



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

Receptores Tensoriais com Processamento Distribuído para Sistemas de Comunicações Cooperativos

Dissertação de Mestrado

Igor Flávio Simões de Sousa

FORTALEZA – CEARÁ
AGOSTO 2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

Receptores Tensoriais com Processamento Distribuído para Sistemas de Comunicações Cooperativos

Autor

Igor Flávio Simões de Sousa

Orientador

Prof. Dr. André Lima Férrer de Almeida

*Dissertação apresentada à
Coordenação do Programa de
Pós-graduação em Engenharia de
Teleinformática da Universidade
Federal do Ceará como parte dos
requisitos para obtenção do grau
de **Mestre em Engenharia de
Teleinformática.***

FORTALEZA – CEARÁ
AGOSTO 2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Pós-Graduação em Engenharia - BPGE

S696r Sousa, Igor Flávio Simões de.
Receptores tensoriais com processamento distribuído para sistemas de comunicações cooperativos /
Igor Flávio Simões de Sousa. – 2014.
60 f. : il. color. , enc. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2014.
Área de concentração: Sinais e Sistemas.
Orientação: Prof. Dr. André Lima Férrer de Almeida.

1. Teleinformática. 2. Processamento de sinais. 3. Simulação (Computadores). I. Título.

CDD 621.38



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
CAMPUS DO PICI, CAIXA POSTAL 6007 CEP 60.738-640
FORTALEZA – CEARÁ - BRASIL
FONE (+55) 85 3366-9467 – FAX (+55) 85 3366-9468

IGOR FLÁVIO SIMÕES DE SOUSA

RECEPTORES TENSORIAIS COM PROCESSAMENTO DISTRIBUÍDO PARA SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES COOPERATIVOS

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Teleinformática.

Área de concentração: Sinais e Sistemas.

Aprovada em: 01/08/2014.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. André Lima Ferrer de Almeida (Orientador)
Universidade Federal do Ceará


Prof. Dr. Tarcisio Ferreira Maciel
Universidade Federal do Ceará


Prof. Dr. Antônio Macilio Pereira de Lucena
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos uma abordagem distribuída para a estimação e detecção de dados para *uplink* em uma rede que emprega CDMA nos transmissores (usuários). A rede analisada pode ser representada por um grafo sem direção e conectado, em que os nós fazem uso de um algoritmo de estimativa distribuída baseado em consenso médio para realizar a estimativa conjunta de símbolos transmitidos e do canal, utilizando um receptor baseado em processamento tensorial. O receptor centralizado, operando em uma Estação Rádio Base central, e o receptor distribuído, operando em Micro Estações Rádio Base, têm seus desempenhos comparados em uma rede heterogênea. Em seguida, considerando-se uma rede assistida por repetidores, dois receptores tensoriais são propostos. Neste caso, fazemos uso de um processamento de sinais colaborativo entre os repetidores para a recuperação da informação transmitida pela fonte, antes de ser encaminhada para estação rádio base fazendo uso do protocolo *Decode-and-Forward*. O primeiro receptor é baseado na transmissão não codificada do tensor de dados reconstruído pelos repetidores a partir da estimativa de suas matrizes fatores. O segundo considera uma codificação tensorial dos símbolos previamente estimados nos repetidores antes da transmissão para estação rádio base. Os diferentes receptores propostos são comparados através de simulações computacionais em termos de convergência e taxa de erro de bit.

Key-words: Consenso médio, repetidores, decomposição tensorial, CDMA.

Abstract

In this dissertation, we present a distributed data estimation and detection approach for the uplink of a network that uses CDMA at transmitters (users). The analyzed network can be represented by an undirected and connected graph, where the nodes use a distributed estimation algorithm based on consensus averaging to perform joint channel and symbol estimation using a receiver based on tensor signal processing. The centralized receiver, developed for a central base station, and the distributed receiver, developed for micro base stations, have their performances compared in a heterogeneous network. Then, two tensor-based receivers are proposed to be used in a relay-assisted network. In this case, the proposed receiver makes use of collaborative signal processing among relays to recover sources information before forwarding to the base station using a *Decode-and-Forward* protocol. The first receiver is based on the uncoded transmission of the tensor data reconstructed by the relays from the estimation of their factors matrix. The second one considers a tensor encoding of symbols estimated at the relays before transmission to the base station. The different proposed receivers are compared by means of computer simulations in terms of convergence and bit error rate.

Key-words: Consenso average, relays, tensorial decomposition, CDMA.

à minha amada esposa Suelen e à meus familiares, Sandra, Vicente, Diego,
Iury, Liduina e Victor.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, por me dar o dom da vida e ser meu porto seguro em momentos dificeis. À minha amada esposa Suelen, pelo seu amor incondicional e sua grande paciência cujo conforto e apoio me manteve firme durante todo o mestrado.

Ao meus pais, Sandra e Vicente, pelo amor, carinho e dedicação. Aos meus irmãos, Diego, Iury e Joaquim pelo companheirismo. À Liduina pelo apoio e ao Victor pela amizade.

Ao professor Dr. André Lima Férrer de Almeida, por ter me aceitado como orientando, por todos seus brilhantes ensinamentos, pelo seu apoio e otimismo.

Ao professor Dr. Tarcisio Ferreira Maciel pelas disciplinas ministradas, pela sua ajuda durante o mestrado e por compor a banca desta dissertação.

Ao professor Dr. Antônio Macilio Pereira de Lucena, do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), pelo aceite em compor a banca desta dissertação e por suas correções propostas.

Aos professores Dr. Charles Casimiro Cavalcante e Dr. Rodrigo Cavalcanti pela oportunidade que me foi dada dentro do Grupo de Pesquisa em Telecomunicações Sem Fio (GTEL).

Aos meus companheiros de pós-graduação Diego Aguiar, Gilderlan Tavares, Italo Vitor, Juan Medeiros, Jordan Paiva, Paulo Ricardo, Rafael Guimarães e todos os companheiros do GTEL pela a amizade e o apoio. Aos meus companheiros de trabalho da Divisão de Suporte e Manutenção (DSM), em especial ao Amarildo Rolim, Fábio Alexandre e Marlon Botelho pelo apoio e incentivo.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação Cearense de Amparo à Pesquisa e Tecnologia do Estado de Ceará (FUNCAP) pelo apoio financeiro.

Agradeço também ao Ericsson pelo todo apoio prestado à Universidade

Federal do Ceará (UFC) em especial ao GTEL e ao Departamento de Engenharia de Teleinformática pela infraestrutura disponibilizada para estudo e pesquisa.

Sumário

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
1 Introdução	1
2 Revisão de Literatura	4
2.1 Álgebra Multilinear	4
2.1.1 Conceito Básico e Operações	5
2.1.2 Decomposições tensoriais	8
2.2 Técnica de Consenso Médio para Estimação Distribuída	12
2.2.1 Condição de Convergência	13
2.2.2 Matriz de Peso Metropolis-Hastings	15
2.3 Receptor Linear baseado em Consenso Médio	15
3 Receptor Tensorial Distribuído para Estimação Conjunta de Canal e Símbolos em uma HetNet	18
3.1 Modelo do Sistema	18
3.2 Receptor Centralizado	20
3.3 Receptor Distribuído	21
3.4 Simulações e Resultados	24
4 Receptor Tensorial Cooperativo com Processamento Distribuído nos Repetidores	30
4.1 Modelo do Sistema	30
4.2 Receptor LS-KRF	32
4.3 Receptor TUCKER-3	34
4.4 Simulações e Resultados	36
5 Conclusão e Perspectivas	44
Referências Bibliográficas	46

Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica de um tensor de 3 ^a ordem.	5
2.2	<i>Slices</i> de um tensor de 3 ^a ordem.	6
2.3	Decomposição PARAFAC de 3 ^a ordem.	11
2.4	<i>Downlink</i> em uma RSSF.	16
2.5	Diagrama de blocos do receptor ZF.	16
2.6	Diagrama de blocos do receptor ZF distribuído.	17
3.1	Comunicação multiusuário em uma HetNet.	18
3.2	Diagrama de blocos - BALS.	20
3.3	Diagrama de blocos - D-BALS.	23
3.4	Topologia de conexão entre as micro-ERBs.	25
3.5	Comparação entre receptor centralizado e distribuído.	26
3.6	Tempo médio de simulação vs SNR com diferentes configurações.	27
3.7	Comparação entre receptor centralizado e distribuído com diferente números de antenas receptoras e topologias.	28
3.8	Número médio de iterações do algoritmo ALS e tempo médio de simulação vs SNR para $T = 4$.	29
4.1	<i>Uplink</i> em um sistema de comunicação multiusuário auxiliado por repetidores.	31
4.2	Comparativo entre comunicação direta com a ERB e o uso de repetidores utilizando o receptor LS-KRF para número de iterações de consenso $T = 4$ com diferentes números de antenas receptoras.	39
4.3	Comparativo entre comunicação direta com a ERB e o uso de repetidores utilizando o receptor TUCKER-3 para número de iterações de consenso $T = 4$ em diferentes números de antenas receptoras.	42
4.4	Comparativo entre comunicação direta com a ERB e o uso de repetidores utilizando o receptor TUCKER-3 para número de iterações de consenso $T = 4$ em diferentes números de antenas receptoras.	43

Lista de Tabelas

3.1 Algoritmo PARAFAC - BALS	21
3.2 Algoritmo PARAFAC - D-BALS	24
4.1 Algoritmo LS-KRF	35
4.2 Algoritmo TUCKER-3 - BALS	37

Listas de Acrônimos

4-QAM	<i>4 Quadrature Amplitude Modulation</i>
ALS	<i>Alternating Least Squares</i>
AP	<i>Access Point</i>
AWGN	<i>Additive White Gaussian Noise</i>
BALS	<i>Bilinear Alternating Least Squares</i>
BER	<i>Bit Error Rate</i>
CA	<i>Consensus Averaging</i>
CA-MoM	Consenso Médio baseado no Método dos Multiplicadores
CA-SI	Consenso Médio em Única Iteração
CANDECOMP	<i>Canonical Decomposition</i>
CDMA	<i>Code Division Multiple Access</i>
CSI	<i>Channel State Information</i>
D-ALS	<i>Distributed Alternating Least Squares</i>
D-BALS	<i>Distributed Bilinear Alternating Least Squares</i>
DF	<i>Decode-and-Forward</i>
DS-CDMA	<i>Direct-Sequence Code Division Multiple Access</i>
ERB	Estação Rádio Base
EVD	<i>EigenValue Decomposition</i>
FD	Fonte-Destino
FR	Fonte-Repetidor
HetNet	<i>Heterogeneous Network</i>
HOSVD	<i>Higher-Order Singular Value Decomposition</i>
LS-KRF	<i>Least-Squares Khatri-Rao Factorization</i>

micro-ERB	Micro Estação Rádio Base
MIMO	<i>Multiple-Input and Multiple-Output</i>
PARAFAC	<i>PARAllel FACTor</i>
κ-rank	<i>Rank de Kruskal</i>
RD	Repetidor-Destino
RSSF	Rede de Sensores Sem-Fio
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i>
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
ZF	<i>Zero Forcing</i>

Lista de Publicações

► **Congresso**

Distributed Approach for Joint Symbol and Channel Estimation in Heterogeneous Cellular Networks. Publicado no XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT2013, 1-4 de Setembro de 2013, Fortaleza.

