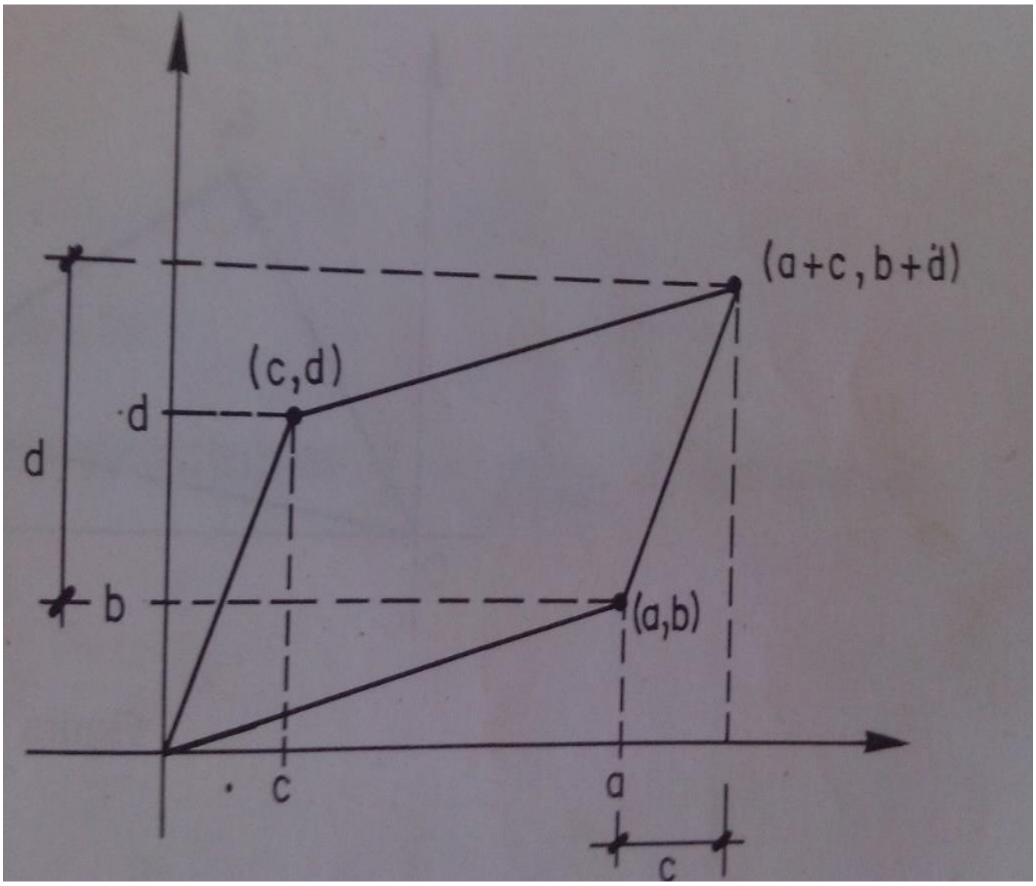
Na **situação de validação**, espera-se que possam levantar enunciados sobre a adição de números complexos, procurando trazer argumentações, demonstrações sobre suas ideias, no sentido de convencer seus colegas sobre a retidão de seus posicionamentos.

Na **situação de institucionalização**, espera-se que o professor venha reforçar a propriedade concernente a soma de números complexos qual seja:

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + b) + (b + di)$$

Assim, conforme apresentado na figura 11, "a soma de dois complexos é representada por um vetor, cujas componentes são as somas das componentes dos vetores dados" (CARMO, MORGADO, WAGNER, 2005, p. 69).

Figura 11 – Soma de dois números complexos representada por um vetor.

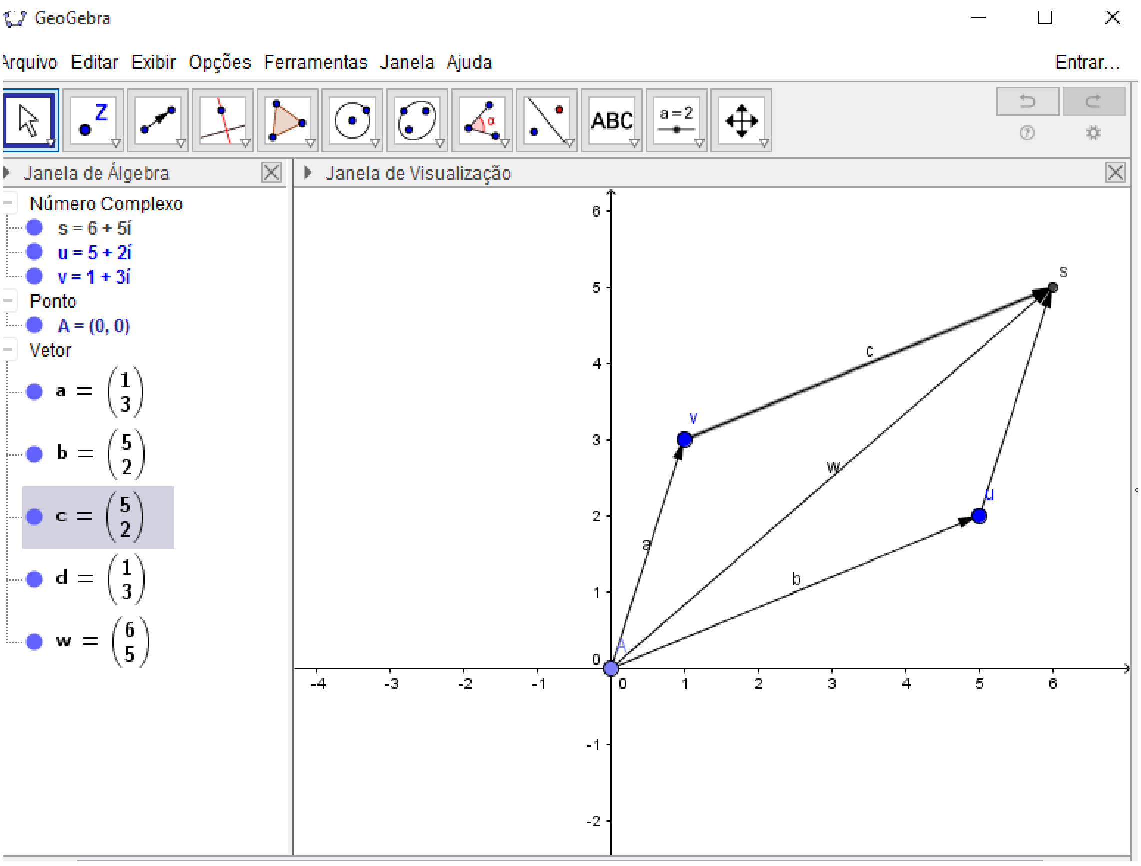


Fonte: (CARMO, MORGADO, WAGNER, 2005, p. 69).

Note que, pela figura, a soma dos dois complexos [(a,b) + (c,d)] é representada geometricamente pela diagonal do paralelogramo construído a partir dos vetores em questão.

Assim, o professor pode, ao aproveitar o possível exemplo construído pelos alunos nas situações anteriores, institucionalizar o fato de que a soma de dois complexos pode ser obtida pela soma dos vetores que os representam (LIMA *et al*., 2006), conforme ilustrado na figura 12 a seguir.

Figura 12 - Soma de dois complexos representada por um vetor no GeoGebra.



Fonte: Produção nossa.

Na figura 12 acima, os números complexos estão no 1º quadrante, mas isso também é possível de ocorrer em quaisquer outros quadrantes. Ademais, perceba que os vetores estão representados na Janela de Álgebra com suas respectivas coordenadas cartesianas. Assim, o vetor a = (1 ,3), por exemplo.

Caso o professor queira expor outros formatos acercas das coordenadas dos vetores no GeoGebra, o docente pode direcionar o mouse na Janela de Álgebra sobre as letras às quais se referem os vetores, com botão direito clicar em "propriedades" e, depois em "Álgebra" e, assim, escolher as opções que lhe forem convenientes quais sejam: "Coordenadas Cartesianas", "Coordenadas Polares", "Número Complexo", "Coordenadas Cartesianas 3D", "Coordenadas Esféricas".

3 SITUAÇÃO C

IDENTIFICAÇÃO

Tema: Diferença de números complexos.

Conteúdo Matemático: Diferença de dois números complexos.

Objetivo: Efetuar a subtração de números complexos na forma algébrica e interpretar geometricamente essa diferença.

ESTRUTURA: Nessa situação são necessários os seguintes elementos:

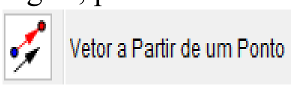
(1) Recursos materiais: texto introdutório sobre a diferença de elementos (na forma algébrica) do conjunto $\mathbb{C}$; acesso a um computador ou smartphone com o software GeoGebra instalado;

(2) Conhecimentos prévios: sistema de coordenadas retangulares, operações com pares ordenados; noções sobre vetores no plano; conhecimentos básicos de uso do software.

Situação proposta: Representar geometricamente a diferença de dois números complexos.

SUGESTÃO (ÕES) DE APLICAÇÃO: O professor pode iniciar a aula promovendo uma leitura e discussões de um texto sobre o assunto. Em seguida, pode proporcionar que os alunos sejam inseridos nas situações de ação, formulação e de validação, conforme expresso pela TSD de Brousseau (2008).

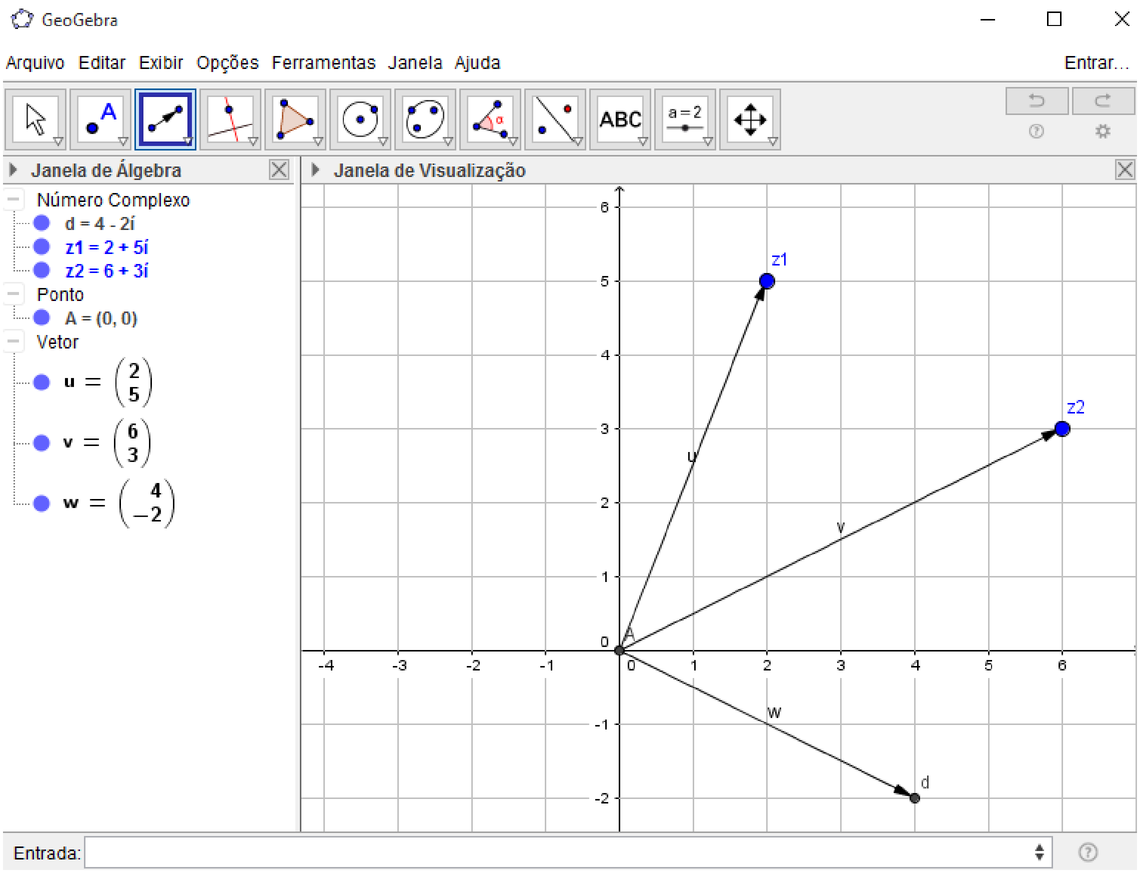
Na **situação de ação**, espera-se que os alunos venham atuar diretamente no software, inserindo na "caixa de Entrada" do GeoGebra, por exemplo, os números complexos $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 6 + 3i$, depois $d = z_2 - z_2$ que, após apertar em "enter", aparecerão na Janela de Álgebra os complexos na forma algébrica e na Janela de Visualização os pontos correspondentes a esses números. A seguir, podem ir na "Barra de Ferramentas" do GeoGebra e clicar em 

ou 

Pode ainda digitar na "caixa de Entrada" a palavra "vetor" e aparecer várias opções sobre vetores. Além do que, é possível exibir na Janela de Álgebra do GeoGebra as chamadas coordenadas polares desses complexos, ou seja, o módulo e o argumento. Para tanto, pode direcionar o mouse no vetor em questão e clicar com o botão direito na opção "Coordenadas

Polares". Se preferir pelas "Coordenadas Cartesianas", clicar nesta opção. Assim, por exemplo, na figura abaixo o vetor $u = (2 \quad 5)$, refere-se ao par ordenado (2, 5), bem como ao número complexo $z_1 = 2 + 5i$.

Figura 13 – Diferença de dois complexos no GeoGebra.



Fonte: Produção nossa.

Na **situação de formulação**, os alunos podem trocar informações entre si, de modo que sejam fomentadas comunicações plausíveis entre eles, além de realizarem registros dos procedimentos e analisando aqueles que supostamente geram melhores resultados para a obtenção das eventuais interpretações geométricas sobre a subtração de números complexos.

Na **situação de validação**, espera-se que os alunos defendam seus respectivos pontos de vista com argumentações convincentes, externando enunciados em demonstrações, de modo tentar validar seus posicionamentos acerca da representação geométrica da diferença de dois complexos.

Na **situação de institucionalização**, o professor pode aproveitar eventuais discussões das situações e institucionalizar saberes sobre a diferença de dois complexos.

Por exemplo, pode externar que, dados dois complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, em que a, b, c e d são números reais, temos:

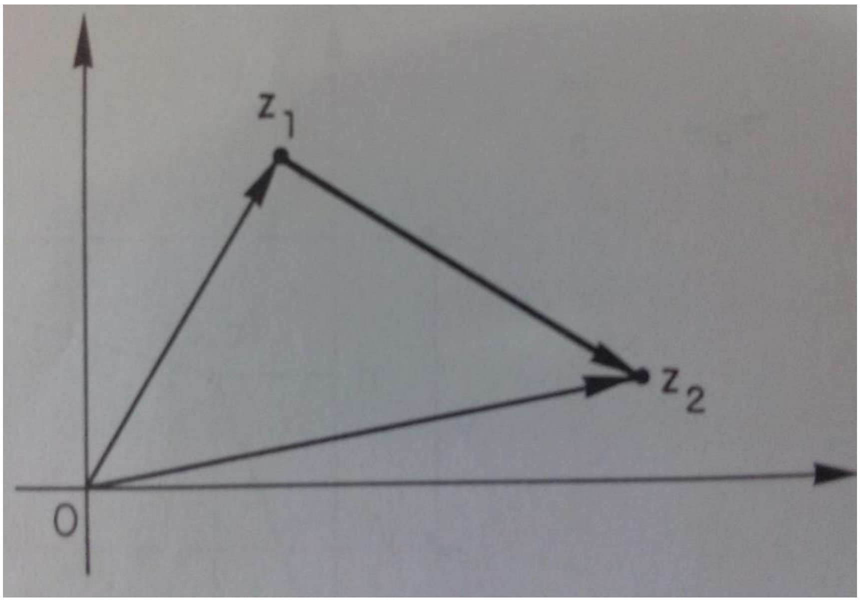
$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

Lembrando que o oposto de complexo qualquer $z = a + bi$, com a e b reais, é o complexo $-z = -a - bi$, vem:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) \\ &= a + bi - (c + di) \\ &= a + bi - c - di \\ &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

Agora, pode frisar a interpretação geométrica da diferença de dois complexos. Observe a figura 14.