Capítulo 1

Introdução

A popularização de tecnologias de transmissão sem-fio, em especial a telefonia móvel, tem sido o motivo da criação de novos serviços e aplicações. Estes, por sua vez, geram a necessidade de obtenção de altas taxas de transmissão de dados e o desenvolvimento de sistemas mais confiáveis e resistentes à falhas e erros. Observando atentamente o caso da telefonia móvel, grandes distâncias e construções cada vez maiores aumentam o desvanecimento do sinal, que aliado as altas densidades de usuários, dificultam a decodificação e separação de fonte. Mesmo que se pense em aumentar o número de Estações Rádio Base (ERBs) para melhorar a cobertura e diminuir as distâncias entre usuários e ERB, há vários fatores quem impedem a execução desta solução: aumento nos custos por bit enviado, altos custos de instalação e manutenção das estações novas, falta de espaço físico para instalação, etc.

Uma técnica possível para mitigar estes problemas sem necessitar do aumento do número de ERBs é a utilização de repetidores. Estes necessitariam de menos recursos para instalação e manutenção por serem equipamentos mais simples do que os existentes nas ERBs e mesmo assim poderiam assistir aos usuários em suas transmissões [1]. Outra possibilidade seria a utilização Micro Estações Rádio Base (micro-ERBs) para fornecer uma cobertura mais orientada para as zonas deficientes enquanto a ERB fornece uma vasta cobertura [2].

Nos últimos anos, o desenvolvimento em Rede de Sensores Sem-Fio (RSSF) para monitoramento colaborativo, processamento de informação e controle tem atraído atenção considerável do meio científico. Especificamente, uma RSSF pode operar de forma autônoma, i.e. sem um centro de fusão que coleta e processa as medições/informações, e mesmo assim apresentando propriedades desejáveis, tais como robustez a falha de nó [3]. Com a não existência de uma central de controle, há a necessidade de cooperação entre os

nós da rede para estimar/detectar um parâmetro comum do sistema ou para tomar decisões confiáveis e, com a finalidade de manter ações coordenadas entre os diferentes nós, a troca de informação local é também necessária. O conceito de consenso médio (CA, do inglês *Consensus Averaging*) é usado para alcançar a cooperação.

Ao se observar o *downlink* em uma RSSF, um problema de consenso distribuído pode ser útil quando os nós da rede possuem interesse em uma mensagem comum enviada por um transmissor remoto, mas cada nó possui hardware e recursos limitados, tornando-se incapaz de decodificar a mensagem individualmente [4]. Nas duas últimas décadas, alguns pesquisadores têm realizado estudos sobre problemas de consenso distribuído aplicados a sistemas de comunicação [4–6]. Vários estudos teóricos têm sido desenvolvidos sobre o problema de decodificação iterativa de mensagens comuns enviadas através de canais de transmissão a um par de nós, por exemplo, em [6]. Alguns autores desenvolveram métodos para a estimação cooperativa entre mais de dois nós ponderando as informações recebidas pelos nós vizinhos [4, 5, 7–9]. Um método para obtenção dos pesos ótimos para as conexões entre vizinhos com a finalidade de obter uma rápida convergência do sistema foi proposta em [7]. Problemas envolvendo *Consensus Averaging* (CA) com falhas aleatórias nos *links* foi abordado em [9, 10], no quais os autores assumiram que as trocas entre os nós eram livres de ruído. Em [5] foram realizados estudos sobre a demodulação, detecção e estimativa utilizando problemas Consenso Médio em Única Iteração (CA-SI) e uma variação baseada no método dos multiplicadores (CA-MoM), no qual os autores consideraram ambos os algoritmos robustos a falha aleatória de nó e ruído nas trocas de informação.

A utilização de ferramentas de álgebra tensorial em sistemas de comunicação tem crescido ultimamente sendo aplicada para equalização cega em sistemas multiusuário [11, 12] e em problemas envolvendo redes cooperativas sem-fio utilizando protocolo cooperativo [13–15]. Em [13] é proposta uma técnica supervisionada para um sistema de múltiplas antenas (MIMO) com repetidores bidirecionais, com os nós repetidores podendo operar com múltiplas antenas, explorando a reciprocidade do canal o que torna difícil sua aplicação em sistemas MIMO com repetidores unidirecionais. Um receptor cego utilizando o algoritmo Levenberg-Marquardt foi proposto em [14]. Um modelo unificado para receptores cegos em redes cooperativas é proposto em [16] possuindo como dimensões exploradas pelo tensor as antenas receptoras, os ramos de cooperação e o período de símbolo. Um receptor distribuído baseado em tensor é proposto por [17] para a estimação e detecção conjunta

de canal e símbolo, respectivamente, em uma RSSF na qual faz-se o uso de Múltiplo Acesso por Divisão de Código de Sequência Direta (DS-CDMA).

Nesta dissertação é apresentada uma abordagem de estimação e detecção de dados de maneira distribuída para o *uplink* de uma rede celular multiusuário que emprega Múltiplo Acesso por Divisão de Código (CDMA) nas fontes transmissoras (usuários) e estimativa por consenso distribuído nos nós intermediários (repetidor/micro-ERB). Os nós intermediários devem cooperar entre si para recuperar os dados enviados pelos usuários sem a ajuda da ERB. Para a realização do processamento distribuído é utilizado o algoritmo distribuído de mínimos quadrados alternados (D-ALS, do inglês *Distributed Alternating Least Squares*) [17] que explora o modelo *PARAllel FACTor* (PARAFAC) [18, 19] do conjunto de dados recolhidos pela rede. Ao utilizar o sistema com as micro-ERBs, assumimos que estas possuem ligação direta com a central de comutação não havendo a necessidade de envio das informações obtidas para a ERB central. Por outro lado, os repetidores não possuem ligação direta com a central de comutação, assim faz-se necessário o envio das informações por eles estimadas e detectadas para a ERB central.

Este documento está organizado da seguinte forma:

Capítulo 2 – este capítulo fornece a base teórica utilizada na metodologia deste trabalho. Serão apresentados conceitos básicos de álgebra multilinear, de decomposições tensoriais e da técnica de *Consensus Averaging*. Trabalhos relacionados ao tema serão descritos neste capítulo.

Capítulo 3 – apresenta o modelo de receptor distribuído utilizando decomposição tensorial proposto em [17]. Os resultados obtidos por este receptor serão apresentados em diferentes configurações de topologia, número de antenas receptoras e de iterações de consenso com o objetivo de amparar os resultados do Capítulo 4.

Capítulo 4 – neste capítulo são formulados dois receptores baseados em decomposições tensoriais a serem utilizados em uma rede auxiliada por repetidores.

Capítulo 5 – neste capítulo serão apresentadas as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão de Literatura

Este capítulo irá apresentar os conceitos básicos utilizados para o desenvolvimento deste trabalho. Primeiro, será feita a exposição dos fundamentos de álgebra multilinear bem como as decomposições TUCKER-3 e PARAFAC. Em seguida, será feita uma revisão matemática sobre CA e critérios de convergência.

2.1 Álgebra Multilinear

Modelos matemáticos de sistemas reais, como circuitos elétricos, são obtidos com o uso da álgebra linear no qual os estados dos sistemas serão armazenados em vetores ou matrizes. Assim, pode-se fazer uso das decomposições matriciais, e.g. decomposição em autovalores (EVD, do inglês *EigenValue Decomposition*) e decomposição em valores singulares (SVD, do inglês *Singular Value Decomposition*) entre outras, para obter as informações desejadas do estado do sistema. Contudo, esta abordagem permite a manipulação de apenas duas diversidades simultaneamente [20], e.g. símbolos e usuários em um sistema de comunicação. Para representações de problemas com um maior grau de diversidade, i.e. símbolos, usuários e códigos, faz-se necessário o uso de estruturais matriciais multidimensionais. Embora a terminologia "tensor" possua distintas definições dependendo do domínio científico no qual é empregada, adotaremos a definição utilizada na quimiometria e processamento de sinais a qual aborda tensores como sinônimos de arranjos, ou ordenamentos multidimensionais de dados [21-23]. Assim, um tensor de 2^a ordem é uma matriz e um tensor de 1^a ordem é um vetor. Um tensor de 3^a ordem pode ser representado por um paralelepípedo como mostra a Figura 2.1.

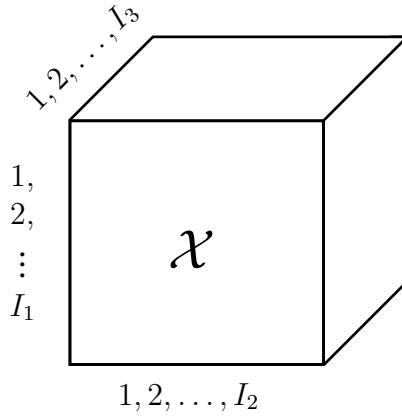


Figura 2.1: Representação gráfica de um tensor de 3^a ordem.

2.1.1 Conceito Básico e Operações

Álgebra multilinear é um ramo da álgebra linear a qual estuda os tensores de ordem superior a dois. As operações e decomposições envolvendo tensores podem ser vistas como generalizações destas quando os fatores são matrizes. Seja $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ um tensor de N -ésima ordem, podemos representar o seu (i_1, i_2, \dots, i_N) -ésimo componente escalar como

$$x_{i_1, i_2, \dots, i_N} = [\mathcal{X}]_{i_1, i_2, \dots, i_N}, \quad (2.1)$$

no qual $i_n|_{n=1,2,\dots,N}$ está associado à n -ésima dimensão do tensor \mathcal{X} . Algumas definições sobre tensores e produtos matriciais necessários para esta dissertação são apresentadas a seguir e foram baseadas em [20, 22, 24].

Definição 2.1 (Produto Interno) - *Sejam \mathcal{X} e \mathcal{Y} dois tensores de N -ésima ordem possuidores das mesmas dimensões, o produto interno entre eles é definido por:*

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} x_{i_1, i_2, \dots, i_N} y_{i_1, i_2, \dots, i_N}. \quad (2.2)$$

De forma análoga ao produto interno matricial, os tensores \mathcal{X} e \mathcal{Y} são considerados mutuamente ortogonais se $\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = 0$.

Definição 2.2 O produto externo entre dois tensores $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ e $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_M}$ de N -enésima e M -ésima ordem, respectivamente, é obtido por

$$[\mathcal{X} \circ \mathcal{Y}]_{i_1, i_2, \dots, i_N, j_1, j_2, \dots, j_M} = x_{i_1, i_2, \dots, i_N} y_{j_1, j_2, \dots, j_M}. \quad (2.3)$$

Assim o produto externo entre dois tensores tem como resultado um outro tensor no qual a ordem $(M + N)$ é a soma das ordens dos dois tensores argumentos. Podemos ver a equação (2.3) com uma generalização do produto interno entre dois vetores cujo resultado é uma matriz, i.e. um tensor de 2^a ordem.

Definição 2.3 O rank de um tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ corresponde ao menor número de tensores de rank-1 necessários para formar o tensor \mathcal{X} através de combinação linear. Se \mathcal{X} for um tensor de rank-1, podemos afirmar que ele pode ser obtido através do produto externo entre N vetores como

$$\mathcal{X} = \mathbf{w}^{(1)} \circ \mathbf{w}^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{w}^{(N)}, \quad (2.4)$$

em que $\mathbf{w}^{(l)} \in \mathbb{C}^{I_l \times 1}|_{l=1,2,\dots,N}$.

Definição 2.4 (Slice) - Ao fixarmos uma dimensão n qualquer de um tensor de 3^a ordem, obtemos uma matriz denominada fatia (do inglês slices) modo- n . Assim os slices de um tensor qualquer $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, (ver Figura 2.2) são

$$\mathbf{X}_{i_1..}|_{i_1=1,2,\dots,I_1} \text{ matrizes slices modo-1}, \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{X}_{.i_2..}|_{i_2=1,2,\dots,I_2} \text{ matrizes slices modo-2}, \quad (2.5b)$$

$$\mathbf{X}_{..i_3}|_{i_3=1,2,\dots,I_3} \text{ matrizes slices modo-3}. \quad (2.5c)$$

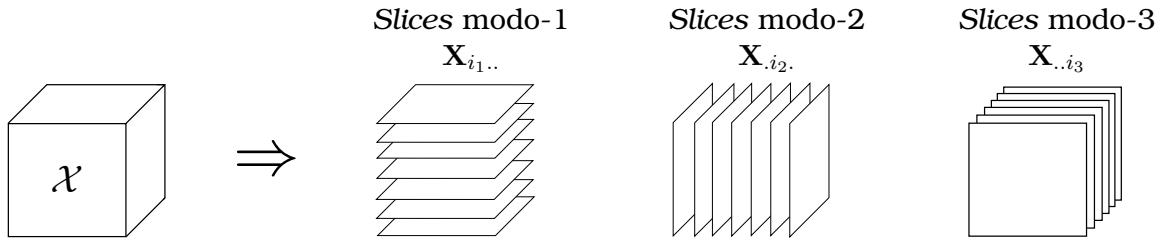


Figura 2.2: Slices de um tensor de 3^a ordem.

Definição 2.5 (Matriciação) - Seja $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ um tensor qualquer de 3^a ordem, é possível obter uma forma matriciada no modo- n de \mathcal{X} ao empilharmos as matrizes slices modo- n como

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1..} \\ \mathbf{X}_{2..} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{I_1..} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{.1..} \\ \mathbf{X}_{.2..} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{.I_2..} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{..1} \\ \mathbf{X}_{..2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{..I_3} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

com $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{C}^{I_1 I_2 \times I_3}$, $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}^{I_2 I_3 \times I_1}$ e $\mathbf{X}_3 \in \mathbb{C}^{I_3 I_1 \times I_2}$ representando as formas matriciadas no modo-1, modo-2 e modo-3 respectivamente. Podemos afirmar que toda a informação que o tensor \mathcal{X} possuía está contida em qualquer uma destas três formas matriciadas, as quais diferem apenas na forma como a informação está organizada. Esta organização dos dados de um tensor em

forma matricial permite um maior desempenho computacional ao realizarmos operações matemáticas [25]. A obtenção das formas matriciadas de um tensor não possui um método único [20]. O método utilizado neste trabalho é o mesmo abordado em [23].

Definição 2.6 A norma de Frobenius de um tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ é obtida de forma análoga a mesma operação em uma matriz como

$$\|\mathcal{X}\|_F = \sqrt{\langle \mathcal{X}, \mathcal{X} \rangle} = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_n=1}^{I_N} |x|_{i_1, i_2, \dots, i_n}^2} \quad (2.7)$$

Definição 2.7 (Produto modo- n) - Podemos realizar operações de multiplicação entre uma matriz e um tensor, contudo a segunda dimensão da matriz (número de colunas) deve ser igual a alguma dimensão do tensor. Este produto recebe a denominação de produto modo- n . Assim, seja $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ um tensor de N -ésima ordem e $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{J_n \times I_n}$. O produto modo- n entre \mathcal{X} e \mathbf{A} , simbolizado por $\mathcal{X} \times_n \mathbf{A}$, é

$$[\mathcal{X} \times_n \mathbf{A}]_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, j_n, i_{n+1}, \dots, i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} x_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n, i_{n+1}, \dots, i_N} a_{j_n, i_n}. \quad (2.8)$$

O resultado de um produto modo- n possui a mesma ordem do tensor original, com a nova n -ésima dimensão igual a J_n . O produto modo- n também é denominado de operador TUCKER [22].

Definição 2.8 O produto de Kronecker entre duas matrizes quaisquer $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times J}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{K \times L}$ é simbolizado por $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, e é descrito por

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1J}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1}\mathbf{B} & \dots & a_{IJ}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{IK \times JL}. \quad (2.9)$$

Definição 2.9 O produto de Khatri-Rao entre duas matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{I \times J}$ e $\mathbf{B}^{K \times J}$, simbolizado por $\mathbf{A} \diamond \mathbf{B}$, é dado por:

$$\mathbf{A} \diamond \mathbf{B} = \left[\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{a}_J \otimes \mathbf{b}_J \right] \in \mathbb{C}^{IJ \times J} \quad (2.10)$$

em que \mathbf{a}_j e \mathbf{b}_j para $j = 1, 2, \dots, J$ são as colunas das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} . O produto de Khatri-Rao também pode ser escrito como

$$\mathbf{A} \diamond \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \text{ diag}(\mathbf{A}_{1.}) \\ \mathbf{B} \text{ diag}(\mathbf{A}_{2.}) \\ \vdots \\ \mathbf{B} \text{ diag}(\mathbf{A}_{J.}) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

com $\text{diag}(\cdot)$ representando uma matriz diagonal construída a partir de seu vetor argumento.

Definição 2.10 (Produto de Hadamard) - O produto elemento-a-elemento entre duas matrizes $A \in \mathbb{C}^{I \times J}$ e $B \in \mathbb{C}^{I \times J}$, também conhecido como produto de Hadamard é representado por

$$A * B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \dots & a_{1J}b_{1J} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \dots & a_{2J}b_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1}b_{I1} & a_{I2}b_{I2} & \dots & a_{IJ}b_{IJ} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.1.2 Decomposições tensoriais

A primeira ideia a respeito de decomposições tensoriais foi apresentada por Hitchcock [26]. Contudo, seu desenvolvimento só foi exposto após alguns anos por Cattell [27] em 1944 e Tucker [28]. Em 1970, duas decomposições obtiveram um grande atenção da comunidade científica por possuírem critérios de unicidade bem definidos. Estas decomposições, *Canonical Decomposition* (CANDECOMP) e PARAFAC, foram apresentadas por Carroll & Chang [19] e Harshman [18], respectivamente. As decomposições CANDECOMP e PARAFAC são semelhantes, embora o desenvolvimento de ambas tenha ocorrido de modo independente entre os autores. Apesar dos trabalhos citados terem o enfoque na psicometria, atualmente são amplamente utilizados em outras áreas como processamento de sinais.

2.1.2.1 TUCKER-3

Desenvolvida por Ledyard Tucker [28], a decomposição TUCKER baseia-se em fatorar um tensor de dados em um outro tensor transformado por uma matriz através de suas dimensões. Assim, podemos representar matematicamente um tensor de 3^a ordem $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$, conhecido por TUCKER-3, utilizando o produto modo- n , como na Definição 2.7, por

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(3)}, \quad (2.13)$$

com $\mathbf{U}^{(1)} \in \mathbb{C}^{I_1 \times R_1}$, $\mathbf{U}^{(2)} \in \mathbb{C}^{I_2 \times R_2}$ e $\mathbf{U}^{(3)} \in \mathbb{C}^{I_3 \times R_3}$ são conhecidas pela denominação de matrizes fatores e $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{R_1 \times R_2 \times R_3}$ como tensor núcleo da decomposição.