Figura 14 – Representação geométrica da diferença de dois complexos.



Fonte: (CARMO, MORGADO, WAGNER, 2005, p. 70).

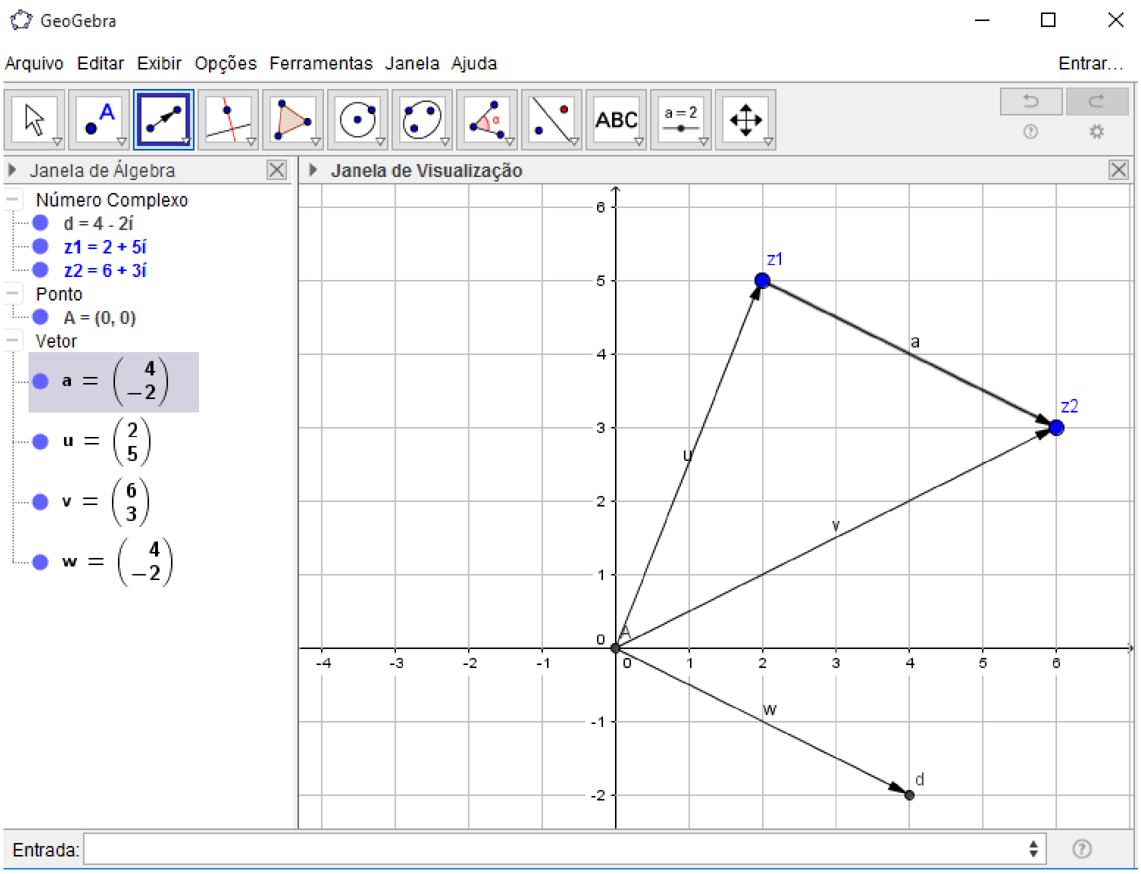
Da figura 14 acima, percebe-se que

$$\overrightarrow{Oz1} + \overrightarrow{z1z2} = \overrightarrow{Oz2} \text{ , isto é,}$$

$$\overrightarrow{z1z2} = \overrightarrow{Oz2} - \overrightarrow{Oz1}$$

Assim, a diferença $z_2 - z_1$ é representada pelo vetor $\overrightarrow{z1z2}$. Agora, observe a figura 15.

Figura 15 – Diferença de dois complexos representada por um vetor no GeoGebra



Fonte: Produção nossa.

Note que, na figura 15 acima, os vetores $a = \overrightarrow{z1z2}$ e $w = \overrightarrow{Ad}$ são iguais , isto é, os segmentos orientados que os representam são equipolentes*. Assim, de fato, a diferença de dois complexos é representada por um vetor, conforme pode-se visualizar com certo dinamismo no GeoGebra. Além disso, o professor ressaltar que na figura 15 acima, os números complexos z_1 e z_2 estão no 1º quadrante, mas isso também é possível de ocorrer em quaisquer outros quadrantes.

* Dois segmentos orientados são chamados equipolentes quando possuem o mesmo sentido, mesmo comprimento e são paralelos ou colineares (mesma direção).

4 SITUAÇÃO D

IDENTIFICAÇÃO

Tema: Multiplicação de números complexos.

Conteúdo Matemático: Multiplicação de dois números complexos.

Objetivo: Efetuar a multiplicação de dois números complexos e interpretar geometricamente esse produto.

ESTRUTURA: Nessa situação são necessários os seguintes elementos:

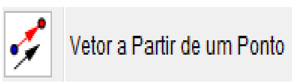
(1) Recursos materiais: texto introdutório sobre o produto de elementos (tanto utilizando pares ordenados como na forma algébrica, bem como na forma trigonométrica) do conjunto $\mathbb{C}$; acesso a um computador ou smartphone com o software GeoGebra instalado;

(2) Conhecimentos prévios: sistema de coordenadas retangulares, operações com pares ordenados; multiplicação de números complexos na forma algébrica; noções sobre vetores no plano; conhecimentos básicos de uso do software.

Situação proposta: Representar geometricamente o produto de dois números complexos.

SUGESTÃO DE APLICAÇÃO: O professor pode iniciar a aula promovendo uma leitura e discussões de um texto sobre o assunto. Em seguida, pode proporcionar que os alunos sejam inseridos nas situações de ação, formulação e de validação, conforme expresso pela TSD de Brousseau (2008).

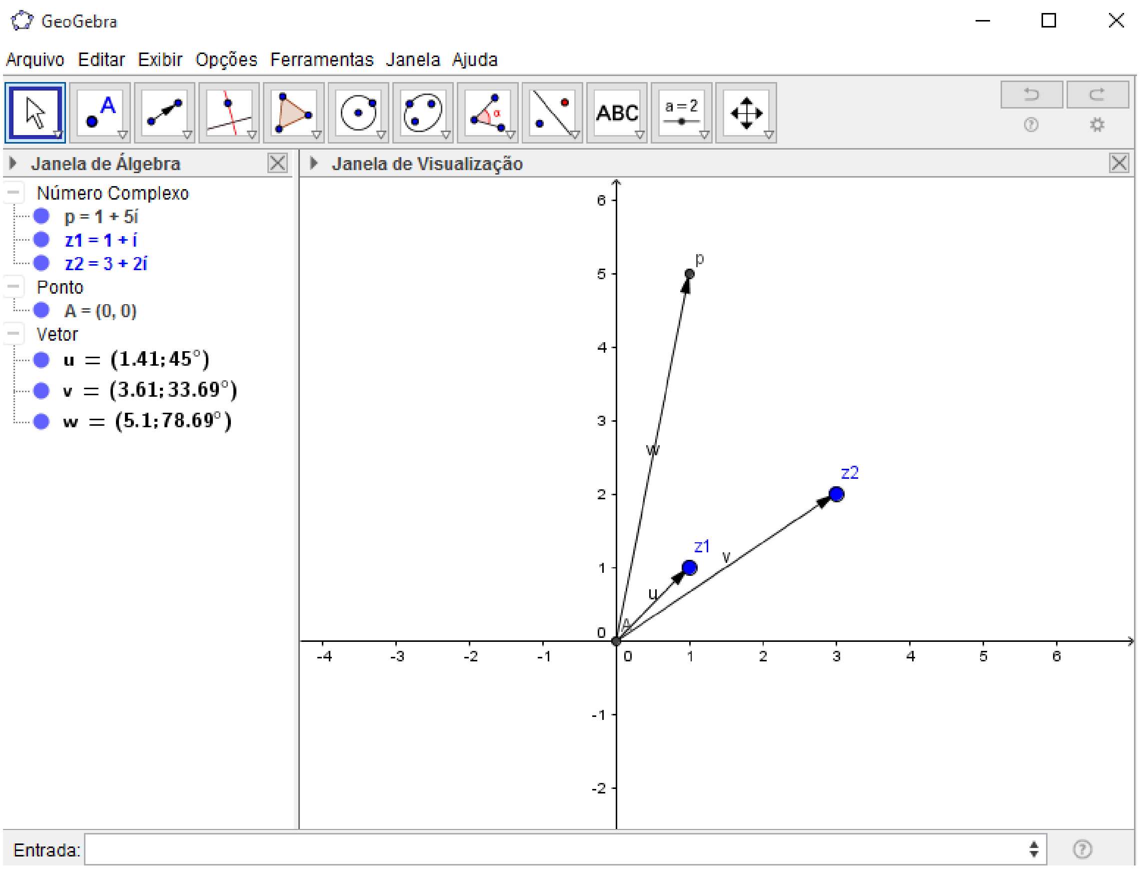
Na **situação de ação**, quanto a multiplicação[16] de dois números complexos, espera-se que os alunos possam inserir diretamente no software números complexos como, por exemplo, $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 + 2i$, depois $p = z_1 * z_2$ que, após apertar em "enter", aparecerão na Janela de Álgebra os complexos na forma algébrica e na Janela de Visualização os pontos correspondentes a esses números. A seguir, podem ir na "Barra de Ferramentas" do GeoGebra e clicar em 

ou 

[16] A multiplicação no GeoGebra pode ser obtida inserindo o símbolo * ("astetisco") na "caixa de Entrada".

Pode ainda digitar na “caixa de Entrada” a palavra “vetor” e aparecer várias opções sobre vetores. Além do que, é possível exibir na Janela de Álgebra do GeoGebra as chamadas coordenadas polares desses complexos, ou seja, o módulo e o argumento. Para tanto, pode direcionar com o mouse no vetor em questão e clicar com o botão direito na opção “Coordenadas Polares”. O resultado desses procedimentos pode ser encontrado na figura 16.

Figura 16 – Multiplicação de dois números complexos no GeoGebra.



Fonte: Produção nossa.

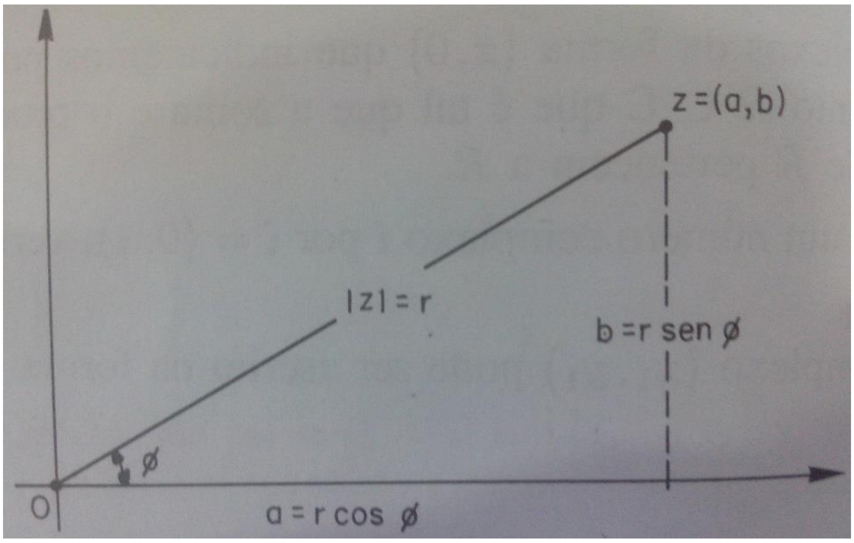
Na **situação de formulação**, espera-se que ocorram, entre os alunos, discussões sobre o assunto em pauta, de maneira que a comunicação entre os discentes seja levada em conta. Podem ocorrer discussões, por exemplo, sobre eventuais ligações entre os resultados obtido pelo produto e os fatores em questão. Isto é, possivelmente o aluno pode perceber que o módulo (comprimento do vetor) do número complexo obtido pelo produto, representado pelo vetor w, é o produto dos módulos dos complexos correspondentes aos vetores u e v. E que o argumento de w é a soma dos argumentos de u e v.

Na **situação de validação**, os alunos podem procurar demonstrar suas observações, seus posicionamentos, através de enunciados convincentes aos colegas, com eventuais argumentações plausíveis. É possível que os alunos possam perceber e mostrar que a multiplicação de números complexos na forma trigonométrica pode ser realizada mais facilmente do que na forma retangular. De repente, os alunos ainda podem perceber que os conhecimentos até o momento utilizados e/ou adquiridos não são suficientes para aniquilar ou minimizar possíveis dúvidas ainda pendentes. Segue, então, a possibilidade de o professor atuar como facilitador do processo de aprendizagem, servindo de mediador nesse processo.

Na **situação de institucionalização**, espera-se que o professor aproveite o ensejo provocado pelas situações e venha institucionalizar conhecimentos sobre o produto de números complexos. Assim, o professor pode frisar o fato de que na forma algébrica (retangular) z = a + bi as coordenadas a e b do ponto z (a, b) estão em destaque.

Agora, uma forma de ressaltar uma interpretação geométrica do produto de números complexos é partir dos destaques dos elementos geométricos do vetor $\overrightarrow{Oz}$, sendo O (0,0) a origem do plano complexo. Vejamos isso a seguir. Na figura 17, tem-se o ângulo ϕ (lê-se “fi”), que é o ângulo positivo xOz; r é o comprimento do vetor $\overrightarrow{Oz}$, como também é o módulo ρ (lê-se “rô”) do número complexo z, sendo r = ρ =$\sqrt{a^2+b^2}$, onde estamos supondo que r ≠ 0.

Figura 17 – Representação dos elementos geométricos r e ϕ do vetor $\overrightarrow{Oz}$.



Fonte: (CARMO, MORGADO, WAGNER, 2005, p. 78).

Na figura 17 acima, com conhecimentos básicos da Trigonometria, sabemos que cos ϕ = $\frac{a}{r}$, ou seja, a = r cos ϕ; e que sen ϕ = $\frac{b}{r}$, isto é, b = r sen ϕ. Assim, temos:

$$z = a + bi = r\cos\phi + r\,\mathrm{sen}\,\phi i$$

$$\therefore \boxed{z = r(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)}$$

A representação $z = r(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)$ é conhecida como a *forma trigonométrica* ou *polar* do número complexo z (LIMA *et al*, 2006; CARMO, MORGADO, WAGNER, 2005). Note que ao substituir ϕ na expressão acima por $\phi + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ (conjunto dos números inteiros), o número complexo z continua o mesmo. Assim, também podemos escrever:

$$z = r(\cos(\phi + 2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(\phi + 2k\pi))$$

Na expressão acima, os valores de $(\phi + 2k\pi)$ são chamados de "os argumentos de z" (CARMO, MORGADO, WAGNER, 2005, p. 79), sendo que "o argumento que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é chamado de argumento principal e é representado por Arg z" (LIMA *et al*, 2006, p. 168).

O professor pode ressaltar que a forma trigonométrica ou polar dos números complexos possibilita uma interpretação geométrica da operação de multiplicação de números complexos (CARMO, MORGADO, WAGNER, 2005), bem como facilita as operações com números complexos, com exceção da adição e subtração (LIMA *et al*, 2006). O docente pode ainda valer-se dos procedimentos, dos enunciados, das argumentações e eventuais figuras construídas pelos alunos no GeoGebra e realizar ponderações cabíveis acerca do tema em questão.