A representação escalar da decomposição TUCKER-3 é dada

$$x_{i_1, i_2, i_3} = \sum_{r_1=1}^{R_1} \sum_{r_2=1}^{R_2} \sum_{r_3=1}^{R_3} g_{r_1, r_2, r_3} u_{i_1, r_1}^{(1)} u_{i_2, r_2}^{(2)} u_{i_3, r_3}^{(3)}. \quad (2.14)$$

Podemos representar um tensor TUCKER-3 por sua matrizes *slices*. Para isso é necessário rescrever (2.14) como

$$x_{i_1, i_2, i_3} = \left(\sum_{r_1=1}^{R_1} g_{r_1, r_2, r_3} u_{i_1, r_1}^{(1)} \right) \sum_{r_2=1}^{R_2} \sum_{r_3=1}^{R_3} u_{i_2, r_2}^{(2)} u_{i_3, r_3}^{(3)} \quad (2.15)$$

definindo assim uma combinação equivalente entre o núcleo e a matriz fator do modo-1 por

$$w_{i_1, r_2, r_3}^{(1)} = \sum_{r_1=1}^{R_1} g_{r_1, r_2, r_3} u_{i_1, r_1}^{(1)} = [\mathcal{G} \times_1 \mathbf{U}^{(1)}]_{i_1, r_2, r_3}, \quad (2.16)$$

com $w_{i_1, r_2, r_3}^{(1)}$ sendo o componente escalar do tensor transformado $\mathcal{W}^{(1)} \in \mathbb{C}^{I_1 \times R_2 \times R_3}$. Desta forma podemos obter a i -ésima matriz *slice* de \mathcal{X} por uma combinação entre as matrizes fatores $\mathbf{U}^{(2)}$ e $\mathbf{U}^{(3)}$ com a i -ésima matriz *slice* do tensor $\mathcal{W}^{(1)}$ como

$$\mathbf{X}_{i_1 ..} = \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{W}_{i_1 ..}^{(1)} \mathbf{U}^{(3)^T}. \quad (2.17)$$

Para a obtenção dos outros *slices* utilizaremos o mesmo método sobre (2.14) para determinar

$$w_{r_1, i_2, r_3}^{(2)} = \sum_{r_2=1}^{R_2} g_{r_1, r_2, r_3} u_{i_2, r_2}^{(2)}, \quad w_{r_1, r_2, i_3}^{(3)} = \sum_{r_3=1}^{R_3} g_{r_1, r_2, r_3} u_{i_3, r_3}^{(3)}, \quad (2.18)$$

como componentes escalar dos tensores transformados $\mathcal{W}^{(2)} \in \mathbb{C}^{R_1 \times I_2 \times R_3}$ e $\mathcal{W}^{(3)} \in \mathbb{C}^{R_1 \times R_2 \times I_3}$ respectivamente e, de forma semelhante à aplicada em (2.17) temos

$$\mathbf{X}_{..i_2} = \mathbf{U}^{(3)} \mathbf{W}_{..i_2}^{(2)} \mathbf{U}^{(1)^T}, \quad i_2 = 1, \dots, I_2, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{X}_{..i_3} = \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{W}_{..i_3}^{(3)} \mathbf{U}^{(2)^T}, \quad i_3 = 1, \dots, I_3. \quad (2.20)$$

Ao utilizarmos (2.17), (2.19) e (2.20), podemos expressar as formas matriciadas \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 e \mathbf{X}_3 por

$$\mathbf{X}_1 = (\mathbf{U}^{(1)} \otimes \mathbf{U}^{(2)}) \mathbf{G}_1 \mathbf{U}^{(3)^T} \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{X}_2 = (\mathbf{U}^{(2)} \otimes \mathbf{U}^{(3)}) \mathbf{G}_2 \mathbf{U}^{(1)^T} \quad (2.21b)$$

$$\mathbf{X}_3 = (\mathbf{U}^{(3)} \otimes \mathbf{U}^{(1)}) \mathbf{G}_3 \mathbf{U}^{(2)^T} \quad (2.21c)$$

com $\mathbf{G}_1 \in \mathbb{C}^{R_1 R_2 \times R_3}$, $\mathbf{G}_2 \in \mathbb{C}^{R_2 R_3 \times R_1}$ e $\mathbf{G}_3 \in \mathbb{C}^{R_3 R_1 \times R_2}$ sendo as formas matriciadas do tensor núcleo \mathcal{G} seguindo a Definição 2.5.

A decomposição TUCKER não possui unicidade quando não há conhecimento de nenhuma de suas matrizes fatores e/ou do tensor núcleo. Este fato ocorre devido a possibilidade de suas matrizes fatores sofrerem rotações que, quando compensadas pelo novo tensor núcleo, reconstruem o mesmo tensor original [29]. De forma a atingir a unicidade, podemos inserir algumas restrições no tensor núcleo, como o conhecimento de posições cujos elementos são nulos ou o conhecimento do próprio tensor núcleo, como é o caso de aplicações em sistemas de comunicações MIMO, em que o tensor núcleo pode modelar uma estrutura de codificação do sinal, a qual é conhecida pelo sistema (transmissor e receptor) [20].

2.1.2.2 PARAFAC

Podemos decompor um tensor de 3^a ordem $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ usando a decomposição PARAFAC [18], também conhecida como CANDECOMP [19], com sua forma escalar como

$$x_{i_1 i_2 i_3} = \sum_{r=1}^R u_{i_1, r}^{(1)} u_{i_2, r}^{(2)} u_{i_3, r}^{(3)}, \quad (2.22)$$

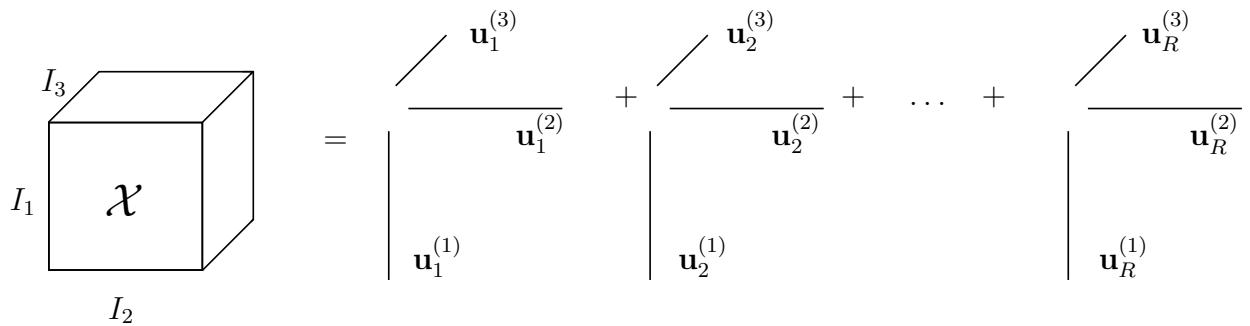
onde $\mathbf{U}^{(1)} = [a_{i_1, r}] \in \mathbb{C}^{I_1 \times R}$, $\mathbf{U}^{(2)} = [b_{i_2, r}] \in \mathbb{C}^{I_2 \times R}$ e $\mathbf{U}^{(3)} = [c_{i_3, r}] \in \mathbb{C}^{I_3 \times R}$ são as matrizes fatores do tensor \mathcal{X} . Ao compararmos (2.22) com (2.14) podemos ver que a decomposição PARAFAC é um caso específico de uma decomposição TUCKER-3 no qual o tensor núcleo $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{R \times R \times R}$ possui a super-diagonal principal com elementos iguais a 1 enquanto o restante dos elementos seriam 0. Podemos fazer esse comparativo por

$$\begin{aligned} x_{i_1, i_2, i_3} &= \sum_{r_1=1}^R \sum_{r_2=1}^R \sum_{r_3=1}^R g_{r_1 r_2 r_3} u_{i_1 r_1}^{(1)} u_{i_2 r_2}^{(2)} u_{i_3 r_3}^{(3)} \\ &= \sum_{r=1}^R g_{rrr} u_{i_1 r}^{(1)} u_{i_2 r}^{(2)} u_{i_3 r}^{(3)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

com $g_{rrr} = 1$ para todo r , o que permite simplificar (2.23) para (2.22).

A decomposição PARAFAC de um tensor de 3^a ordem em R componentes é ilustrada na Figura 2.3.

As matrizes *slices* do tensor \mathcal{X} , como descrito na Definição 2.4, podem ser

**Figura 2.3:** Decomposição PARAFAC de 3^a ordem.

expressas por [20, 23]

$$\mathbf{X}_{i_1..} = \mathbf{U}^{(2)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{i_1..}^{(1)}) \mathbf{U}^{(3)T}, i_1 = 1, \dots, I_1 \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{X}_{..i_2} = \mathbf{U}^{(3)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{..i_2}^{(2)}) \mathbf{U}^{(1)T}, i_2 = 2, \dots, I_2 \quad (2.24b)$$

$$\mathbf{X}_{...i_3} = \mathbf{U}^{(1)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{...i_3}^{(3)}) \mathbf{U}^{(2)T}, i_3 = 1, \dots, I_3 \quad (2.24c)$$

De acordo com a Definição 2.5 e usando (2.11), obtemos as formas matriciadas do tensor \mathcal{X} :

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(2)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{1..}^{(1)}) \mathbf{U}^{(3)T} \\ \mathbf{U}^{(2)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{2..}^{(1)}) \mathbf{U}^{(3)T} \\ \vdots \\ \mathbf{U}^{(2)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{I_1..}^{(1)}) \mathbf{U}^{(3)T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(2)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{1..}^{(1)}) \\ \mathbf{U}^{(2)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{2..}^{(1)}) \\ \vdots \\ \mathbf{U}^{(2)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{I_1..}^{(1)}) \end{bmatrix} \mathbf{U}^{(3)T} = (\mathbf{U}^{(1)} \diamond \mathbf{U}^{(2)}) \mathbf{U}^{(3)T} \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(3)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{1..}^{(2)}) \mathbf{U}^{(1)T} \\ \mathbf{U}^{(3)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{2..}^{(2)}) \mathbf{U}^{(1)T} \\ \vdots \\ \mathbf{U}^{(3)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{I_2..}^{(2)}) \mathbf{U}^{(1)T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(3)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{1..}^{(2)}) \\ \mathbf{U}^{(3)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{2..}^{(2)}) \\ \vdots \\ \mathbf{U}^{(3)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{I_2..}^{(2)}) \end{bmatrix} \mathbf{U}^{(1)T} = (\mathbf{U}^{(2)} \diamond \mathbf{U}^{(3)}) \mathbf{U}^{(1)T} \quad (2.25b)$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{1..}^{(3)}) \mathbf{U}^{(2)T} \\ \mathbf{U}^{(1)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{2..}^{(3)}) \mathbf{U}^{(2)T} \\ \vdots \\ \mathbf{U}^{(1)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{I_3..}^{(3)}) \mathbf{U}^{(2)T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{1..}^{(3)}) \\ \mathbf{U}^{(1)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{2..}^{(3)}) \\ \vdots \\ \mathbf{U}^{(1)} \operatorname{diag}(\mathbf{U}_{I_3..}^{(3)}) \end{bmatrix} \mathbf{U}^{(2)T} = (\mathbf{U}^{(3)} \diamond \mathbf{U}^{(1)}) \mathbf{U}^{(2)T} \quad (2.25c)$$

em que $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{C}^{I_1 I_2 \times I_3}$, $\mathbf{X}_2 \in \mathbb{C}^{I_2 I_3 \times I_1}$ e $\mathbf{X}_3 \in \mathbb{C}^{I_3 I_1 \times I_2}$.

A popularidade da decomposição PARAFAC deve-se às propriedades de

unicidade desta decomposição. Em 1977 Kruskal [30] obteve a condição suficiente para atingir a unicidade em tensores de 3^a ordem cujos elementos são números reais, a qual foi denominada condição de Kruskal em sua homenagem. Após mais de duas décadas, foi obtida a generalização para o conjunto dos números complexos [12] e para tensores de ordem superior a 3 [31].

Definição 2.11 O Rank de Kruskal (κ -rank) de uma matriz $A \in \mathbb{C}^{I \times J}$ é o número máximo κ para o qual todo conjunto de κ colunas seja linearmente independentes.

Teorema 2.1 (Unicidade) Para que seja obtida unicidade para uma decomposição PARAFAC deve-se garantir que a soma dos ranks das matrizes fatores obedeça a inequação dada

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \geq 2(R + 1), \quad (2.26)$$

com κ_1 , κ_2 e κ_3 o κ -rank das matrizes fatores $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ e $U^{(3)}$ respectivamente. Ao se respeitar essa condição é possível obter matrizes fatores únicas $\tilde{U}^{(1)}$, $\tilde{U}^{(2)}$ e $\tilde{U}^{(3)}$ que só diferem das originais por fator de escala e permutação em suas colunas. Assim podemos afirmar que

$$\tilde{U}^{(1)} = U^{(1)}\Pi\Delta_1, \quad \tilde{U}^{(2)} = U^{(2)}\Pi\Delta_2, \quad \tilde{U}^{(3)} = U^{(3)}\Pi\Delta_3, \quad (2.27)$$

em que Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 são matrizes diagonais $R \times R$ que possuem os fatores de escala das matrizes $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ e $U^{(3)}$, respectivamente, com $\Delta_1\Delta_2\Delta_3 = I_R$, e Π é uma matriz de permutação $R \times R$. Assim, caso as matrizes fatores possuam rank completo a condição descrita por (2.26) pode ser reescrita como

$$\min(I_1, R) + \min(I_2, R) + \min(I_3, R) \geq 2(R + 1) \quad (2.28)$$

2.2 Técnica de Consenso Médio para Estimação Distribuída

Na década de setenta, DeGroot [32] apresentou um algoritmo CA que descrevia, em um sistema invariante no tempo, a possibilidade de um grupo chegar ao consenso sobre um determinado parâmetro reunindo o valor inicial deste parâmetro em cada componente do grupo. Posteriormente essa abordagem foi expandida para os sistemas variantes no tempo [33, 34]. Este algoritmo baseia-se em trocas iterativas entre os elementos do grupo para a estimação de parâmetros comuns a eles, os quais também são denominados de variáveis de consenso. Contudo, deve-se observar a condição

de convergência necessária para que o algoritmo atinja a convergência em todos os elementos do grupo.

2.2.1 Condição de Convergência

O grupo descrito por DeGroot [32] pode ser representado como um grafo conectado e sem direção

$$G := \{E, I\} \quad (2.29)$$

com $I := \{1, \dots, I\}$ simbolizando o conjunto de nós do sistema, e $E \subset \{I \times I\}$ é o conjunto de arestas. Particularmente, o conjunto E relacionam as conectividades entre os nós, definindo uma lista de nós vizinhos. Em outras palavras, cada nó possui sua lista de nós vizinhos em que $N_i \subset I$ é o conjunto de nós vizinhos para o nó i .

Ao considerarmos um grafo como *sem direção*, estamos assumindo que os pares de nós não são ordenados. Assim, sejam i e j dois nós do conjunto I , temos que a conexão para (i, j) é a mesma para (j, i) [35]. Um grafo é considerado *conectado*, no sentido do espaço topológico, quando qualquer dois pares de nós pertencentes ao grafo possam ser conectados através de um caminho, existindo a possibilidade do uso de um caminho de múltiplos saltos [35].

Dado que cada nó i possui um valor escalar $x_i(t)|_{t=0} = x_i(0)$ como estado inicial, o grupo de valores iniciais do grafo pode ser organizado em um vetor no tempo discreto t denotado por $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_I(t)]^T$. A equação de atualização do consenso para $\mathbf{x}(t)$ é dada por

$$x_i(t+1) = w_{ii}x_i + \sum_{j \in N_i} w_{ij}x_j(t), \text{ para } i \in I \quad (2.30)$$

em que w_{ij} é o peso da contribuição de $x_j(t)$ para com o nó i . Assim, ao assumirmos que $w_{ij} = 0$ para $j \notin N_i$, podemos escrever a equação de atualização do consenso utilizando o vetor \mathbf{x} como

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t), \quad (2.31)$$

com a matriz $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{I \times I}$ sendo composta pelos pesos das contribuições entre os sensores.

Atendendo-se para (2.31), podemos obter $\mathbf{x}(t)$ a partir de um produto recursivo da matriz de peso \mathbf{W} com o estado anterior $\mathbf{x}(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t-1)$. Assim a relação do estado t com o estado inicial é descrita como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{W}^t \mathbf{x}(0). \quad (2.32)$$

Para que o sistema descrito em (2.32) converja de um valor inicial $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(t)$ tem que convergir para a média do vetor a qual é descrita por

$$\bar{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{1}^T \frac{\mathbf{x}(0)}{I} \right) \mathbf{1} = \left(\mathbf{1}^T \mathbf{1} \frac{\mathbf{x}(0)}{I} \right). \quad (2.33)$$

em que $\mathbf{1}$ representa um vetor em que todo elemento é igual a um. Obtendo o limite de $\mathbf{x}(t)$ temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{W}^t \mathbf{x}(0) = \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{1}}{I} \mathbf{x}(0). \quad (2.34)$$

Podemos afirmar que, para qualquer matriz de pesos escolhida, a convergência só será alcançada se for obedecido

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{W}^t = \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{1}}{I} \quad (2.35)$$

A partir de (2.35) Xiao & Boyd [7] obtiveram as condições necessárias e suficientes para a convergência assintótica em uma rede fixa. As provas da obtenção das condições de convergência podem ser conferidas em [7]. Estas condições são

$$\mathbf{1}^T \mathbf{W} = \mathbf{1}^T, \quad (2.36a)$$

$$\mathbf{W} \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad (2.36b)$$

$$\rho \left(\mathbf{W} - \frac{\mathbf{1} \mathbf{1}^T}{I} \right) < 1., \quad (2.36c)$$

em que $\rho(\cdot)$ é o raio espectral da matriz argumento.

Ao analisarmos as condições (2.36), podemos obter algumas informações. Podemos afirmar que $\mathbf{1}$ é o autovetor esquerdo de \mathbf{W} associado ao autovalor 1 observando (2.36a). Desta maneira tanto a soma quanto a média, dos valores contidos no vetor de nós é conservado em cada iteração t . A equação (2.36b) afirma que $\mathbf{1}$ é o autovetor direito de \mathbf{W} associado também ao autovalor 1 o que significa que $\mathbf{1}$ é fixo durante a iteração linear (2.32). Quando \mathbf{W} respeita as três condições descritas em (2.36) podemos afirmar que $\mathbf{1}$ é um autovalor da matriz \mathbf{W} e que ele limita em magnitude os demais autovalores de \mathbf{W} . Da mesma forma, podemos afirmar que se \mathbf{W} não possui elementos negativos ela será uma matriz duplamente estocástica.

2.2.2 Matriz de Peso Metropolis-Hastings

Existem inúmeras matrizes W de pesos que obedecem os critérios de convergência expostos em (2.36), mas cada escolha possui uma taxa de convergência distinta [8]. Com o propósito de acelerar a convergência das iterações de consenso, é importante realizar uma criteriosa escolha de W .

Visando a obtenção da matriz W , vários métodos foram criados. Em [7] os autores formularam um método para seleção de pesos ótimos, contudo este método pode ser irrealizável em redes grandes e dinâmicas.

Para evitar este problema, consideramos que cada nó calcula seu peso em relação ao nó vizinho localmente. Para isto será necessário que o nó conheça o número de conexões que seu vizinho possui, o qual denominamos grau de conectividade. Esta abordagem é conhecida como peso Metropolis-Hastings, ou peso dos graus locais. Logo, temos os elementos de W definidos por

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\max\{\delta_i, \delta_j\}}, & \text{se } (i, j) \in E \text{ e } i \neq j \\ 0, & \text{se } (i, j) \notin E \text{ e } i \neq j \end{cases}, \quad (2.37)$$

em que $\delta_i(\delta_j)$ representa o grau de conectividade do nó $i(j)$. De modo a satisfazer as condições de convergência expostas em (2.36), o elemento w_{ii} é calculado como

$$w_{ii} = 1 - \sum_{j \in N_i} w_{ij}. \quad (2.38)$$

2.3 Receptor Linear baseado em Consenso Médio

Nesta seção apresentaremos um receptor linear baseado em CA proposto em [4, 5]. Estes trabalhos consideram um sistema no qual há um ponto de acesso (AP) móvel equipado com M antenas que transmitem M sequencias de símbolos distintas para uma RSSF *ad hoc* composta por J sensores. Uma ilustração deste cenário é fornecida pela Figura 2.4. A informação transmitida pode ser organizada de forma a obtermos uma matriz $S \in \mathbb{C}^{M \times N}$, cujas entradas pertencem a um alfabeto finito \mathbb{A} em que N é o número de *slots* de tempo. O bloco de dados recebidos no j -ésimo sensor é representado por y_j e a relação de entrada/saída (por sensor) é

$$y_j = S^T h_j + \epsilon_j \quad (2.39)$$

com $h_j \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ representando o canal de desvanecimento plano entre o AP e o sensor j , e ϵ representa o ruído aditivo gaussiano branco (AWGN, do inglês *Additive White Gaussian Noise*) no j -ésimo sensor. É assumido que AWGN é

não correlacionado entre os sensores. Além disso, assumimos que o alfabeto de modulação e a informação de estado do canal (CSI, do inglês *Channel State Information*) são perfeitamente conhecidos.