É importante destacar que, dados dois complexos $z_1 = \rho_1(\cos\phi_1 + i\,\mathrm{sen}\,\phi_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\phi_2 + i\,\mathrm{sen}\,\phi_2)$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\phi_1 + i\,\mathrm{sen}\,\phi_1) \cdot \rho_2(\cos\phi_2 + i\,\mathrm{sen}\,\phi_2) =$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2[\cos\phi_1\cos\phi_2 + i\cos\phi_1\,\mathrm{sen}\,\phi_2 + i\,\mathrm{sen}\,\phi_1 \cdot \cos\phi_2 +$$

$$+ i^2\,\mathrm{sen}\,\phi_1\,\mathrm{sen}\,\phi_2] =$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \mathrm{sen}\,\phi_1\,\mathrm{sen}\,\phi_2) + i(\cos\phi_1\,\mathrm{sen}\,\phi_2 +$$

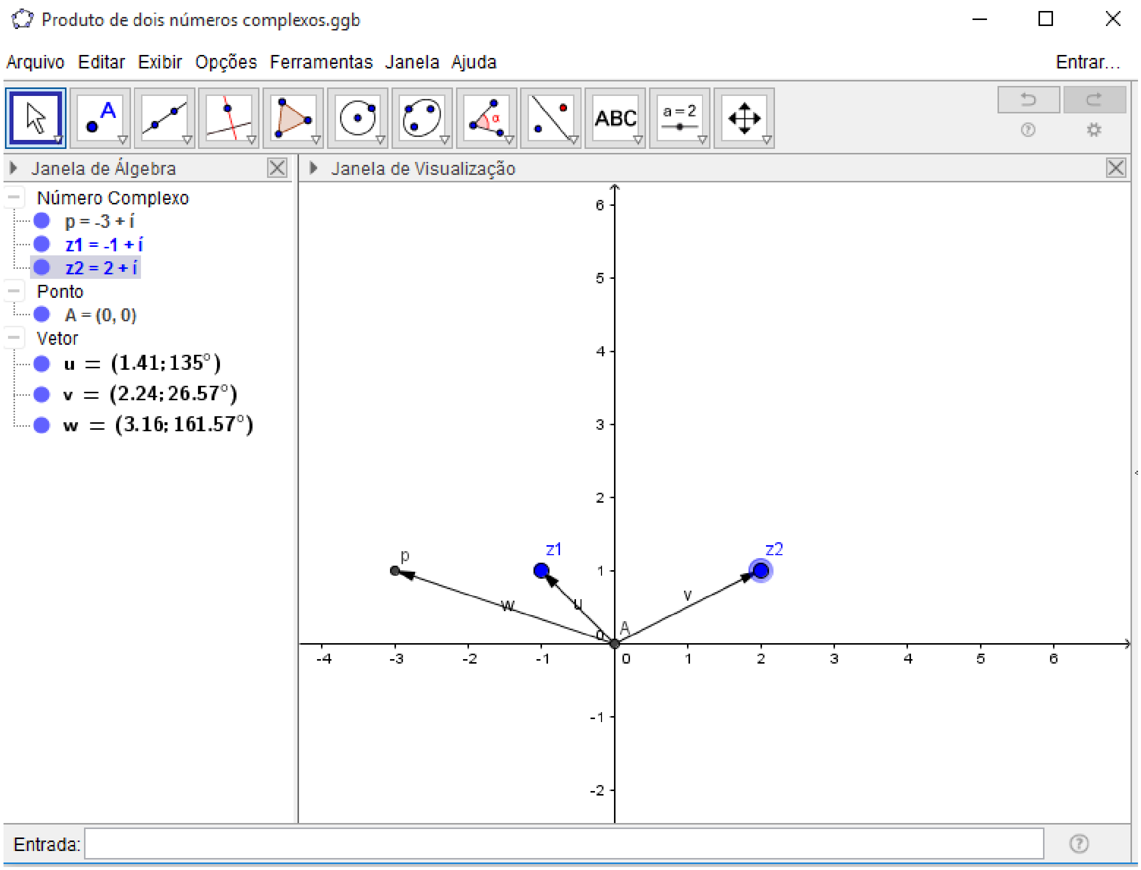
$$+ \mathrm{sen}\,\phi_1 \cdot \cos\phi_2)]$$

$$\therefore \quad z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i(\mathrm{sen}(\phi_1 + \phi_2)].$$

Portanto, para obter o produto de dois números complexos, z_1 e z_2, devemos multiplicar os módulos e somar os argumentos desses complexos. Esse processo pode ser dinamizado com o uso do GeoGebra, conforme instigado nas situações de ação, formulação e validação em que os alunos estiveram envolvidos, bem como na situação de institucionalização onde o professor ressalta e ajuda quanto ao estabelecimento e à divulgação dos saberes.

Observe mais um exemplo na figura 18, que pode ser obtida com procedimentos análogos aos descritos na eventual **situação de ação** supracitada. Ressalte-se ainda que, além da forma algébrica, é possível também inserir diretamente números complexos na forma trigonométrica na "caixa de Entrada" do GeoGebra.

Figura 18 – Interpretação geométrica do produto de dois números complexos no GeoGebra.



Fonte: Produção nossa.

Na figura 18 acima note que na Janela de Álgebra, tem-se os vetores u, v e w, representados por seus respectivos pares ordenados, que correspondem também aos números complexos z_1, z_2 e p, respectivamente. Perceba que $p = z_1 * z_2$, e que o módulo de p (que é o comprimento do vetor w, ou seja, 3,16) é o produto dos módulos de z_1 (que é o comprimento do vetor u, ou seja, 1,41) e z_2 (que é o comprimento do vetor v, ou seja, 2,24). Além disso, note que o argumento de p (arg p = 161,57°) é a soma dos argumentos de z_1 (arg z_1 = 135°) e de z_2 (arg z_2 = 26,57°).

5 SITUAÇÃO E

IDENTIFICAÇÃO

Tema: Movimentos no plano: rotação, uma primeira aplicação.

Conteúdo Matemático: Rotação e números complexos (Parte I).

Objetivo: Reconhecer que a multiplicação de um número complexo w de argumento ϕ, por i constitui efetuar no ponto w uma rotação positiva de 90º.

ESTRUTURA: Nessa situação são necessários os seguintes elementos:

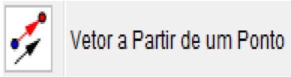
(1) Recursos materiais: texto introdutório sobre multiplicação em $\mathbb{C}$ e rotação (um tipo de movimento no plano); acesso a um computador ou smartphone com o software GeoGebra instalado;

(2) Conhecimentos prévios: sistema de coordenadas retangulares, operações com pares ordenados; multiplicação de números complexos na forma algébrica; noções sobre vetores no plano; movimento de rotação no plano; conhecimentos básicos de uso do software.

Situação proposta: Mostrar que multiplicar um número complexo por i implica efetuar uma rotação de 90º em torno da origem, no sentido anti-horário.

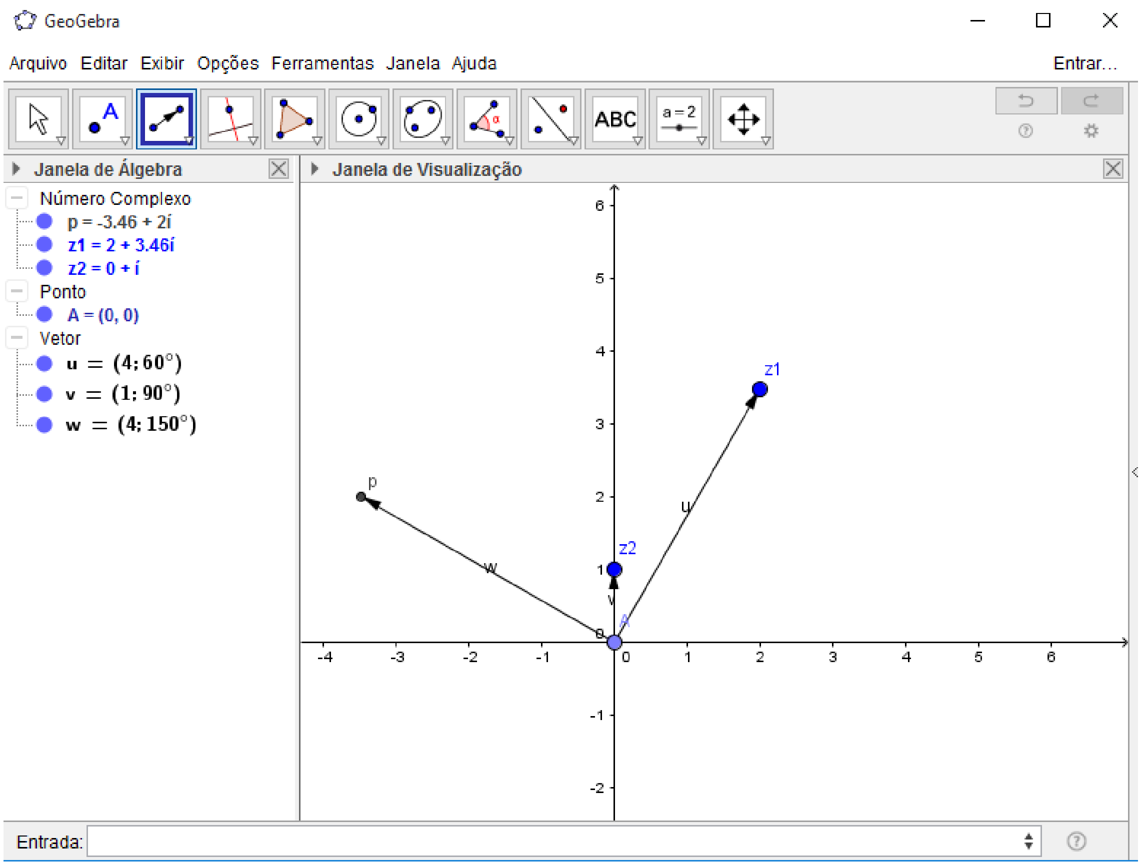
SUGESTÃO DE APLICAÇÃO: O professor deve iniciar a aula promovendo uma leitura e discussões de um texto sobre o assunto. Em seguida, deve proporcionar que os alunos sejam inseridos nas situações de ação, formulação e de validação, conforme os princípios da TSD de Brousseau (2008).

Na **situação de ação**, espera-se que os alunos venham interagir diretamente com o GeoGebra, inserindo números complexos, na forma retangular ou polar, na "caixa de Entrada" tais como: $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\, i$, $z_2 = i$. É importante destacar que uma maneira de inserir raiz quadrada no GeoGebra é digitar na "caixa de Entrada" o comando "sqrt"; então aparecerá "sqrt (x)", basta clicar neste item e digitar o número requerido para obter a raiz quadrada. Note que ao clicar em "enter", surgirá na Janela de Álgebra um valor aproximado (com aproximação de duas casas decimais) para a raiz quadrada em questão. Assim, ao digitar z_1 = 2 + 2 sqrt (3) i, z_2 = i, depois p = z_1*z_2, após apertar em "enter", aparecerão na Janela de Álgebra os complexos na forma algébrica e na Janela de Visualização os pontos correspondentes a esses números. A seguir, podem ir na "Barra de Ferramentas" do GeoGebra e clicar em 

ou 

Pode ainda digitar na "caixa de Entrada" a palavra "vetor" e, assim, vai aparecer várias opções sobre vetores. Além do que, é possível exibir na Janela de Álgebra e na Janela de Visualização do GeoGebra as chamadas coordenadas polares desses complexos, ou seja, o módulo e o argumento. Para tanto, pode direcionar o cursor no vetor em questão e clicar com o botão direito na opção "Coordenadas Polares". Observe na figura 19 abaixo uma possível construção dos alunos no GeoGebra acerca desse assunto:

Figura 19 - Rotação e multiplicação de números complexos.



Fonte: Produção nossa.

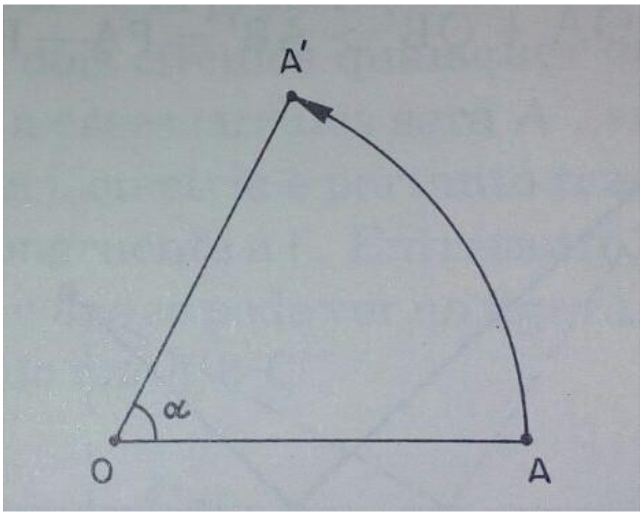
Na **situação de formulação**, os alunos podem trocar informações entre si, formulando ideias, conjecturas, enfim, é de fundamental importância que haja entre os discentes comunicações viáveis acerca do que eles observam em suas práticas com o GeoGebra sobre as relações entre rotação no plano e as interpretações geométricas das operações com números complexos, no caso a multiplicação.

Na **situação de validação**, espera-se que os alunos possam externar seus enunciados sobre suas eventuais conclusões sobre rotação no plano e números complexos. E isso com demonstrações que sejam plausíveis e convincentes aos demais colegas de sala. Os alunos eventualmente poderão mostrar que multiplicar um complexo z por implica efetuar uma rotação de 90º no ponto representado por z, no sentido anti-horário.

Na **situação de institucionalização**, o professor pode aproveitar o ambiente educativo, propício à aprendizagem, provocado pelas interações entre aluno, o meio (*milieu*) antagonista e os conhecimentos adquiridos ou que estão a ser construídos, e institucionalizar o saber sobre rotação e números complexos.

O professor pode lembrar que rotação é um dos tipos de Transformações Geométricas, que são funções que associam cada ponto do plano a um outro ponto também do plano de acordo com determinadas regras/propriedades (WAGNER, 2007). Segundo Elon Lages Lima, "Uma *transformação T* no plano Π é uma função *T:* Π → Π, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto *P* do plano outro ponto $P_1 = T(P)$ do plano, chamado sua *imagem* por *T*" (LIMA, 2005, p. 138). Ao ser fixado um ponto O num plano Π e ao ser dado um ângulo α, de acordo com Wagner (2007, p. 75) "a rotação de centro O e amplitude α é a transformação que a cada ponto A do plano Π associa o ponto A' = R α (A) de forma que se tenha OA' = OA, $\widehat{AOA'}$ = α (em torno de O), positivo". Observe a figura 20.

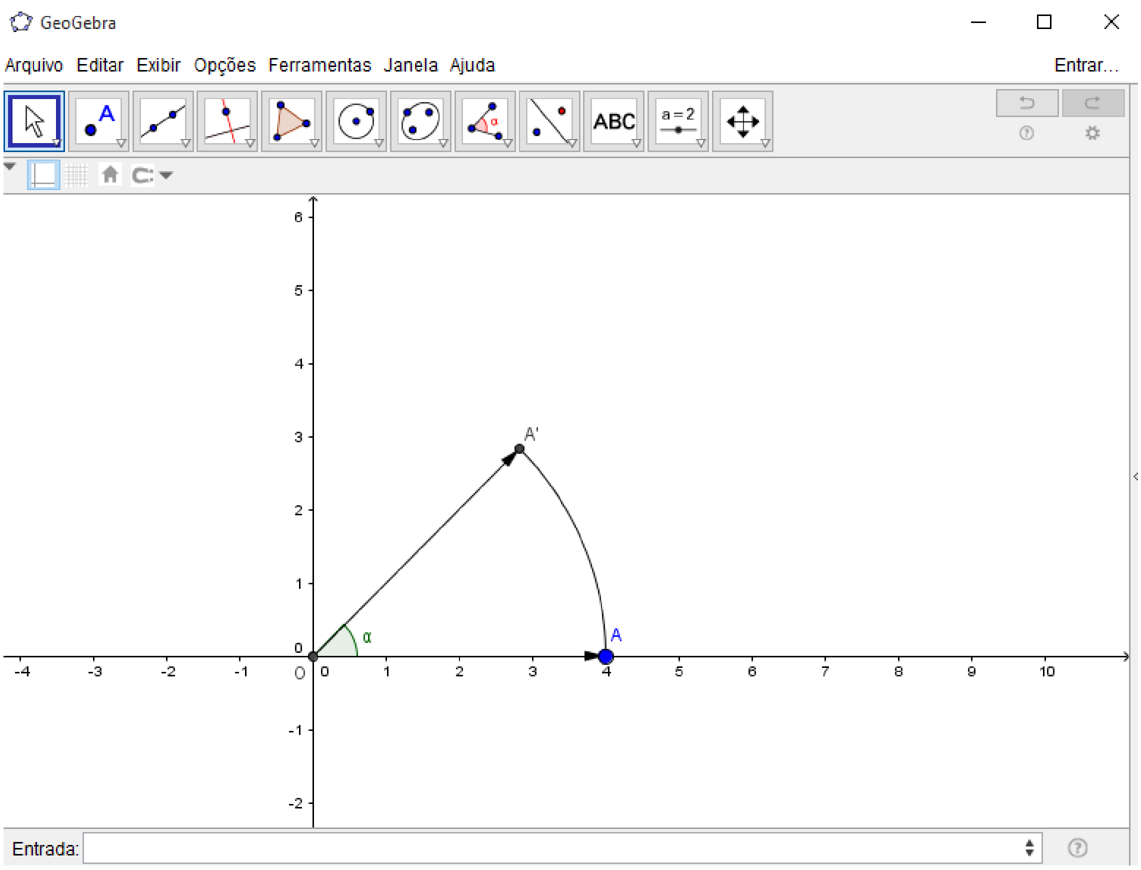
Figura 20 – A rotação de centro O e amplitude α que leva A em A'.