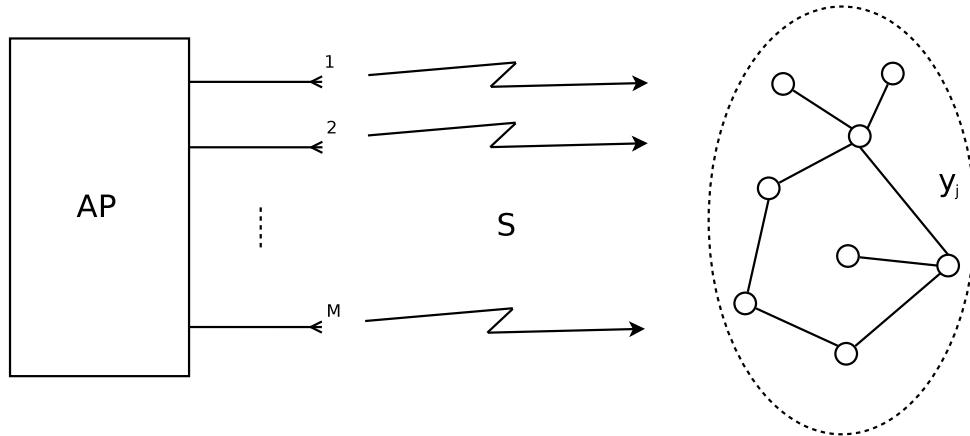


Figura 2.4: Downlink em uma RSSF.

Organizando os blocos de dados coletados por todos os sensores em um único vetor $\mathbf{y} := [\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_J^T]^T$ e definindo $\mathbf{s} = \text{vec}(\mathbf{S})$, onde o operador $\text{vec}()$ obtém um vetor empilhando as colunas da matriz argumento, obtemos a relação centralizada de entrada/saída por

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.40)$$

em que $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1^T, \mathbf{H}_2^T, \dots, \mathbf{H}_J^T]^T$, com $\mathbf{H}_j = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{h}_j^T$, com \mathbf{I}_N representando a matriz identidade de dimensões $N \times N$, e $\boldsymbol{\epsilon} := [\boldsymbol{\epsilon}_1^T, \boldsymbol{\epsilon}_2^T, \dots, \boldsymbol{\epsilon}_J^T]^T$. A Figura 2.5 apresenta o diagrama de blocos de um receptor *Zero Forcing* (ZF). Assumindo que o ruído é não correlacionado em (2.40), o vetor de símbolos estimado por um receptor ZF é

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ZF}} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{A}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|_F^2 = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{A}} \sum_{j=1}^J \|\mathbf{y}_j - \mathbf{H}_j \mathbf{s}\|_F^2. \quad (2.41)$$

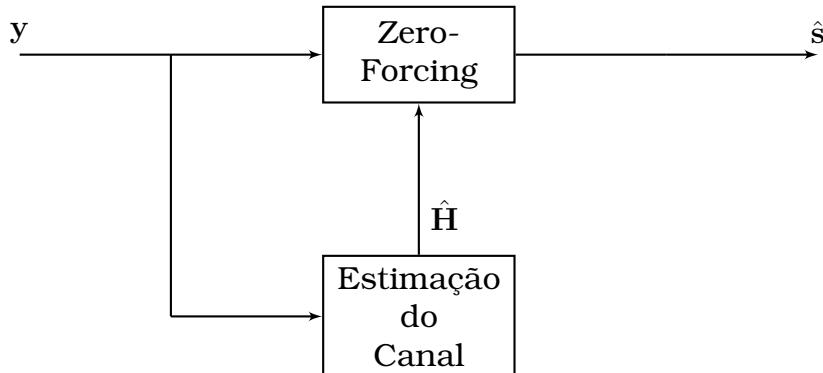


Figura 2.5: Diagrama de blocos do receptor ZF.

O objetivo é determinar a informação mínima suficiente que será comutada entre a vizinhança de um único salto para reduzir a sobrecarga na comunicação [5]. Podemos expandir (2.41) como

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}}_{\text{ZF}} &= \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{A}} \left\{ \sum_{j=1}^J (\mathbf{y}_j^T \mathbf{y}_j - \mathbf{y}_j^T \mathbf{H}_j \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{H}_j^T \mathbf{y}_j + \mathbf{s}^T \mathbf{H}_j^T \mathbf{H}_j \mathbf{s}) \right\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{A}} \left\{ \mathbf{s}^T \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{H}_j^T \mathbf{H}_j \right) \mathbf{s} - 2 \left(\sum_{j=1}^J \mathbf{H}_j^T \mathbf{y}_j \right) \mathbf{s} \right\}. \quad (2.42)\end{aligned}$$

Definimos a matriz de covariância do canal como $\Gamma_j := \mathbf{H}_j^T \mathbf{H}_j$ e o vetor de covariância cruzada entre o bloco recebido \mathbf{y}_j e o canal \mathbf{H}_j como $\varphi_j := \mathbf{H}_j^T \mathbf{y}_j$. Isto permite que (2.42) possa ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{s}}_{\text{ZF}} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{A}} \left\{ \mathbf{s}^T \left(\sum_{j=1}^J \Gamma_j \right) \mathbf{s} - 2 \left(\sum_{j=1}^J \varphi_j \right) \mathbf{s} \right\}. \quad (2.43)$$

Deste modo, com o intuito de resolver (2.43) localmente, basta fazer com que cada sensor adquira a média dos termos de covariância e covariância cruzada, obtido por

$$\bar{\varphi} := \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \varphi_j, \quad \text{e} \quad \bar{\Gamma} := \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \Gamma_j. \quad (2.44)$$

Neste contexto, o sistema passa a apresentar características de consenso distribuído. Logo, é possível aplicar um algoritmo CA para a obtenção dos valores médios de Γ e φ . Na Figura 2.6 podemos ver o diagrama de blocos de um receptor ZF distribuído.

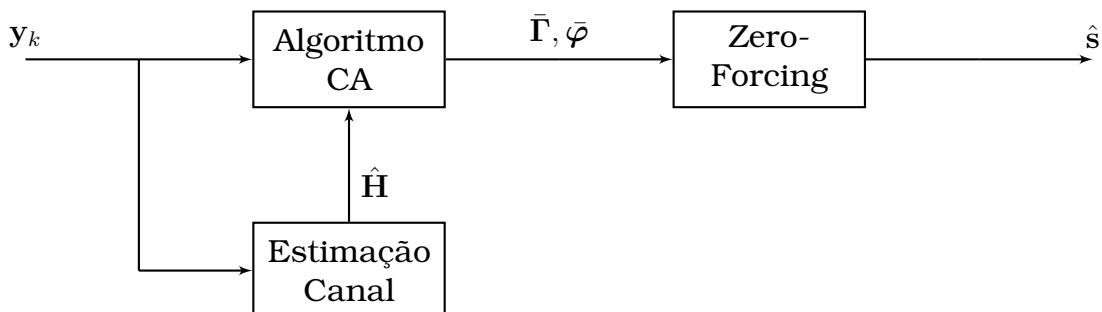


Figura 2.6: Diagrama de blocos do receptor ZF distribuído.

Capítulo 3

Receptor Tensorial Distribuído para Estimação Conjunta de Canal e Símbolos em uma HetNet

3.1 Modelo do Sistema

Consideramos o *uplink* em uma rede de comunicação sem-fio na qual exista uma ERB, Q usuários co-canal e K micro-ERBs. Cada equipamento de usuário e micro-ERB são dispositivos de uma antena enquanto a ERB é um dispositivo de K antenas. As micro-ERBs podem servir aos usuários com o objetivo de melhorar a performance, e.g., quanto a cobertura de célula e capacidade do sistema [2]. A Figura 3.1 apresenta o *uplink* aqui descrito.

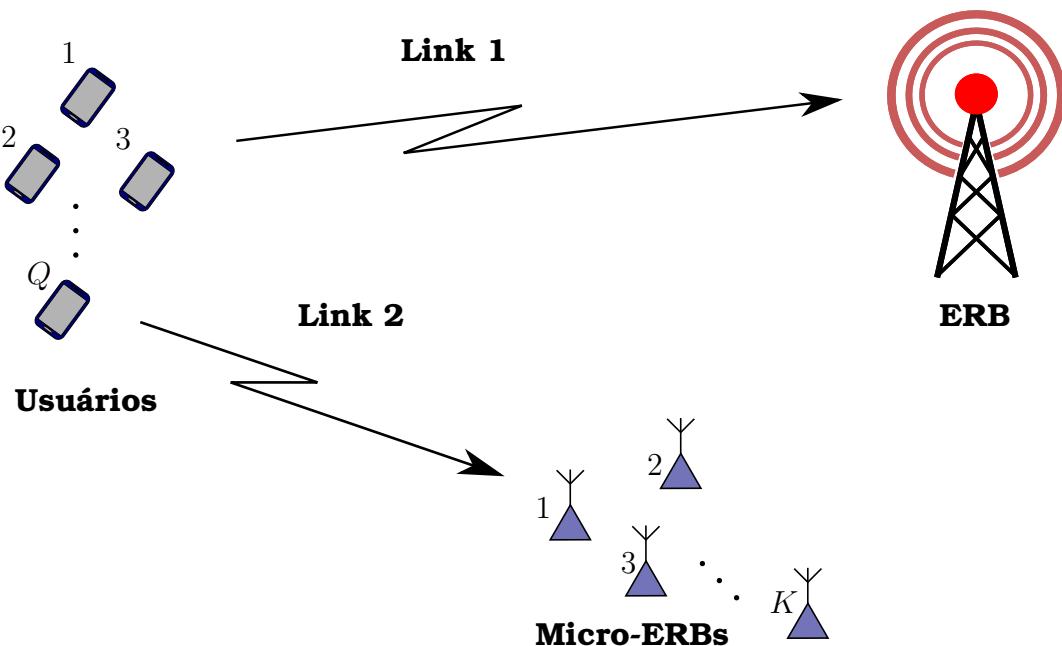


Figura 3.1: Comunicação multiusuário em uma HetNet.