Fonte: (WAGNER, 2007, p. 76).

Podemos construir e visualizar a rotação supracitada também no GeoGebra. Observe a figura 21.

Figura 21 - Rotação de centro O e amplitude α que leva A em A’ no GeoGebra.



Fonte: Produção nossa.

A figura 21 acima foi construída no GeoGebra com os seguintes procedimentos: inserindo-se na “caixa de Entrada” o número complexo 4 +0i; depois clicou-se na Janela de Visualização em cima do ponto que representa esse complexo, depois, com o botão do lado direito do mouse, em “Propriedades” e alterou-se o nome do objeto para a letra “A”. Assim também ocorreu com o resultado da multiplicação de A por cos (45º + i sen 45º), que foi nomeado para A’. Foram determinados os vetores correspondentes a estes complexos, clicando-se em 

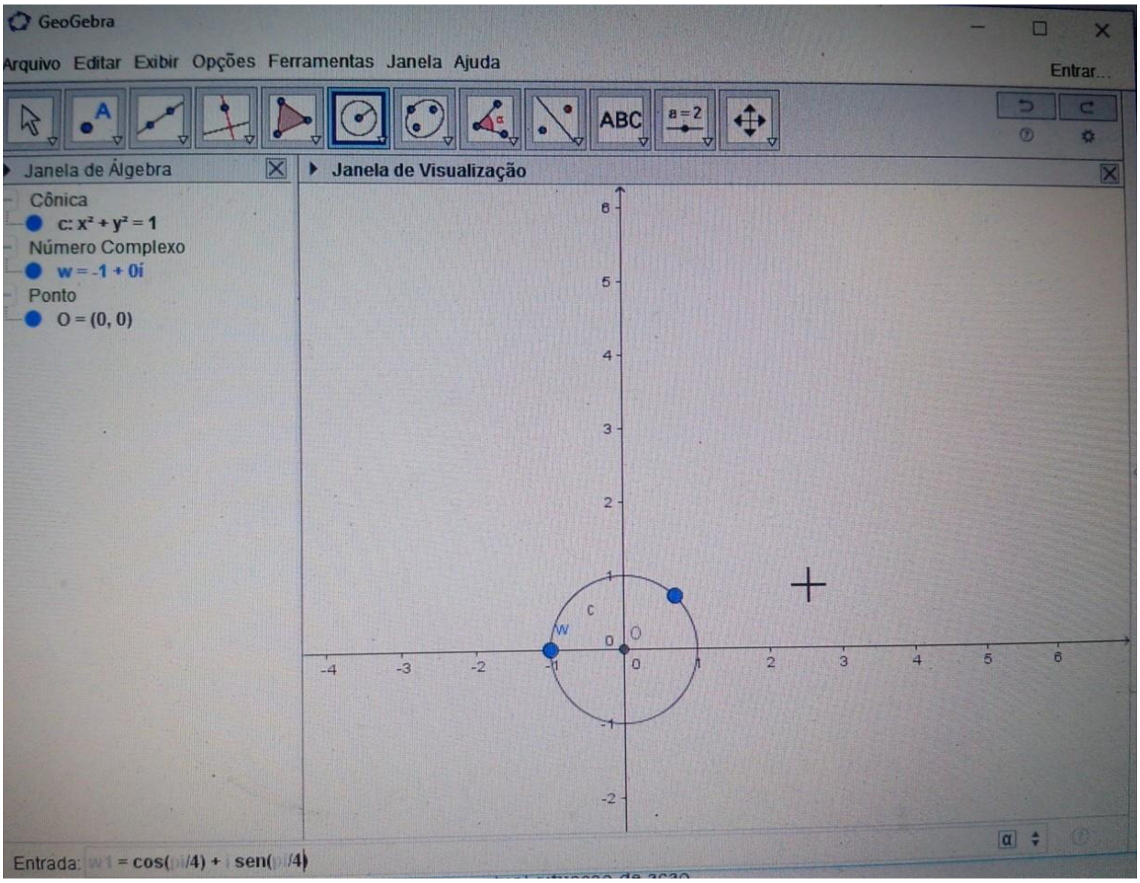
na “Barra de Ferramentas” e, prosseguindo, clicou-se na origem no plano e nos pontos A e A’. Depois, ainda na “Barra de Ferramentas”, clicou-se em 

e, posteriormente, clicou-se no ponto O (origem do plano) e nos pontos A e A’.

É importante ressaltar que, dado um número complexo w = cos ϕ + i sen ϕ, este complexo w pode ser representado por um ponto da circunferência unitária (de raio igual a 1), centrada na origem do plano complexo. Lembramos que é possível inserir diretamente na “caixa de Entrada” do GeoGebra números complexos na forma trigonométrica ou polar, sendo que tais números aparecem na Janela de Álgebra do software na forma algébrica.

Observe a figura 22, que pode ser obtida digitando-se na “caixa de Entrada” do software[17] os complexos w = cos (-pi) + i sen (-pi) e w_1 = cos (pi/4) + i sen (pi/4), na “Barra de Ferramentas” clicar em “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos” e, posteriormente, clicar na origem do plano e no ponto W.

Figura 22 - Números complexos da forma $w = \cos \phi + i \operatorname{sen} \phi$ no GeoGebra.



Fonte: Produção nossa.

Agora, note que, sendo $w = \cos \phi + i \operatorname{sen} \phi$, temos:

$$wi = (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)i = i^2 \operatorname{sen} \phi + i \cos \phi = -\operatorname{sen} \phi + i \cos \phi$$

[17] No software GeoGebra, na versão 5.0 utilizada neste trabalho, para o número π, pode-se digitar “pi”.

No entanto, da Trigonometria, sabemos que, para todo y pertencente aos reais, temos:

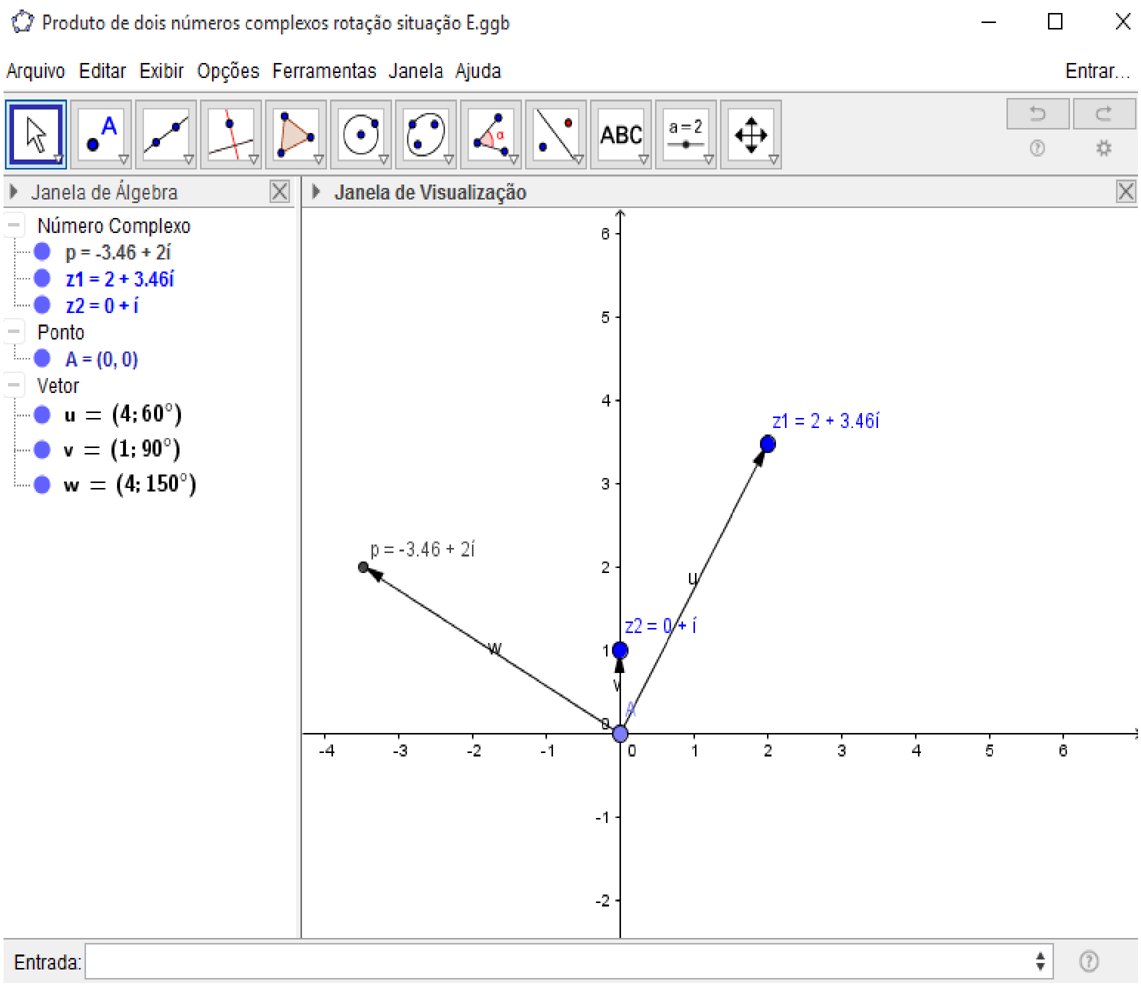
$$\cos(y + \pi/2) = -\operatorname{sen} y \text{ e que } \operatorname{sen}(y + \pi/2) = +\cos y.$$

Assim, segue que

$$wi = -\operatorname{sen}\phi + i\cos\phi = \cos(\phi + \pi/2) + \operatorname{sen}(\phi + \pi/2).$$

Portanto, multiplicar w = cos ϕ + i sen ϕ por i constitui realizar no ponto w uma rotação positiva de 90º. O professor e os alunos podem constatar isso visualmente no GeoGebra, conforme apresentado na figura 23, que pode ser obtida de acordo com os comandos aludidos acima na eventual situação de ação.

Figura 23 - Multiplicar $z_1 = a + bi$ por i constitui realizar no ponto que representa z_1 uma rotação positiva de 90º.



Fonte: Produção nossa.

É possível perceber que, de acordo com a figura 23 acima, sendo $\rho = 4$, $\rho_1 = 4$, $\rho_2 = 1$ os módulos, e $\phi = 90º$, $\phi_1 = 60º$, $\phi_2 = 150º$, os argumentos, respectivamente, de $\rho = - 3,46 + 2i$, $z_1 = 2 + 3,46\ i$, $z_2 = i$, temos:

$$\rho = \rho_1 \times \rho_2 = 1 \times 4 = 4 \text{ e}$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 60º + 90º = 150º$$

Ou seja, a interpretação geométrica da multiplicação de números complexos, expõe que multiplicar o complexo $z_1 = 2 + 3,46$ por $z_2 = i$ significa que o vetor que representa z_1 sofre uma rotação de 90º em torno da origem, no sentido anti-horário.

Note ainda que isso pode ser observado caso um complexo w esteja na chamada forma algébrica, isto é, $w = a + bi$. Então,

$$wi = (a + bi)\ i = ai + bi^2 \therefore wi = -b + ai$$

Assim, no exemplo da figura 23 acima, a parte real do número complexo p é o oposto da parte imaginária do complexo z_1 e a parte imaginária de p é a parte real de z_1.

6 SITUAÇÃO F

IDENTIFICAÇÃO

Tema: Movimentos no plano: rotação, uma segunda aplicação.

Conteúdo Matemático: Rotação e números complexos (Parte II).

Objetivo: Reconhecer que a multiplicação de um número complexo z por um número complexo w unitário[18] de argumento ϕ resulta em uma rotação ϕ da imagem do complexo z.

ESTRUTURA: Nessa situação são necessários os seguintes elementos:

(1) Recursos materiais: texto introdutório sobre multiplicação em ℂ e rotação (um tipo de movimento no plano); acesso a um computador ou smartphone com o software GeoGebra instalado;
(2) Conhecimentos prévios: sistema de coordenadas retangulares, operações com pares ordenados; multiplicação de números complexos na forma algébrica; noções sobre vetores no plano; movimento de rotação no plano; conhecimentos básicos de uso do software.

Situação proposta: Mostrar que ao multiplicar um número complexo z por um número complexo w unitário de argumento ϕ, o vetor que representa z sofre uma rotação de um ângulo ϕ em torno da origem.

SUGESTÃO DE APLICAÇÃO: O professor pode iniciar a aula promovendo uma leitura e discussões de um texto sobre o assunto. Em seguida, pode proporcionar que os alunos sejam inseridos nas situações de ação, formulação e de validação, conforme os princípios da TSD de Brousseau (2008).

Na **situação de ação**, espera-se que os alunos venham interagir diretamente com o GeoGebra, inserindo números complexos na "caixa de Entrada" tais como: z_1 = 2+ + 2i, z_2 = cos 120º + i sen 120º, p = z_1 * z_2, respectivamente, e, ao clicar em "enter", aparecerão na Janela

[18] Um número complexo é unitário quando seu módulo é igual 1 (um).

de Álgebra esses complexos e na Janela de Visualização os pontos correspondentes a esses números.

Na **situação de formulação**, os alunos podem ser distribuídos em equipes, onde pelo menos um deles realiza e anota as observações pertinentes sobre o assunto, bem como ocorrem comunicações entre os alunos acerca das atividades, visando otimizar os resultados.

Na **situação de validação**, espera-se que os alunos venham externar suas eventuais conclusões através de enunciados baseados em demonstrações acerca do assunto em pauta.

Os alunos, casualmente, poderão perceber e mostrar que o argumento de p é soma dos argumentos de z_1 e z_2, bem como que o módulo de p é o mesmo módulo de z_1.

Na **situação de institucionalização**, espera-se que o professor possa institucionalizar conhecimentos sobre o tem em questão. Isto é, o professor pode ressaltar o fato de que a rotação é um tipo de Transformação[19] Geométrica, um tipo de movimento no plano que pode ser estudado através da operação de multiplicação de números complexos.

Pode lembrar que, sendo $z = \rho\ (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$ e $w = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, com ϕ e θ pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi[$, temos:

$$z \cdot w = \rho\ (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) =$$

$$= \rho[\cos \phi \cos \theta + i \cos \phi \operatorname{sen} \theta + i \operatorname{sen} \phi \cdot \cos \theta +$$

$$+ i^2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta] =$$

$$= \rho[(\cos \phi \cos \theta - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta) + i (\cos \phi \operatorname{sen} \theta +$$

$$+ \operatorname{sen} \phi \cdot \cos \theta)]$$

$$\therefore\ zw = \rho[\cos (\phi + \theta) + i (\operatorname{sen} (\phi + \theta)].$$

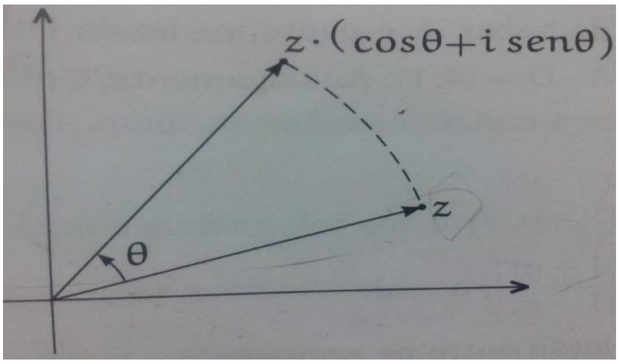
Note que zw apresenta o mesmo módulo de z e seu argumento é obtido pelo acréscimo de θ ao argumento de z. Daí, concluímos que a imagem de zw é a transformação da imagem de z por uma rotação θ, em torno da origem do plano de Argand-Gauss, no sentido positivo.

---

[19] Sobre Transformações Geométricas, vide Lima (2005).

Assim, ao multiplicar z por cos θ + i sen θ, "o vetor que representa z sofre uma rotação de um àngulo θ em torno da origem" (LIMA *et al*, 2006, p. 176). Observe a figura 24.

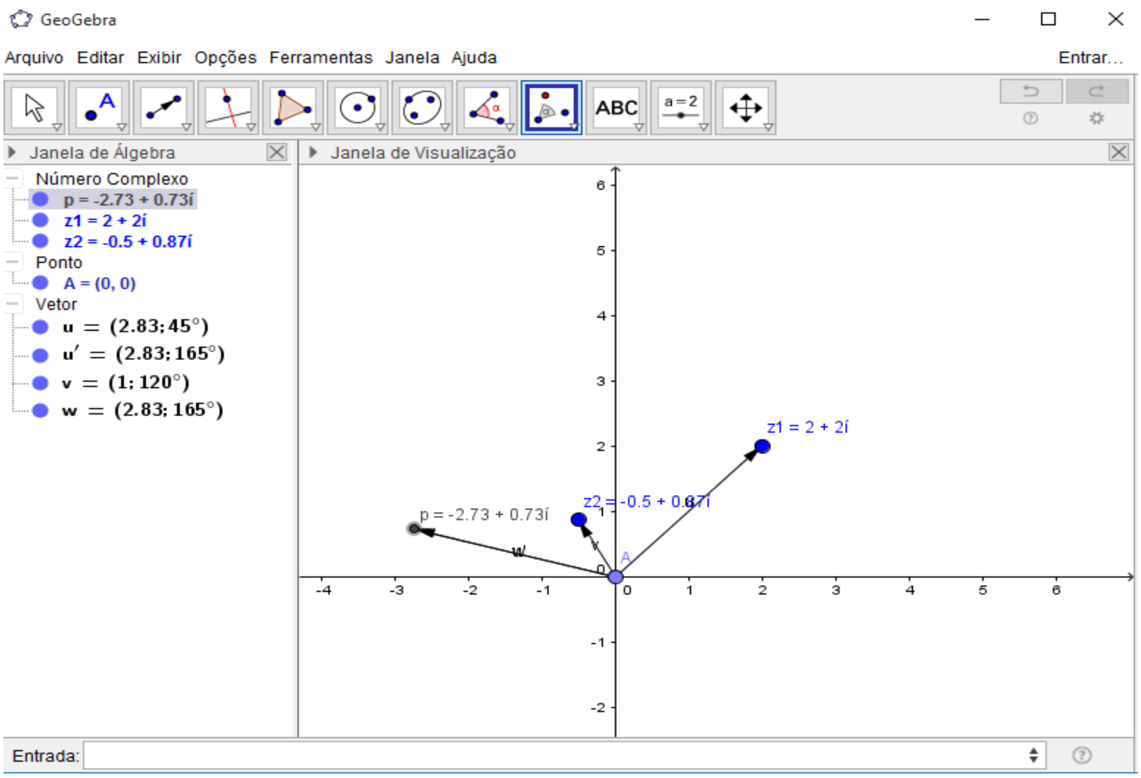
Figura 24 - Vetor que representa z sofre uma rotação de um ângulo θ em torno da origem.



Fonte: (LIMA *et al*, 2006, p. 177).

No GeoGebra, isso pode ser constatado visualmente, com o eventual benefício da dinamicidade do processo e opções de visualização possibilitadas pelo software. O professor pode aproveitar os possíveis números complexos utilizados pelos alunos durante a situação de ação e dar prosseguimento as atividades, cujos resultados podem ser vistos na figura 25.

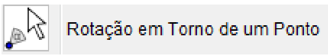
Figura 25 - Produto de z_1 por cos 120º + i sen 120º no GeoGebra: um caso de rotação.



Fonte: Produção nossa.

Dessa forma, em relação aos comandos, o professor pode inserir na “caixa de Entrada” do GeoGebra $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 + 2i$, depois $p = z_1*z_2$ que, após apertar em “enter”, aparecerão na Janela de Álgebra os complexos na forma algébrica e na Janela de Visualização os pontos correspondentes a esses números. A seguir, podem ir na “Barra de Ferramentas” do GeoGebra e clicar em 

.

Pode ainda digitar na “caixa de Entrada” a palavra “vetor” e aparecer várias opções sobre vetores. Além do que, é possível exibir na Janela de Álgebra do GeoGebra as chamadas coordenadas polares desses complexos, ou seja, o módulo e o argumento. Para tanto, pode direcionar com o mouse no vetor em questão e clicar com o botão direito na opção “Coordenadas Polares”. Para obter uma rotação, pode ir na “Barra de Ferramentas” do GeoGebra, clicar em 

, depois selecionar o vetor que representa o complexo, depois clicar na origem do plano, centro da rotação, aparecerá uma “caixa” para inserir o ângulo desejado e o sentido da rotação (anti-horário ou horário). Na figura 25 acima, u' foi obtido com tais procedimentos. Note que os vetores u' e u são equipolentes, sendo u o vetor associado ao número complexo p, que é o produto de z_1 por z_2.

7 SITUAÇÃO G

IDENTIFICAÇÃO

Tema: Divisão de números complexos.

Conteúdo Matemático: Divisão de dois números complexos.

Objetivo: Efetuar a divisão de dois números complexos e interpretar geometricamente esse quociente.

ESTRUTURA: Nessa situação são necessários os seguintes elementos:

(1) Recursos materiais: texto introdutório sobre a operação de divisão em $\mathbb{C}$; acesso a um computador ou smartphone com o software GeoGebra instalado;
(2) Conhecimentos prévios: sistema de coordenadas retangulares, operações com pares ordenados; divisão de números complexos na forma algébrica; noções sobre vetores no plano; conhecimentos básicos de uso do software.

Situação proposta: Representar geometricamente o quociente de dois números complexos.

SUGESTÃO DE APLICAÇÃO: O professor pode iniciar a aula promovendo uma leitura e discussões de um texto sobre o assunto. Em seguida, pode proporcionar que os alunos sejam estejam nas situações de ação, formulação e de validação, conforme os princípios da TSD de Brousseau (2008).

Na **situação de ação**, para efetuar a divisão[20] de complexos, espera-se que os alunos venham interagir diretamente com o GeoGebra, inserindo números complexos, seja na forma algébrica ou na forma trigonométrica, na "caixa de Entrada" como, por exemplo: z_1 = 8 (cos 70º + i sen 70º), z_2 = 2 (cos 25º + i sen 25º), depois p = z_1 / z_2 que, após apertar em "enter", aparecerão na Janela de Álgebra os complexos na forma algébrica e na Janela de Visualização os pontos correspondentes a esses números. A seguir, podem ir na "Barra de Ferramentas" do GeoGebra e clicar em 

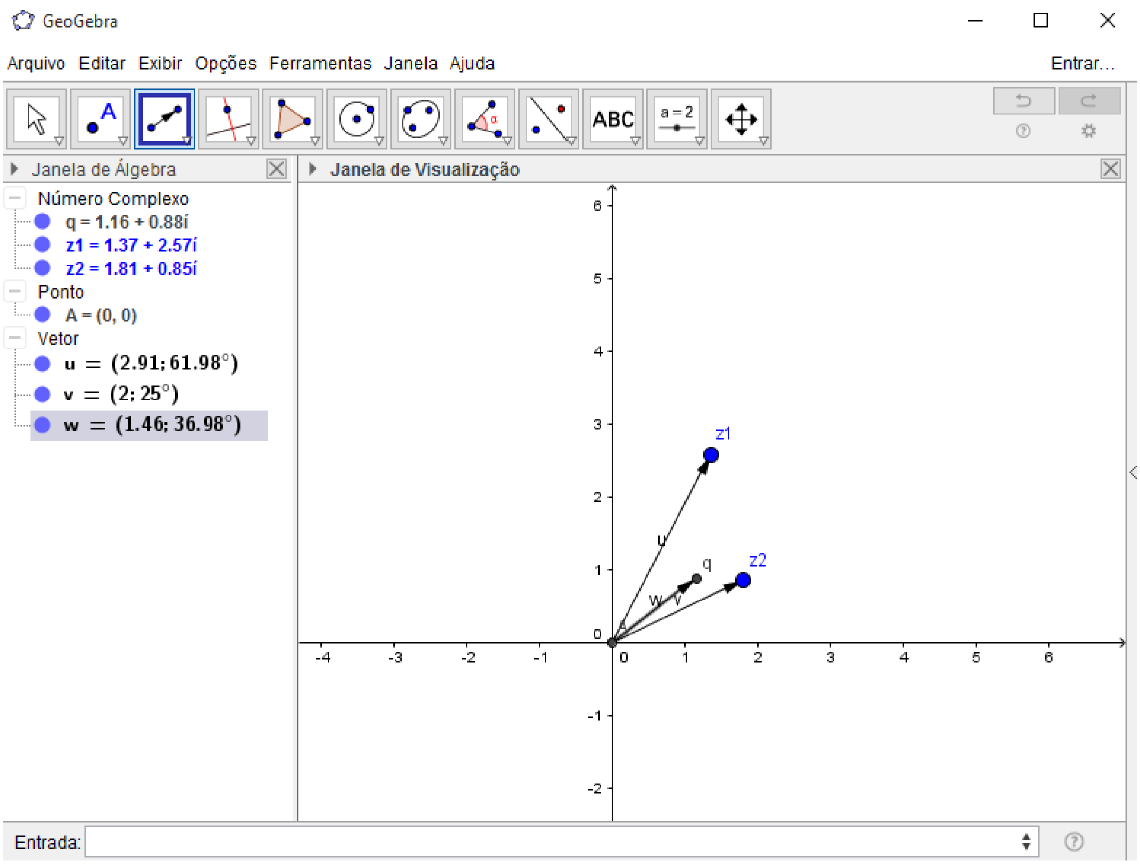
.

Pode ainda digitar na "caixa de Entrada" a palavra "vetor" e aparecer várias opções sobre vetores. Além do que, é possível exibir na Janela de Álgebra do GeoGebra as chamadas

[20] A operação de divisão no GeoGebra pode ser obtida inserindo o símbolo / na "caixa de Entrada".

coordenadas polares desses complexos, ou seja, o módulo e o argumento. Para tanto, pode direcionar com o mouse no vetor em questão e clicar com o botão direito na opção "Coordenadas Polares". Observe a figura 26.

Figura 26 – Possível construção dos alunos sobre a divisão de complexos no GeoGebra.



Fonte: Produção nossa.

Na **situação de formulação**, os alunos podem trocar informações entre si, de modo que ocorram comunicações plausíveis, instigando a curiosidade e a formulação de ideias, de estratégias, vislumbrando estabelecer aquelas que sejam mais favoráveis à consecução do sucesso na atividade proposta. Os alunos podem perceber que o quociente entre números complexos na forma trigonométrica pode ser efetuado mais rapidamente do que na forma algébrica. Além, os discentes podem notar que as relações existentes entre o módulo e o argumento dos números complexos envolvidos na operação de divisão.

Na **situação de validação**, espera-se que os alunos apresentem suas ideias com enunciados acompanhados com argumentos convincentes, com possíveis demonstrações acerca da divisão de números complexos.

Na **situação de institucionalização**, espera-se que o professor possa lembrar e valorizar a aquisição e construção de conhecimentos, onde os saberes possam ser constituídos e difundidos culturalmente. O professor pode ressaltar que, na forma trigonométrica, a divisão de números complexos pode ser generalizada.

Observe que, dados dois complexos $z = \rho_1 (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $w = \rho_2 (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$, para provar que

$$z/w = \rho_1 / \rho_2 [\cos (\theta - \phi) + i \operatorname{sen} (\theta - \phi)],$$

podemos mostrar que

$$\rho_1 / \rho_2 [\cos (\theta - \phi) + i \operatorname{sen} (\theta - \phi)]$$

multiplicado por w é igual a z.

Não obstante, já vimos na “Situação E” que na multiplicação de números complexos, multiplicamos seus módulos e somamos seus argumentos (LIMA *et al*, 2006). Sabemos que $\rho_1 / \rho_2 \cdot \rho_2 = \rho_1$ e que $(\theta - \phi) + \phi = \theta$, então, temos:

$$\rho_1 / \rho_2 [\cos (\theta - \phi) + i \operatorname{sen} (\theta - \phi)] \cdot w = \rho_1 \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = z.$$

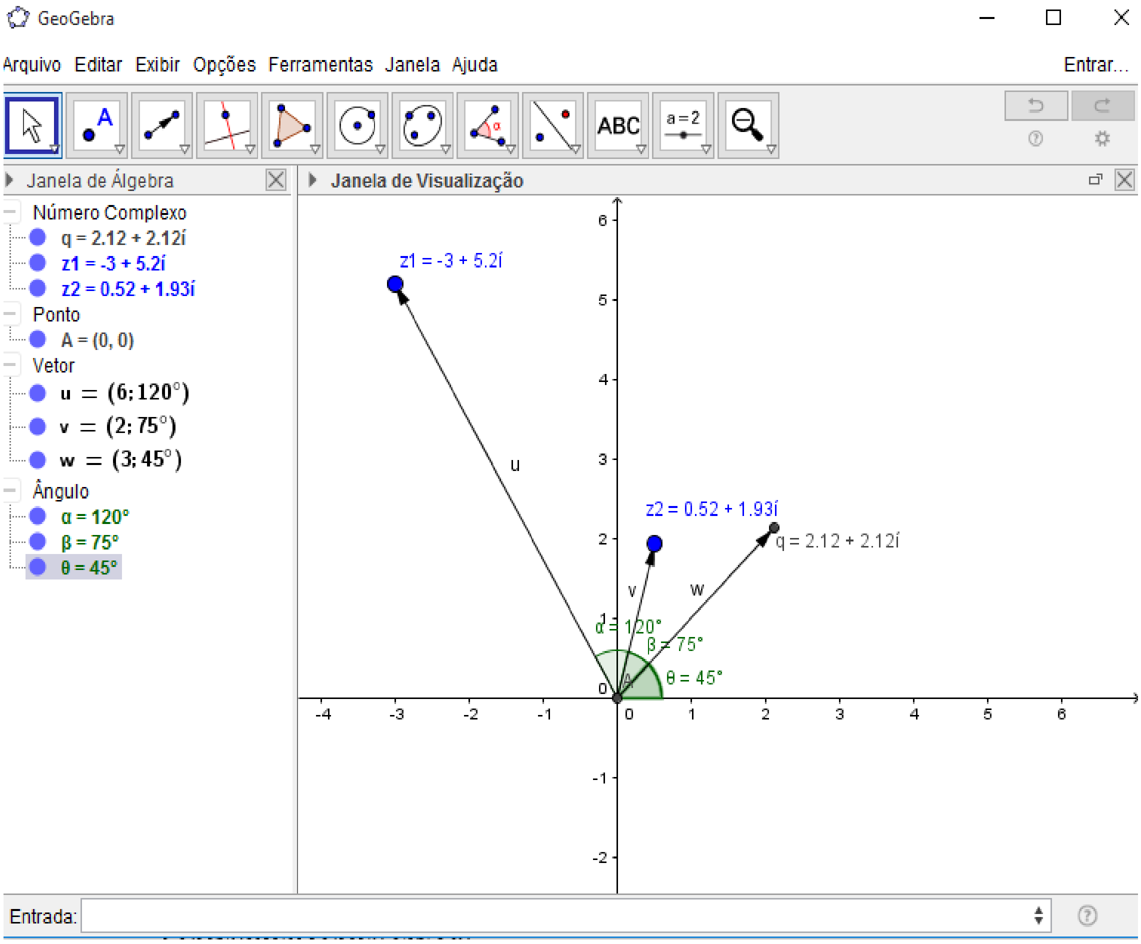
Portanto,

$$z/w = \rho_1 / \rho_2 [\cos (\theta - \phi) + i \operatorname{sen} (\theta - \phi)]$$

Ou seja, na divisão de números complexos, dividimos seus módulos e subtraímos seus argumentos.

Observe o exemplo apresentado na figura 27, que pode ser obtido no GeoGebra com procedimentos análogos aos descritos na eventual situação de ação citada acima. Ressaltamos que para mostrar o ângulo referente ao argumento de cada complexo, pode-se digitar diretamente na “caixa de Entrada” do software a palavra “ângulo”, que aparecerá tanto na Janela de Álgebra como na Janela de Visualização o argumento referente ao número complexo em questão.