Assumimos que os usuários podem se comunicar diretamente com a ERB ou com as micro-ERBs. Embora seja de menor porte, as micro-ERBs possuem as características semelhantes as da ERB referentes a entrega da mensagem dos usuários ao seu destino, eliminando a necessidade comunicação entre micro-ERB e ERB. Os usuários transmitem suas informações para as micro-ERBs ou para as antenas da ERB utilizando CDMA através de um canal com desvanecimento plano de Rayleigh com ruído do tipo AWGN. Para que seja possível a estimativa nas micro-ERBs, a cooperação entre elas é necessária. As trocas de informação entre as micro-ERBs são consideradas livres de ruído. O sinal banda base recebido por cada antena (a partir da ERB ou micro-ERB) é amostrado à taxa de *chip* e decomposto em suas componentes polifásicas. O sinal recebido pela k -ésima antena, no p -ésimo chip e no n -ésimo símbolo é

$$x_{k,p,n} = \sum_{q=1}^Q h_{k,q} c_{p,q} s_{n,q}, \quad (3.1)$$

em que $h_{k,q}$ é o coeficiente do canal entre o usuário q e a antena k , $c_{p,q}$ e $s_{n,q}$ são o código e o n -ésimo símbolo do usuário q , respectivamente. Por sua vez, cada usuário codifica sua sequência de informação $[s_{n,q}]_{n=1,\dots,N}$ usando o código $c_{p,q}$ antes da transmissão. Por comparação entre (2.22) e (3.1), obtemos as seguintes correspondências

$$(\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}) \leftrightarrow (\mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{S}), \quad (3.2a)$$

$$(I_1, I_2, I_3) \leftrightarrow (K, P, N). \quad (3.2b)$$

com $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{K \times Q}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{P \times Q}$ e $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{N \times Q}$. Consequentemente, por analogia com (2.25), podemos obter as formas matriciadas de $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{K \times P \times N}$ como

$$\mathbf{X}_1 = (\mathbf{H} \diamond \mathbf{C}) \mathbf{S}^T \in \mathbb{C}^{KP \times N}, \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{X}_2 = (\mathbf{C} \diamond \mathbf{S}) \mathbf{H}^T \in \mathbb{C}^{PN \times K}, \quad (3.3b)$$

$$\mathbf{X}_3 = (\mathbf{S} \diamond \mathbf{H}) \mathbf{C}^T \in \mathbb{C}^{NK \times P}. \quad (3.3c)$$

O processamento tensorial pode ser realizado de duas maneiras distintas:
i) *caso centralizado*, com a ERB reunindo a informação de todos os usuários, e
ii) *caso distribuído*, em que as micro-ERBs realizam o processamento do sinal

de forma distribuída. No primeiro caso, cada antena da ERB recebe uma cópia de $\mathbf{X}_{k..}$ o que permite a ela reconstruir o tensor \mathcal{X} para o processamento. No último, as micro-ERBs formam uma rede seguindo alguma topologia, na qual estimaram \mathcal{X} de forma distribuída. Em ambos os casos, a matriz de códigos \mathbf{C} é assumida como conhecida.

3.2 Receptor Centralizado

Existem diversos algoritmos para estimação das matrizes fatores de uma decomposição PARAFAC desde que seja respeitada a condição de Kruskal (Teorema 2.1). Como a matriz de código \mathbf{C} é considerada conhecida, faz-se necessário somente a estimativa das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{S} , as quais podemos obter ao explorarmos as formas matriciadas (3.3a) e (3.3b), respectivamente. Com este objetivo, podemos utilizar o algoritmo bilinear de mínimos quadrados alternados (BALS, do inglês *Bilinear Alternating Least Squares*) que busca minimizar de forma alternada as seguintes funções custo

$$\hat{\mathbf{S}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{S}}} \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{Y}\hat{\mathbf{S}}^T\|_F^2, \quad (3.4a)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \arg \min_{\hat{\mathbf{H}}} \|\mathbf{X}_2 - \mathbf{Z}\hat{\mathbf{H}}^T\|_F^2, \quad (3.4b)$$

em que $\mathbf{Y} = (\hat{\mathbf{H}} \diamond \mathbf{C})$ e $\mathbf{Z} = (\mathbf{C} \diamond \hat{\mathbf{S}})$. Na Figura 3.2 é apresentado o diagrama de blocos do algoritmo.

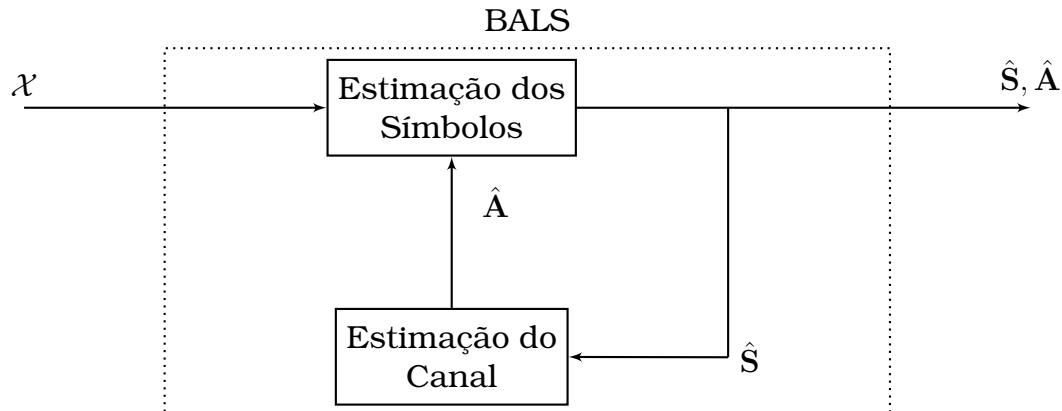


Figura 3.2: Diagrama de blocos - BALS.

A convergência é alcançada quando as funções custo (3.4) na i -ésima iteração não apresenta diferença substancial em relação ao seu valor obtido na iteração $i - 1$. Existem diversos métodos para a obtenção inicial da matriz $\hat{\mathbf{H}}$, e.g. o uso de decomposições em valores singulares de ordem superior (HOSVD, do inglês *Higher-Order Singular Value Decomposition*). Objetivando a

Tabela 3.1: Algoritmo PARAFAC - BALS

-
- Passo 1: Define $i=0$;
- Passo 2: Inicializa aleatoriamente $\hat{\mathbf{H}}(i)$;
- Passo 3: Define $i = i + 1$;
- Passo 4: Utiliza \mathbf{X}_1 para encontrar uma estimativa de mínimos quadrados de $\hat{\mathbf{S}}(i)$:
 $\mathbf{Y} = (\hat{\mathbf{H}}(i-1) \diamond \mathbf{C})$;
 $\hat{\mathbf{S}}(i) = [(\mathbf{Y}^H \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^H \mathbf{X}_1]^T$;
- Passo 5: Utiliza \mathbf{X}_2 para encontrar uma estimativa de mínimos quadrados de $\mathbf{H}(i)$:
 $\mathbf{Z} = (\mathbf{C} \diamond \hat{\mathbf{S}}(i))$;
 $\hat{\mathbf{H}} = [(\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H \mathbf{X}_2]^T$;
- Passo 6: Repetir os passos 3-5 até que seja atingido o critério de convergência.
-

simplicidade do algoritmo a matriz $\hat{\mathbf{H}}$ foi inicializada de aleatoriamente.

3.3 Receptor Distribuído

O conjunto de dados recebidos pelas micro-ERBs nos permite obter um tensor \mathcal{X} que obedece as propriedades da decomposição PARAFAC. Contudo, isso ocorre somente quando analisamos os dados recebidos por cada micro-ERB de forma centralizada, o que não ocorre em nosso sistema. Deste modo, cada micro-ERB possuirá somente o sinal recebido em sua antena, impedindo a decodificação local. Deste modo, é requerida a troca de informações entre as micro-ERBs de forma a permitir o processamento do tensor recebido. O algoritmo aqui descrito é uma derivação do proposto por Kibangou & De Almeida em [17]. Assim, a informação recebida pela k -ésima micro-ERB pode ser interpretada como a k -ésima matriz *slice* do tensor \mathcal{X} dada por

$$\mathbf{X}_{k..} = \begin{bmatrix} x_{k,1,1} & x_{k,1,2} & \dots & x_{k,1,N} \\ x_{k,2,1} & x_{k,2,2} & \dots & x_{k,2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k,P,1} & x_{k,P,2} & \dots & x_{k,P,N} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{P \times N}. \quad (3.5)$$

Para que seja possível a realização do processamento nas micro-ERBs, é necessário que estas troquem, entre si, informações que as permitam estimar as matrizes $\hat{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{S}}$. Usando (2.11) e a propriedade da norma de Frobenius $\|\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_K\|_F^2 = \sum_{k=1}^K \|\mathbf{X}_k\|_F^2$ [36], é possível reescrever a função custo (3.4a) em

relação as informações obtidas nas K micro-ERBs como

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}} &= \arg \min_{\hat{\mathbf{S}}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1..} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{k..} \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \operatorname{diag}(\hat{\mathbf{H}}_{1..}) \\ \vdots \\ \mathbf{C} \operatorname{diag}(\hat{\mathbf{H}}_{K..}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} \hat{\mathbf{S}}^T \right\|_F^2 \\ &= \arg \min_{\hat{\mathbf{S}}} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{X}_{k..} - \mathbf{Y}_k \hat{\mathbf{S}}^T\|_F^2,\end{aligned}\quad (3.6)$$

em que $\mathbf{Y}_k = \mathbf{C} \operatorname{diag}(\mathbf{H}_{k..})$. Logo, podemos minimizar a soma representada em (3.6) para estimar a matriz de símbolos. Isto posto, a equação de estimação de pode ser obtida como

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}^T &= (\mathbf{Y}^H \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^H \mathbf{X}_1 \\ &= \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{Y}_k^H \mathbf{Y}_k \right)^{-1} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{Y}_k^H \mathbf{X}_{k..} \right).\end{aligned}\quad (3.7)$$

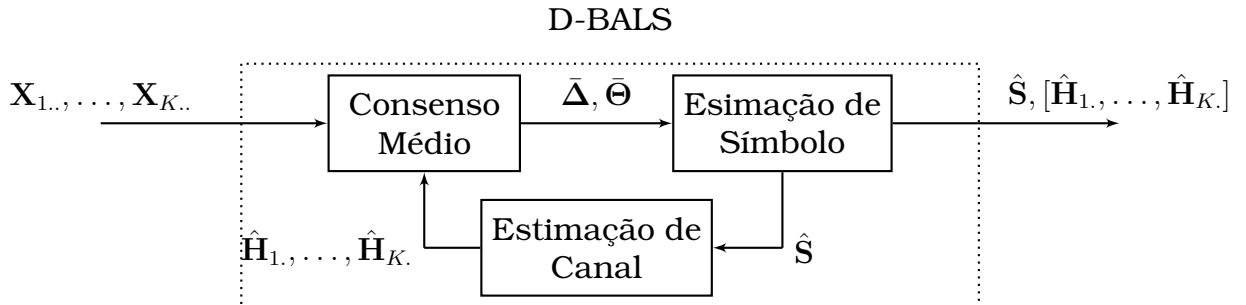
Nesta situação, temos que considerar dois problemas de CA, $\Delta_k(0) = \mathbf{Y}_k^H \mathbf{Y}_k$ e $\Theta_k(0) = \mathbf{Y}_k^H \mathbf{X}_{k..}$ na troca $t = 0$. Ao permitirmos que estas matrizes sejam trocadas através da rede, a cada iteração t , cada micro-ERB atualiza os valores de suas matrizes por uma soma ponderada das discrepâncias locais, ou seja, a diferença entre os valores de suas matrizes com as obtidas de seus vizinhos. As equações de atualização são dadas por

$$\Delta_k(t+1) = \Delta_k(t) + \sum_{j \in \mathbb{N}_k} w_{k,j} (\Delta_j(t) - \Delta_k(t)), \quad (3.8)$$

$$\Theta_k(t+1) = \Theta_k(t) + \sum_{j \in \mathbb{N}_k} w_{k,j} (\Theta_j(t) - \Theta_k(t)), \quad (3.9)$$

Este procedimento continua até que Δ_k e Θ_k converja para suas médias, a partir da qual uma estimação comum é obtida em cada micro-ERB. O diagrama de blocos do algoritmo distribuído bilinear de mínimos quadrados alternados (D-BALS, do inglês *Distributed Bilinear Alternating Least Squares*) pode ser visualizado na Figura 3.3.