Figura 27 - Interpretação geométrica do quociente de dois números complexos no GeoGebra.



Fonte: Produção nossa.

Na figura 27 percebe-se que o módulo do número complexo q é o quociente dos módulos de z_1 e z_2 (6 / 2 = 3) e que o argumento de q é a diferença entre os argumentos de z_1 e z_2 (120º – 75º = 45°).

8 SITUAÇÃO H

IDENTIFICAÇÃO

Tema: Movimentos no plano: translação.

Conteúdo Matemático: Translação e números complexos.

Objetivo: Reconhecer que ao somar um número complexo z não nulo a cada complexo com imagem em uma figura do plano de Argand-Gauss ocorre um movimento de translação dessa figura.

ESTRUTURA: Nessa situação são necessários os seguintes elementos:

(1) Recursos materiais: texto introdutório sobre a operação de adição em $\mathbb{C}$ e translação (um tipo de movimento no plano); acesso a um computador ou smartphone com o software GeoGebra instalado;
(2) Conhecimentos prévios: sistema de coordenadas retangulares, operações com pares ordenados; adição de números complexos na forma algébrica; noções sobre vetores no plano; movimento de translação no plano; conhecimentos básicos de uso do software.

Situação proposta: Mostrar que a translação de uma figura no plano, pode ocorrer ao adicionar um mesmo número complexo não nulo a cada complexo associado aos pontos dessa figura.

SUGESTÃO DE APLICAÇÃO: O professor deve iniciar a aula promovendo uma leitura e discussões de um texto sobre o assunto. Em seguida, deve proporcionar que os alunos sejam estejam nas situações de ação, formulação e de validação, conforme os princípios da TSD de Brousseau (2008).

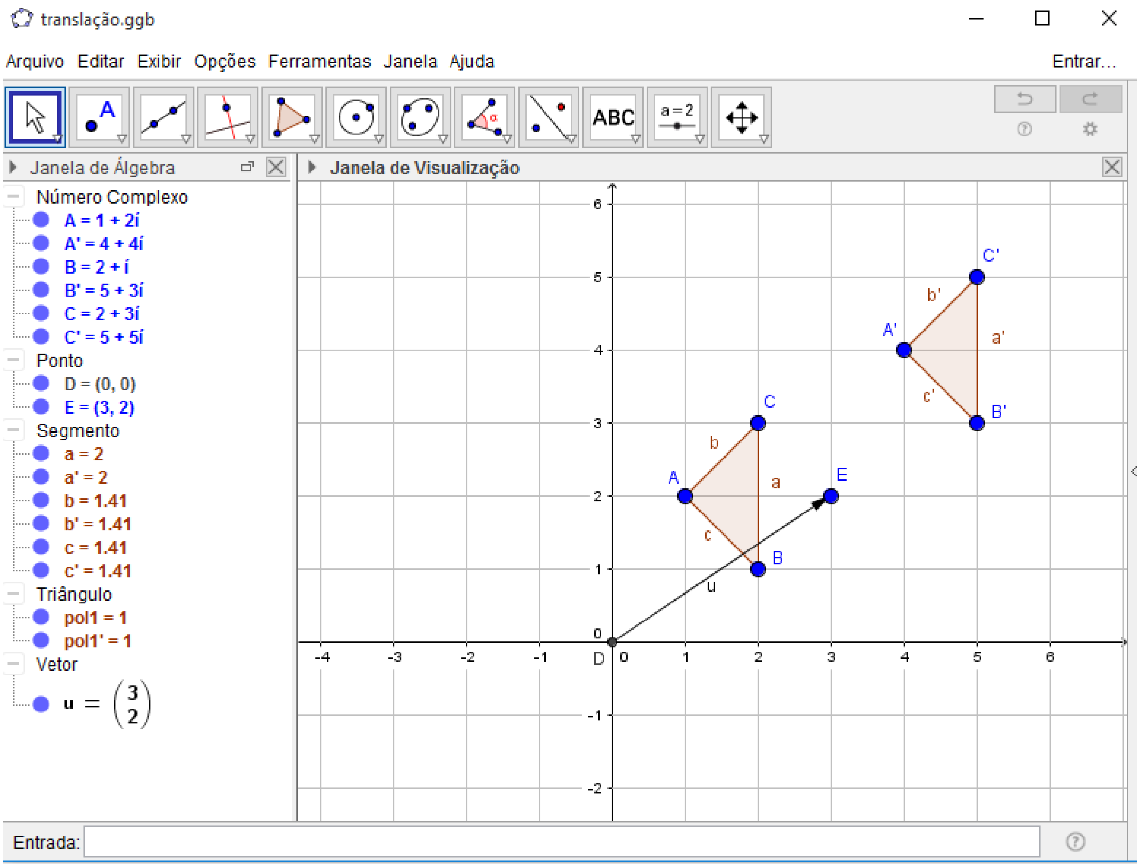
Na **situação de ação**, espera-se que os alunos venham interagir diretamente com o GeoGebra, construindo polígonos, figuras geométricas, como, por exemplo, uma região triangular.

Os alunos podem, com o mouse, construir uma figura no GeoGebra, um triângulo, por exemplo, e um vetor também determinado nesse software. Podem clicar com o botão no lado direito do mouse em cada vértice do triângulo na Janela de Visualização ou na Janela de

Álgebra, clicar em “Propriedades”, depois em “Álgebra”, e escolher como deseja que as coordenadas dos vértices sejam apresentadas, como, por exemplo, “Números Complexos”.

Os alunos podem escolher na “Barra de Ferramentas” a ferramenta de “Translação por um Vetor”; em seguida, podem clicar no objeto (no triângulo, neste caso) e no vetor, então, tem-se que tal objeto é transladado em relação aquele vetor. Observe um possível resultado de tais procedimentos na figura 28.

Figura 28 - Possível construção dos alunos sobre translação no GeoGebra.



Fonte: Produção nossa.

Na **situação de formulação**, espera-se que os alunos possam trocar informações entre si sobre as atividades realizadas, bem como possam perceber e traçar estratégias que sejam tidas como as mais viáveis quanto ao envolvimento da adição de números complexos e o movimento de translação da figura em questão.

Lembrando que é almejável que ocorram comunicações plausíveis entre os alunos. Não basta apenas saber as estratégias, é preciso saber comunicar-se com os colegas acerca dos possíveis melhores (ou não) procedimentos.

Na **situação de validação**, aguarda-se que os alunos venham externar seus pensamentos e procedimentos sobre as relações entre translação de figuras e a adição de números complexos através de enunciados com eventuais demonstrações que possam refutar ou concordar com as ideias de seus colegas que podem ser, eventualmente, distintas.

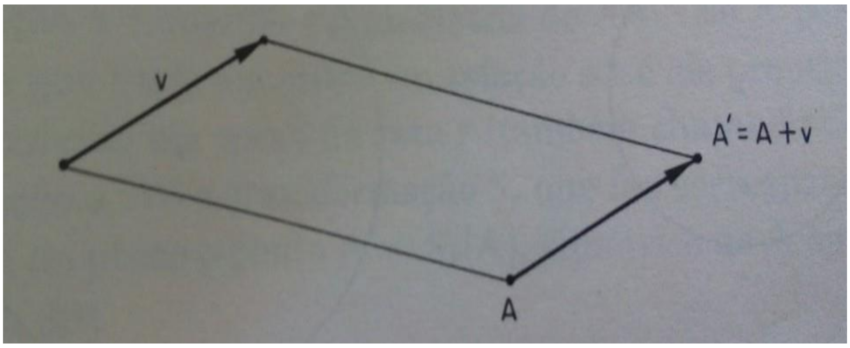
Na **situação de institucionalização**, espera-se que o professor possa aproveitar o ambiente educativo para institucionalizar conhecimentos, dando ênfase na construção e valorização de saberes quanto a adição de números complexos e a translação no plano.

O professor pode destacar que a translação é um tipo de transformação T do plano. De acordo com Wagner (2007, p. 70) "Uma *transformação* T no plano Π é uma função T: Π → Π que associa a cada ponto A do plano um outro ponto A' = T(A) do plano chamado *imagem* de A por T".

O autor ainda esclarece que "Se F é uma figura (portanto um conjunto de pontos de Π) definiremos F' = F(T) como o conjunto das imagens dos pontos de Π" (WAGNER, 2007, p. 70).

O docente deve ainda ressaltar que a "*translação* determinada pelo vetor v é a transformação T_v: Π → Π que leva cada ponto A do plano Π no ponto A' = A + v desse plano" (WAGNER, 2007, p. 71). Observe a figura 29.

Figura 29 – Translação determinada pelo vetor v.

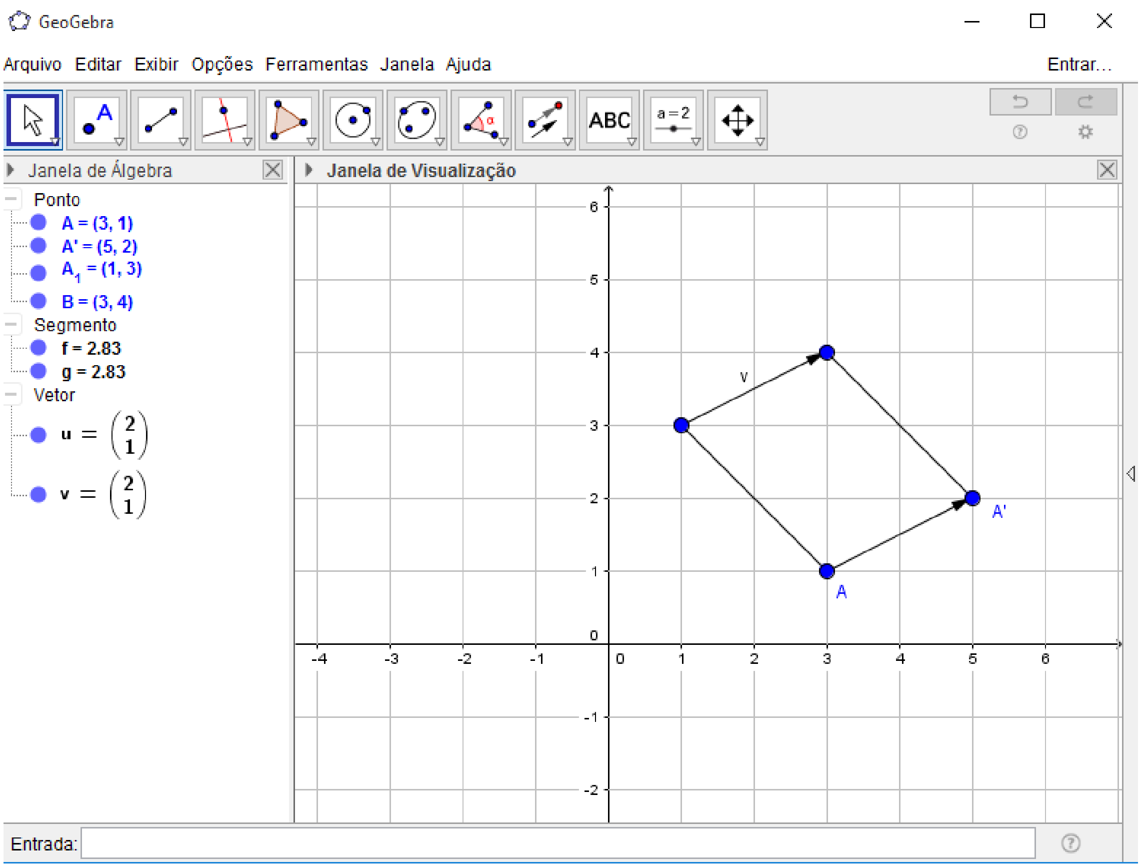


Fonte: (WAGNER, 2007, p. 71).

Note que tanto na figura 29 acima, o ponto A foi transladado de acordo com o sentido, direção e comprimento do vetor v, obtendo-se o ponto A' = A + v.

Observe que na figura 30 (que pode ser obtida com comandos análogos aos já descritos na situação de ação), o ponto A foi transladado de acordo com o sentido, direção e comprimento do vetor v, obtendo-se o ponto A’ = A + v.

Figura 30 - Translação determinada pelo vetor v no GeoGebra.

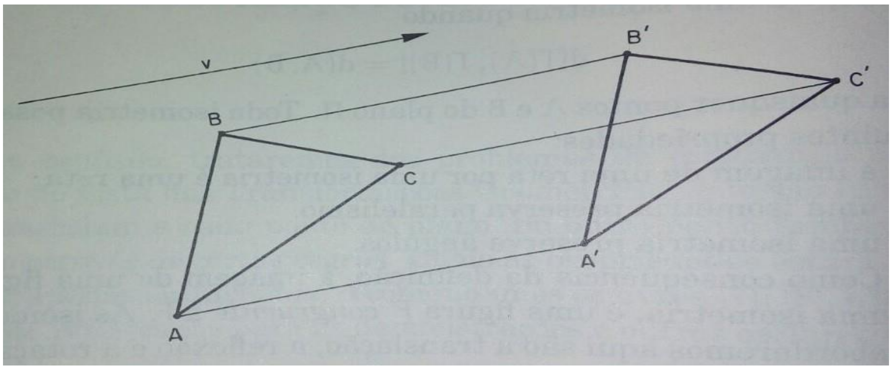


Fonte: Produção nossa.

Perceba que na figura 30 acima, o ponto A (3, 1) está associado ao número complexo 3 + i; o vetor v é equipolente ao vetor cuja origem é a origem do plano complexo e com extremidades no ponto (2, 1) e que, portanto, associa-se ao número complexos 2 + i; e o ponto A’ (5, 2) está associado ao complexo 5 + 2i. Por conseguinte, A’ = A + v.

Não obstante, como a “translação transforma toda reta em outra reta paralela e por ser uma isometria, transforma qualquer figura em outra congruente” (WAGNER, 2007, p. 71). Observe a figura 31.

Figura 31 – A translação T_v transforma ABC em A’B’C’.



Fonte: (WAGNER, 2007, p. 72).

Aproveitando a possível construção efetuada pelos alunos durante a situação de ação (caso os alunos não tenham feito, o professor pode fazê-lo utilizando os comandos já descritos na situação de ação), o docente pode destacar que, na figura 28, o vetor u = (3, 2) está associado ao número complexo 3 + 2i; já os vértices do triângulo ABC, A (1, 2), B (2, 1) e C (2, 3) estão associados, respectivamente, aos números complexos 1 + 2i, 2 + i e 2 + 3i; por seu turno, os vértices A’ (4, 4), B’ (5, 3) e C’ (5, 5) estão associados, respectivamente, aos números complexos 4 + 4i, 5 + 3i e 5 + 5i.

No entanto, note que a translação na figura 28 no plano (o triângulo ABC), ocorreu ao adicionar um mesmo número complexo não nulo (3 + 2i, associado ao vetor u) a cada número complexo associado aos pontos dessa figura que no caso estão em destaque as coordenadas de seus vértices. Ou seja,

A’ = A + u

B’ = B + u

C’ = C + u

O professor pode ressaltar que, dados os complexos u = 1 + 0i e w = x + yi, sendo que w é um número complexo qualquer não nulo (ou seja, w é diferente de 0 + 0i), para qualquer complexo z = a + bi, o número complexo z’, dado por z’ = zu + w, é a translação de z na direção e sentido do vetor associado ao número complexo w, uma vez que z’ = (a + bi) (1 + 0i) + (x + yi) = a + bi + x + yi = (a + x) + (b + y)i

Assim, na figura 28 apresentada na eventual **situação de ação**, o triângulo A’B’C’ foi obtido adicionando-se 3 + 2i a cada número complexo w com imagem no triângulo ABC.

Portanto, o triângulo A'B'C' é o conjunto das imagens dos números $w + 3 + 2i$. Perceba ainda que a figura (triângulo ABC) sofreu uma translação, deslocando-se 3 (três) unidades para a direita e 2 (duas) unidades para cima.

9 SITUAÇÃO I

IDENTIFICAÇÃO

Tema: Movimentos no plano: homotetia.

Conteúdo Matemático: Homotetia e números complexos.

Objetivo: Reconhecer que a homotetia pode ser relacionada com a multiplicação de números complexos.

ESTRUTURA: Nessa situação são necessários os seguintes elementos:

(1) Recursos materiais: texto introdutório sobre a operação de multiplicação em $\mathbb{C}$ e homotetia (um tipo de movimento no plano); acesso a um computador ou smartphone com o software GeoGebra instalado;
(2) Conhecimentos prévios: sistema de coordenadas retangulares, operações com pares ordenados; multiplicação de números complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica; noções sobre vetores no plano; movimento de homotetia no plano; conhecimentos básicos de uso do software.

Situação proposta: Mostrar que a homotetia configura-se com um movimento que pode ser obtido pela multiplicação de número real por um número complexo.

SUGESTÃO DE APLICAÇÃO: O professor pode iniciar a aula promovendo uma leitura e discussões de um texto sobre o assunto. Em seguida, pode proporcionar que os alunos sejam estejam nas situações de ação, formulação e de validação, conforme os princípios da TSD de Brousseau (2008).

Na **situação de ação**, espera-se que os alunos venham interagir diretamente com o GeoGebra, procurando entender como se dá o processo de realização de homotetias nesse software, bem como perceber as relações existentes entre o movimento de homotetia e as operações com números complexos, em especial a multiplicação em $\mathbb{C}$.

Na **situação de formulação**, os alunos podem notar e registrar os procedimentos que ajudam ou não para alcançar melhores resultados. Além disso, é crível que ocorram comunicações dessas observações entre os colegas sobre as possíveis estratégias consideradas mais vantajosas quanto a realização satisfatória das atividades e objetivos envolvidos.

Na **situação de validação**, espera-se que alunos possam mostrar aos demais colegas seus posicionamentos acerca do tema em questão. E isso através de enunciados com argumentações convincentes, a fim de eventualmente demonstrar suas constatações acerca da homotetia e a operação de multiplicação de números complexos.

Na **situação de institucionalização**, espera-se que o professor possa institucionalizar saberes sobre homotetia e a operação de multiplicação de números complexos.

O professor pode ressaltar que a homotetia é um tipo de movimento no plano. De acordo com Elon Lages Lima, "A *homotetia* de centro O e razão r no plano Π é a transformação H: Π → Π que associa a cada ponto P em Π o ponto H (P) tal que $\overrightarrow{\mathrm{OP1}}$ = r· $\overrightarrow{OP}$" (LIMA, 2005, p. 161). Assim, dados um ponto fixo O no plano Π e um número real r não nulo, a homotetia de centro O e razão r é a transformação que associa cada ponto P do plano Π ao ponto P_1 de forma que $\overrightarrow{\mathrm{OP1}}$ = r · $\overrightarrow{OP}$.

Assim, percebe-se que a homotetia relaciona-se com a interpretação geométrica da multiplicação de um número real diferente de zero (ou seja, um número complexo da forma a + 0i, com a ≠ 0) por um número complexo z = x + yi, onde este z, por seu turno, associa-se a um vetor.

Note ainda que a homotetia pode ser utilizada "para ampliar ou reduzir uma figura" (WAGNER, 2007, p. 84), caso r, a chamada razão de homotetia, seja diferente de 1. Ademais, se "r = 1, a homotetia H reduz-se à transformação identidade: H (P) = P para todo P" (LIMA, 2005, p. 161). Além disso, Wagner (2007) esclarece que se a razão de homotetia é positiva, a homotetia chama-se *direta*; se for negativa, chama-se *inversa*.

O professor pode ressaltar que, dados os números complexos u = a + 0i, v = 0 + 0i, e w um número complexo com argumento ϕ e módulo r, o número complexo w' = wu + v, ou seja, w' = wu é o complexo de argumento ϕ e módulo r · a. Dessa forma, cada complexo w do plano de Argand – Gauss é transformado no complexo w' com o mesmo argumento de w e com módulo sendo igual ao produto dos módulos de w e de u.

Note que, se u = a > 1, ocorre uma homotetia direta, ou seja, w' = w · u é uma ampliação cujo fator é o número a. Assim, se u = a, w = r (cos ϕ + i sen ϕ), w' = w · u = = r · a (cos ϕ + i sen ϕ).

Na "Situação I" de nossa SD aqui proposta (vide tópico 5), temos um triângulo BCD como exemplo. Nesse caso, é possível perceber que

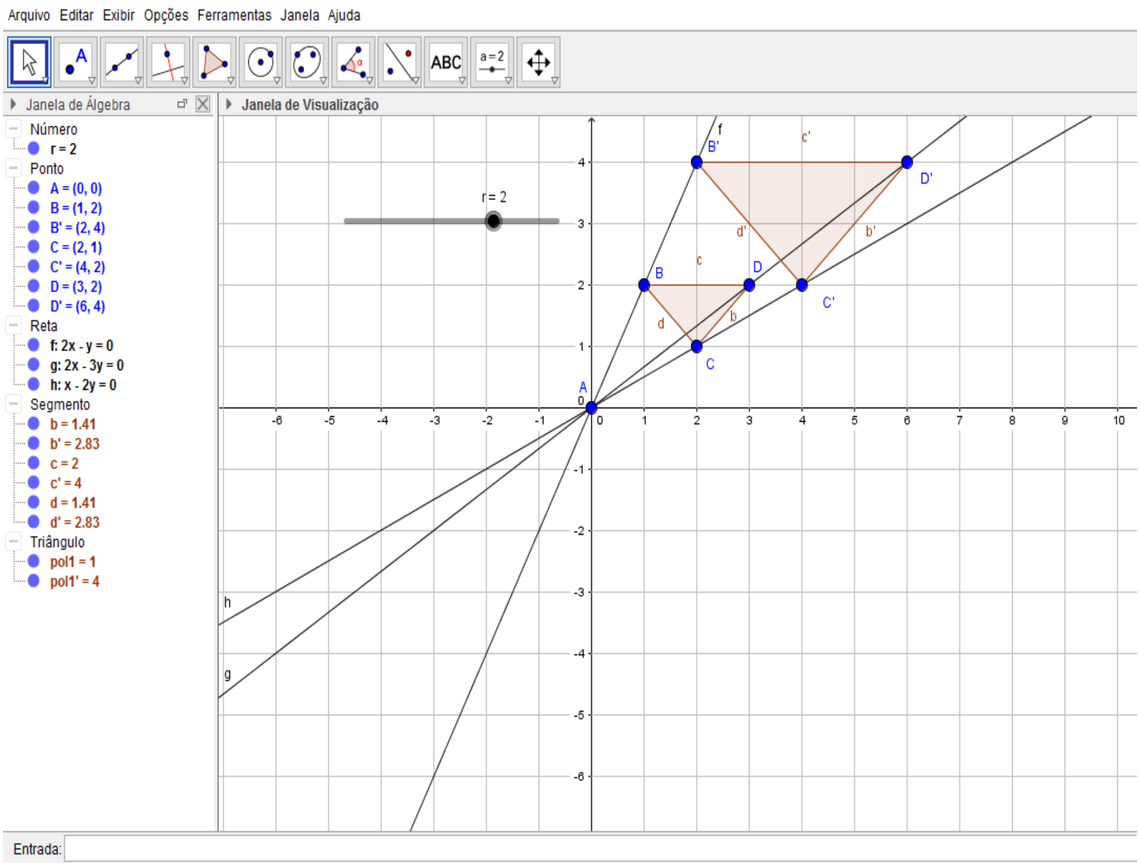
$$B' = B \cdot u + v = B \cdot u$$

$$C' = C \cdot u + v = C \cdot u$$

$$D' = D \cdot u + v = D \cdot u$$

Analogamente, isso também ocorre com os demais pontos do triângulo BCD. Observe a figura 32, que ilustra a homotetia de centro A (0, 0) e razão r = 2 que transforma o triângulo BCD num triângulo B'C'D'.

Figura 32 - Homotetia de centro A (0, 0) e razão r = 2 que transforma o triângulo BCD num triângulo B'C'D', com retas mostrando a colinearidade entre pontos.



Fonte: Produção nossa.

Na figura 32 acima, percebe-se que os pontos A, B e B’ são colineares, bem como os pontos A, D, e D’ também são, e os pontos A, C e C’ estão alinhados.

Segundo Lima (2005, p. 161), “toda homotetia é, de fato, uma semelhança”. Vejamos, por exemplo, o caso de um triângulo BCD. Ora, dados os números complexos B e C, com $B = r\,(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$ e $C = s\,(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$. Acontece que $B' = B \cdot u$ e $C' = C \cdot u$. Assim, temos:

$$B' = r \cdot a\,(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) \text{ e } C' = s \cdot a\,(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

Ocorre que B’ e C’ supra identificam-se, respectivamente, com os pares ordenados $(r \cdot a\cos\phi;\ r \cdot a \operatorname{sen}\phi)$ e $(s \cdot a\cos\alpha;\ s \cdot a \operatorname{sen}\alpha)$. Agora, ao calcular a distância entre B’ e C’, indicada por B’C’, da Geometria Analítica, temos:

$$B'C' = \sqrt{(s \cdot a\cos\alpha - r \cdot a\cos\phi)^2 + (s \cdot a \operatorname{sen}\alpha - r \cdot a \operatorname{sen}\phi)^2}.$$

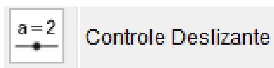
Ou seja,

$$B'C' = a \cdot \sqrt{(s \cdot \cos\alpha - r \cdot \cos\phi)^2 + (s \cdot \operatorname{sen}\alpha - r \cdot \operatorname{sen}\phi)^2}.$$

Assim, $B'C' = a \cdot BC$, isto é, a distância entre os pontos B’ e C’ é igual ao produto do número a pela distância entre pontos os B e C. Note que esse raciocínio pode utilizado nos demais lados dos triângulos BCD e B’C’D’. Então, segue que:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'D'}{BD} = \frac{C'D'}{CD} = a.$$

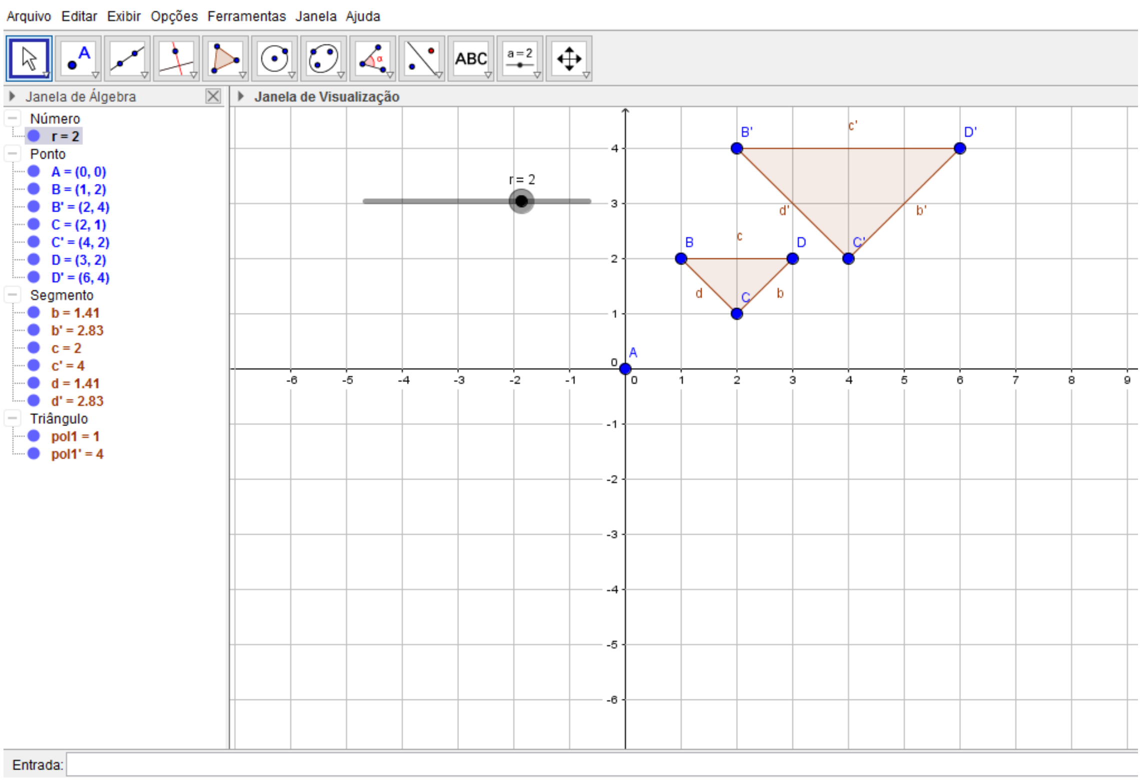
Dessa forma, os triângulos BCD e B’C’D’ são semelhantes, pelo caso Lado, Lado, Lado (LLL), com razão de semelhança igual ao número a.

No GeoGebra, o professor pode mostrar como é possível realizar e observar a homotetia e sua relação com a multiplicação de complexos. O docente pode clicar na “Barra de Ferramentas”, determinar um ponto, clicando em “Ponto”, e ao clicar em “Mover”, pode movimentar o ponto na “Janela de Visualização”com bastante liberdade no plano complexo. Como sugestão, o professor pode colocar esse ponto na origem do plano. Lembrando que tal ponto será o centro de homotetia. A seguir, o professor pode, ainda na “Barra de Ferramentas”, habilitar um controle para variáveis de forma “deslizante”, clicando em 

Posteriormente, o docente pode clicar na “Janela de Visualização”, que aparecerá uma “caixa” para inserir, acerca do “Controle Deslizante”, o nome, a que se refere (número, ângulo, inteiro), intervalo de atuação, entre outras coisas. Em nosso exemplo, colocaremos a letra r para o nome de nosso controle deslizante. Esse valor r será a razão de homotetia. A seguir, pode ir na “Barra de Ferramentas”, clicar em Polígono para criar um polígono, como, por exemplo, um triângulo. Em nossa sugestão de exemplo, os vértices do triângulo são B (1, 2), C (2, 1) e D (3, 2).

Agora, pode clicar, na “Barra de Ferramentas”, na opção Homotetia , para proceder ao movimento de homotetia no GeoGebra. Em seguida, seleciona-se o objeto (que em nosso é o triângulo BCD), o centro de homotetia e depois a razão de homotetia. Ao clicar no objeto (no triângulo, em nosso exemplo) e no centro de homotetia, logo em seguida aparece uma “caixa” para inserir um “Fator”, um valor para a razão de homotetia, que podemos colocar um parâmetro r, para termos a liberdade de escolher vários valores conforme queiramos, dentro do intervalo que foi definido, que em nosso exemplo pode estar entre -5 e + 5. Se r = 2, obtemos como resultado o que está apresentado na figura 33:

Figura 33 – Homotetia de razão r = 2, com centro A(0 ,0), transforma o triângulo BCD num triângulo B’C’D’.



Fonte: Produção nossa.

Note que, na figura 33 acima, ocorreu um processo de ampliação do triângulo BCD e a homotetia é direta, uma vez que a razão de homotetia é positiva, $r > 0$ e $r \neq 1$.

O professor pode ainda inserir, no GeoGebra, retas passando pelos vértices do triângulo e pelo centro de homotetia (ponto A) e observar que os pontos A, B e B' são colineares, bem como os pontos A, D, e D' também são, e os pontos A, C e C' estão alinhados.

Para tanto, pode, na "Barra de Ferramentas" clicar em "Reta" e selecionar dois pontos requeridos.

Ainda na figura 33 acima, perceba que os pontos B (1, 2), C (2, 1) e D (3, 2), associam-se, respectivamente, aos números complexos 1 + 2i, 2 + i e 3 + 2i. Observe que:

B' = 2 · B = (2, 4), que identifica-se com o número complexo 2 + 4i

C' = 2 · C = (4, 2), que identifica-se com o número complexo 4 + 2i

D' = 2 · D = (6, 4), que identifica-se com o número complexo 6 + 4i.

E ainda,

$$\overrightarrow{B'C'} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$$

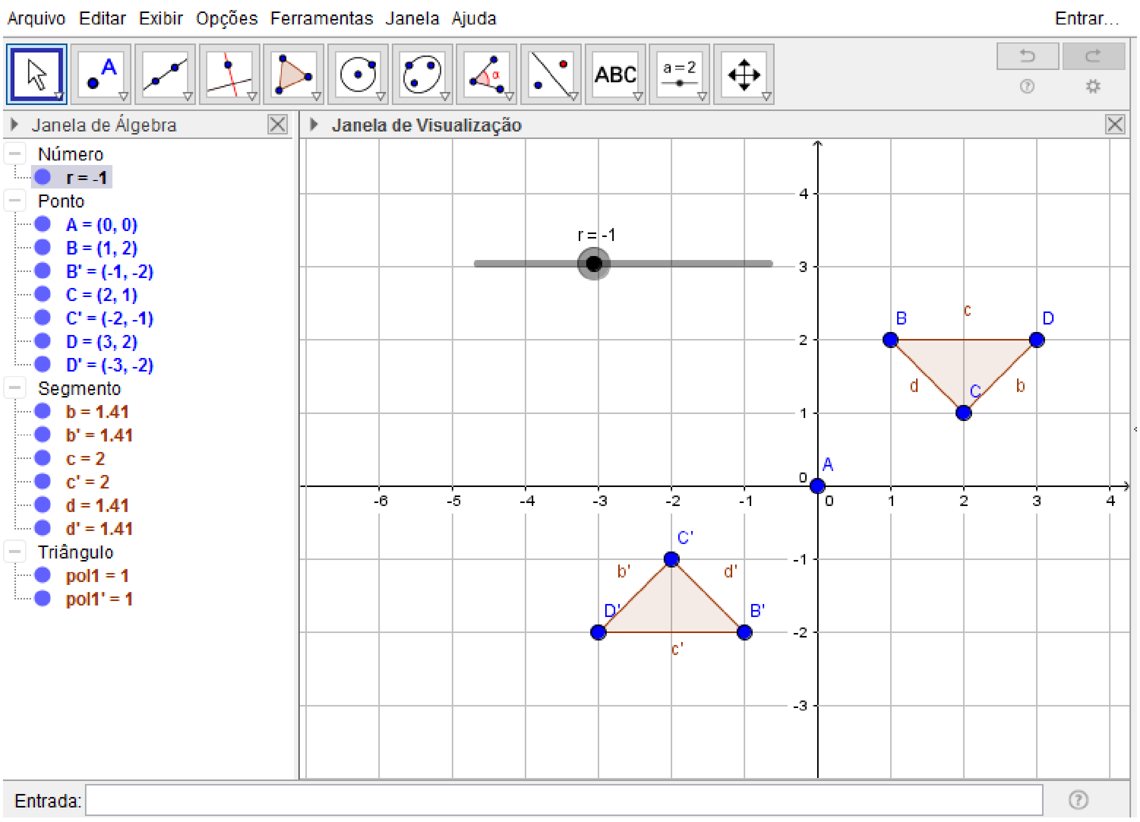
$$\overrightarrow{C'D'} = 2 \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{B'D'} = 2 \cdot \overrightarrow{BD}.$$

Note que cada vetor associado ao número complexo (que, por sua vez, identifica-se com cada vértice do triângulo BCD) foi multiplicado pelo número 2.

Agora, noutro exemplo, se r = – 1, podemos obter o seguinte resultado, mostrado na figura 34 a seguir.

Figura 34 - Homotetia de razão r = – 1, com centro A (0 ,0), transforma o triângulo BCD num triângulo B’C’D’.



Fonte: Produção nossa.

Quando a razão de homotetia é negativa, Eduardo Wagner chama a homotetia de “*inversa*” (WAGNER, 2007, p. 81). Na figura 34 acima, ocorreu uma homotetia inversa, onde a homotetia de centro A (0, 0) e razão r = – 1 transformou o triângulo BCD num outro triângulo semelhante a este, o triângulo B’C’D’.

Análises e discussões análogas as já realizadas quando da homotetia direta supracitada, também podem ser realizadas neste caso da homotetia inversa da figura 34. Lembrando que os pontos B (1, 2), C (2, 1) e D (3, 2), associam-se, respectivamente, aos números complexos 1 + 2i, 2 + i e 3 + 2i, temos:

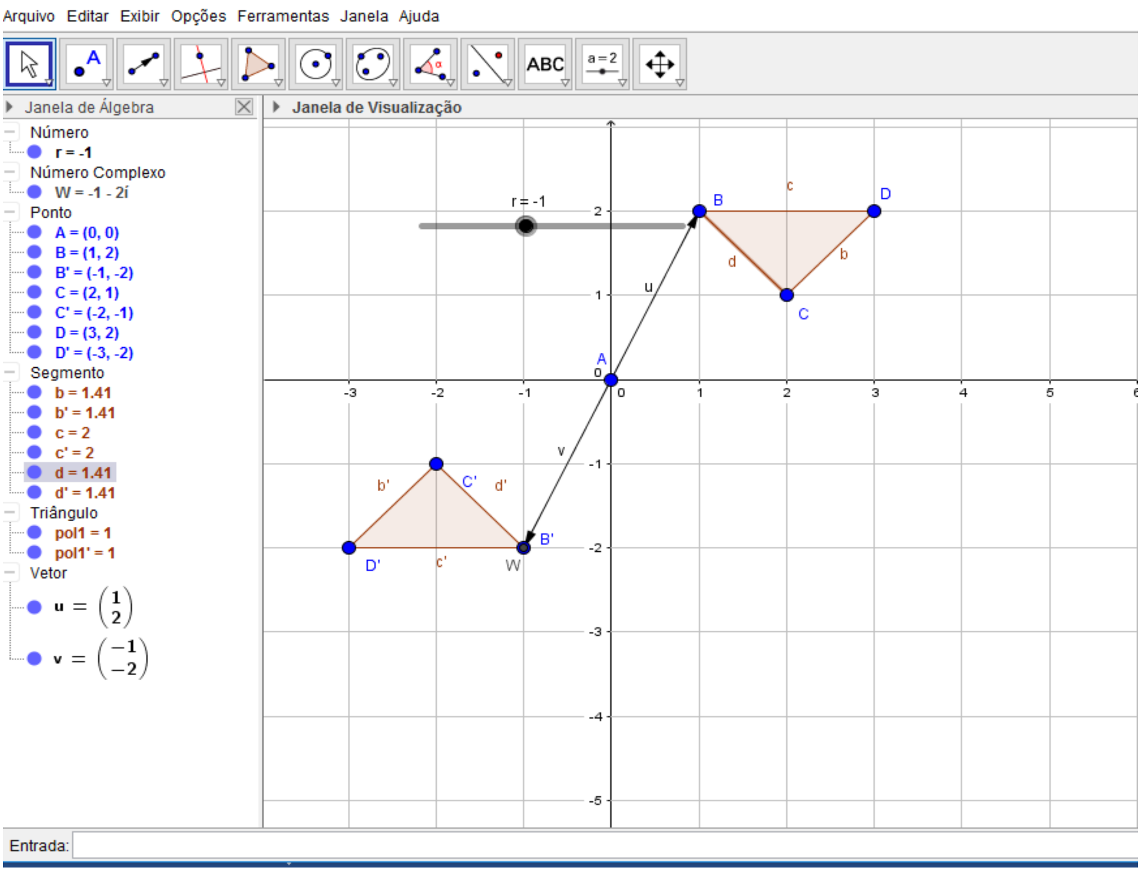
B’ = B · (– 1) = (– 1, – 2), que identifica-se com o número complexo – 1 – 4i,

C’ = C · (– 1) = (– 2, – 1), que identifica-se com o número complexo – 2 – i, D’ = D · (– 1) = (– 3, – 2), que identifica-se com o número complexo – 3 – 2i.

Agora, numa perspectiva acerca do movimento de rotação, é importante lembrar que o número complexo i é tal que $i^2 = -1$. Não obstante, conforme mostrado na “Situação E” desta SD, multiplicar um número complexo z por i significa que o vetor que representa z sofre uma rotação de 90º em torno da origem, no sentido positivo.

Assim, a igualdade $i^2 = -1$, nos remete ao seguinte (e possível) entendimento: como $i^2 = i \cdot i$, cada vetor, com origem no ponto A (centro de homotetia no exemplo em questão e origem do plano complexo), com extremidade em cada vértice do triângulo BCD sofreu uma rotação de 90º em torno da origem, no sentido positivo e depois outra rotação de 90º em torno da origem, no sentido anti-horário. Ou seja, uma rotação de 180º. Esse raciocínio pode ser estendido aos demais pontos do triângulo BCD. Observe a figura 35.

Figura 35 – Vetor u = $\overrightarrow{AB}$ sofre uma rotação de 90º e depois outra rotação também de 90°, ambas em torno da origem, no sentido positivo, ou seja, uma rotação de 180º.



Fonte: Produção nossa.

A construção apresentada nessa figura 35, foi realizada no GeoGebra utilizando os procedimentos já anunciados no início desta situação de institucionalização. O professor pode digitar na "caixa de Entrada" W = u * i * i, sendo o vetor u = (1, 2), com origem na origem do plano complexo e com extremidade no ponto B (1, 2), um dos vértices do triângulo BCD. O professor pode ir na "Barra de Ferramentas", clicar na opção "vetor", depois na origem do vetor, no caso, o ponto A(0, 0) e, depois, na extremidade do vetor, ou seja, no ponto B (1, 2).

Na figura 35 acima, note que o ponto W coincide com o ponto B', isto é, eles possuem as mesmas coordenadas no plano; e que, de fato, o vetor v = (– 1, – 2) tem as mesmas coordenadas de $\overrightarrow{AB'}$, que se identifica com o número complexo – 1 – 2i. Observe que $\overrightarrow{AB'}$ = (– 1) · $\overrightarrow{AB}$, ou , v = (– 1) · u = (– 1) · (1, 2) = (– 1, – 2).

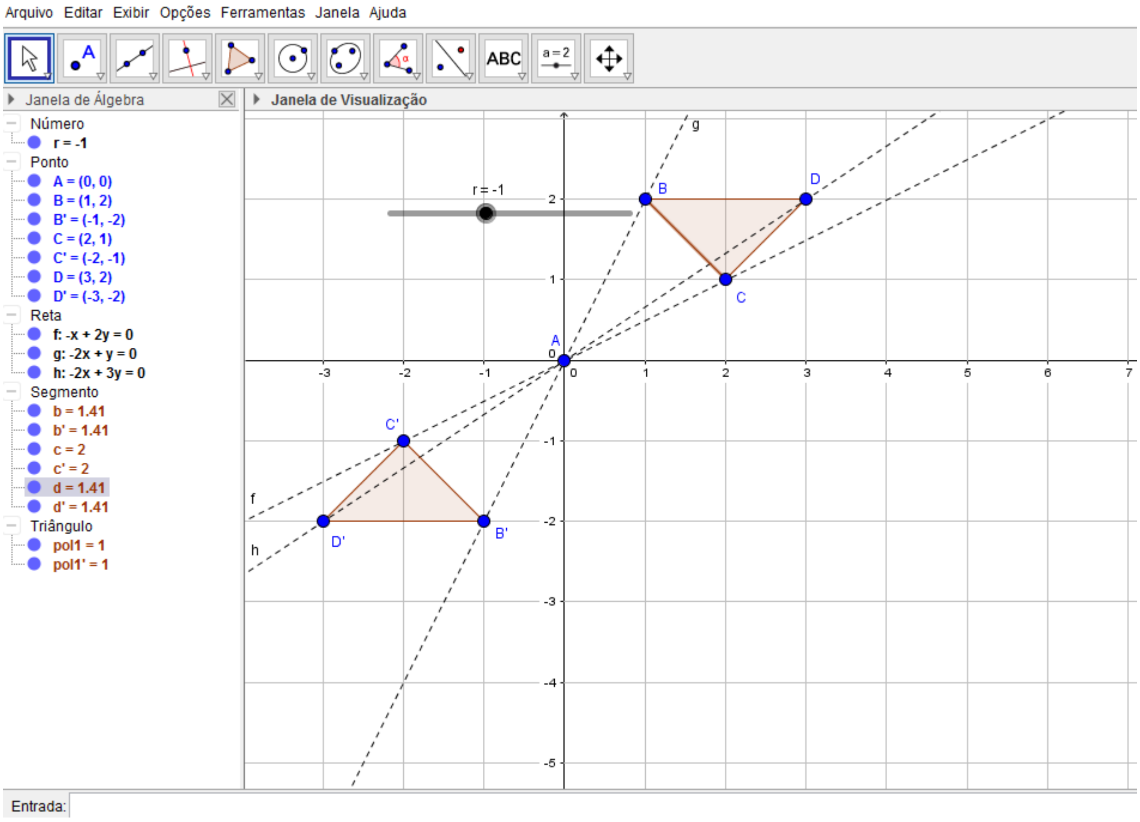
Assim, na figura 35 supra, o ponto A (0, 0) é o ponto de $\overline{BB'}$, ou seja, é um fato, conforme defende Wagner (2007, p. 78), onde ocorre uma "rotação de 180º em torno de um ponto", que neste caso é o ponto A.

Não obstante, como $\overrightarrow{AB'}$ = – $\overrightarrow{AB}$, ainda de acordo com Wagner (2007, p. 80), "neste caso, a transformação é uma simetria em relação ao ponto" A, isto é, uma rotação de 180º em torno de A.

Aproveitando os comandos e construções acerca da figura 35 acima, o professor pode inserir, no GeoGebra, retas passando pelos vértices dos triângulos e pelo centro de homotetia (ponto A).

Para tanto, pode, na "Barra de Ferramentas", clicar em "Reta" e selecionar dois pontos em questão. Pode clicar com botão direito no mouse em cima da "Janela de Visualização", clicar em "Propriedades", depois em "Estilo", e modificar, se desejável, a espessura e/ou estilo das retas, por exemplo, tracejadas. Observe a figura 36.

Figura 36 – Simetria em relação a A leva BCD em B’C’D’.



Fonte: Produção nossa.

Na figura 36 acima, observe que as retas passam pelo centro de homotetia e pelos vértices dos triângulos BCD e B’C’D’, que são semelhantes (LIMA, 2005; WAGNER, 2007). Observe ainda que os pontos C’, A e C são colineares, bem como os pontos B’, A e B também são, e os pontos D’, A e D estão alinhados.

APÊNDICE B – Texto complementar

Sim, os números complexos podem ser ensinados no Ensino Médio

Por José Gleisson da Costa Germano

Casualmente, alguém pode querer questionar: “Há, então quer dizer que o ensino de números complexos deve se restringir somente aos discentes que ingressão na área da Matemática, da Física, da Engenharia Elétrica, enfim, nas áreas científicas e/ou tecnológicas correlatas aquele assunto matemático? ”. Esta questão, por si só, é de natureza bastante polêmica.

Porém, temos a crença que o conhecimento científico é um direito de todos e que o próprio desenvolvimento da Humanidade se confunde com o desenvolvimento da Matemática.

Existem algumas críticas quanto ao ensino de números complexos no Ensino Médio. Determinados extremistas chegam até a apregoar a extinção desse assunto da Educação Básica. Um absurdo! Por que extirpar esse assunto de tão grande relevância da Educação Básica? Por que privar os estudantes do Ensino Médio de conhecerem, ainda que em seus aspectos básicos, o conjunto dos números complexos?

Uma das respostas que ecoam entre os defensores da retirada dos números complexos do Ensino Médio é o desconhecimento das aplicações práticas desse assunto, além do que, alguns colegas professores admitem terem dificuldades cognitivas com esse conteúdo (pasmem, alguns professores de Matemática assumem que não entendem esse assunto) e, como também não está presente explicitamente na Matriz de Referência do ENEM (que atualmente serve como elemento de entrada para a maioria das universidades públicas do Brasil), seria mais cômodo deixar de ensinar números complexos na Educação Básica.

Uma argumentação, todavia, não convincente, pois a Educação Básica deve cumprir seus objetivos legais, e a retirada desse assunto do currículo não ajudará nesse sentido. Pelo contrário, poderá agravar ainda mais a situação já delicada da Educação brasileira, em especial no que se refere a disciplina de Matemática.

Os números complexos, embora não estejam contemplados na matriz de referência da prova de Matemática do ENEM (algo que, para nós, precisa ser revisto) podem auxiliar na formação holístico-matemática do estudante, isto é, podem ajudar ao estudante perceber as várias conexões entre diversos assuntos dentro da própria Matemática (especialmente a integração envolvendo Álgebra e Geometria), bem como realizar as vinculações cabíveis com outras áreas do conhecimento que sejam correlatas.

Todavia, como já exposto acima, são muitas as aplicações dos números complexos nas mais variadas áreas do conhecimento e da vida humana.

Assim, acreditamos que o acesso aos conhecimentos dos números complexos, ainda que pelo menos seja de forma elementar, possa ser garantido aos estudantes da Educação Básica, visto que esse tema é de suma importância para a compreensão (básica) e utilização de muitos itens da vida cotidiana das pessoas, em especial para aqueles que prosseguirão seus estudos e trabalhos que alguma forma utilizarão tais conhecimentos.