A estimação do vetor de canal de cada micro-ERB é feita de forma local após a estimação da matriz de símbolos. Para obter a equação de estimação local do vetor de canal de cada micro-ERB, $\mathbf{H}_{k..}$ é preciso utilizar a propriedade

**Figura 3.3:** Diagrama de blocos - D-BALS.

$\text{vec}(\mathbf{ADB}) = (\mathbf{B}^T \diamond \mathbf{A}) \text{vecd}(\mathbf{D})$ [37], em que o operador $\text{vecd}(\cdot)$ transforma em vetor os elementos da diagonal principal do argumento. Deste modo, podemos reescrever a forma matriciada (3.3b) como

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_2 &= [\text{vec}(\mathbf{X}_{1..}^T), \text{vec}(\mathbf{X}_{2..}^T), \dots, \text{vec}(\mathbf{X}_{K..}^T)] \\
&= [\text{vec}(\mathbf{C} \text{diag}(\mathbf{H}_{1..}) \mathbf{S}^T), \text{vec}(\mathbf{C} \text{diag}(\mathbf{H}_{2..}) \mathbf{S}^T), \dots, \text{vec}(\mathbf{C} \text{diag}(\mathbf{H}_{K..}) \mathbf{S}^T)] \\
&= [(\mathbf{S} \diamond \mathbf{C}) \text{vec}(\mathbf{H}_{1..}), (\mathbf{S} \diamond \mathbf{C}) \text{vec}(\mathbf{H}_{2..}), \dots, (\mathbf{S} \diamond \mathbf{C}) \text{vec}(\mathbf{H}_{K..})] \\
&= (\mathbf{S} \diamond \mathbf{C}) [\text{vec}(\mathbf{H}_{1..}), \text{vec}(\mathbf{H}_{2..}), \dots, \text{vec}(\mathbf{H}_{K..})] \\
&= (\mathbf{S} \diamond \mathbf{C}) \mathbf{H}^T.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ao empregarmos a propriedade da norma de Frobenius $\|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K)\|_F^2 = \sum_{k=1}^K \|\mathbf{x}_k\|_F^2$ [36], podemos reescrever a função custo (3.4b) em relação à informação obtida em cada micro-ERB como

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{H}} &= \arg \min_{\hat{\mathbf{H}}_{1..}, \dots, \hat{\mathbf{H}}_{K..}} \left\| [\text{vec}(\mathbf{X}_{1..}^T), \text{vec}(\mathbf{X}_{2..}^T), \dots, \text{vec}(\mathbf{X}_{K..}^T)] - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S} \text{diag}(\mathbf{C}_{1..}) \\ \vdots \\ \mathbf{S} \text{diag}(\mathbf{C}_{P..}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} [\mathbf{H}_{1..}^T, \dots, \mathbf{H}_{K..}^T] \right\|_F^2 \\
&= \arg \min_{\hat{\mathbf{H}}_{1..}, \dots, \hat{\mathbf{H}}_{K..}} \sum_{k=1}^K \left\| \text{vec}(\mathbf{X}_{k..}^T) - \mathbf{Z} \mathbf{H}_{k..}^T \right\|_F^2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Observando a equação (3.11) podemos estimar localmente os coeficientes de canal da micro-ERB k como $\hat{\mathbf{H}}_{k..}^T = (\mathbf{C} \diamond \hat{\mathbf{S}}_k)^\dagger \text{vec}(\mathbf{X}_{k..}^T)$ em que $\hat{\mathbf{S}}_k$ é a estimativa da matriz de símbolo na micro-ERB k . Na Tabela 3.2 é apresentado o resumo do algoritmo D-BALS.

Tabela 3.2: Algoritmo PARAFAC - D-BALS

-
- Passo 1: Para $k = 1, \dots, K$ faça:
 Inicialize aleatoriamente $\hat{\mathbf{H}}_k. \in \mathbb{C}^{1 \times Q}$;
 Calcule $\mathbf{Y}_k = \mathbf{C} \operatorname{diag}(\hat{\mathbf{H}}_k.)$,
 $\Delta_k(0) = \mathbf{Y}_k^H \mathbf{Y}_k$ e $\Theta_k(0) = \mathbf{Y}_k^H \mathbf{X}_{k..}$;
- Passo 2: Execute o algoritmo de consenso sobre Δ e Θ :
 Para $t = 0, 1, \dots, T - 1$
 $\Delta_k(t + 1) = \Delta_k(t) + \sum_{j \in \mathbb{N}_k} w_{k,j} (\Delta_j(t) - \Delta_k(t))$;
 $\Theta_k(t + 1) = \Theta_k(t) + \sum_{j \in \mathbb{N}_k} w_{k,j} (\Theta_j(t) - \Theta_k(t))$;
- Passo 3: Defina $\Delta_k(0) = \Delta_k(T)$ e $\Theta_k(0) = \Theta_k(T)$;
- Passo 4: Calcule a estimativa local de \mathbf{S} :
 $\hat{\mathbf{S}}^T = \Delta_k^{-1}(0) \Theta_k(0)$;
- Passo 5: Calcule a estimativa local do canal $\hat{\mathbf{H}}_k.$:
 $\hat{\mathbf{H}}_k^T = (\mathbf{C} \diamond \hat{\mathbf{S}}_k)^{\dagger} \operatorname{vec}(\mathbf{X}_{k..}^T)$;
- Passo 6: Retorne ao Passo 2 até convergir.
-

3.4 Simulações e Resultados

Nesta seção, os resultados das simulações computacionais são disponibilizados para avaliação do algoritmo de recepção tensorial em uma rede distribuída. Objetivando realizar o comparativo entre os métodos centralizados e distribuídos de forma mais simples possível o canal utilizado possuí somente o desvanecimento plano. Contudo, em sistemas com taxas de transmissão elevadas é comum se deparar com canal seletivo em frequência. Consideramos que as micro-ERBs formam um grafo sem direção e conectado. A análise é feita em função da relação sinal-ruído (SNR, do inglês *Signal-to-Noise Ratio*) do sistema para cada um dos receptores apresentados nas seções 3.2 e 3.3, considerando vários cenários constituídos da variação do número de antenas receptoras, iterações de consenso e topologia adotadas pelas micro-ERBs. Todas as simulações exprimem o desempenho médio obtido a partir de 500 simulações de Monte Carlo independentes. Admitimos o conhecimento da matriz de código \mathbf{C} em ambos os receptores sendo gerada com números complexos aleatórios possuindo *rank* coluna completo e os símbolos transmitidos são obtidos utilizando a modulação 4-QAM. Na Figura 3.4 é apresentada o padrão das topologias de conexão utilizadas pelas micro-ERBs.

A Figura 3.5 apresenta a comparação de desempenho entre o receptor distribuído e o centralizado em diferentes números de iterações de consenso T com as micro-ERBs assumindo as duas topologias apresentadas na Figura 3.4 para $Q = 12$ usuários, $K = 4$ antenas, $P = 12$ códigos e $N = 50$ símbolos.

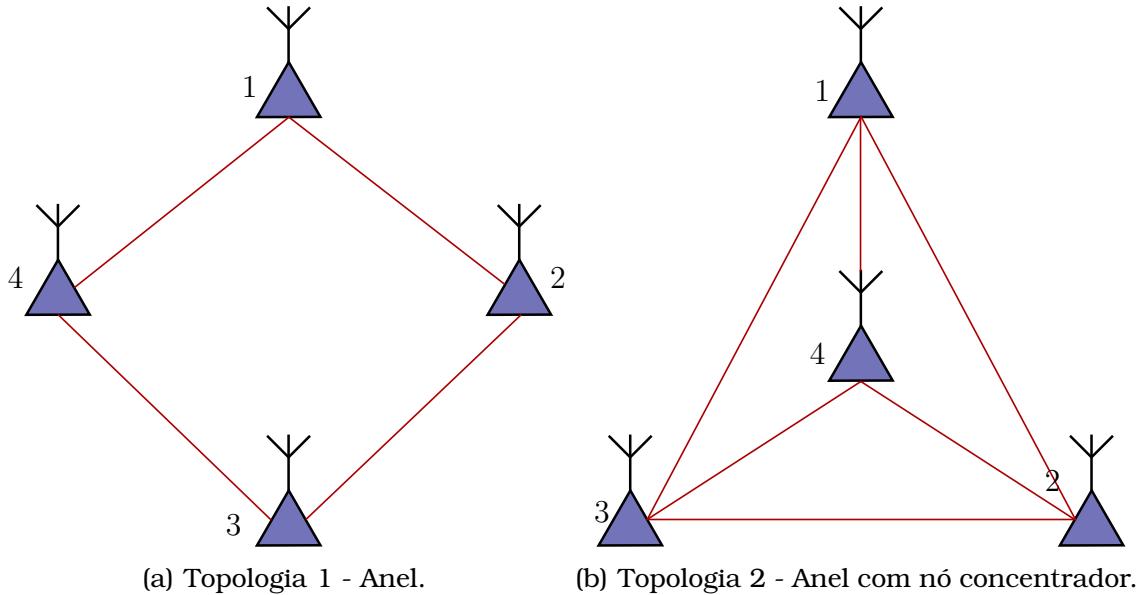
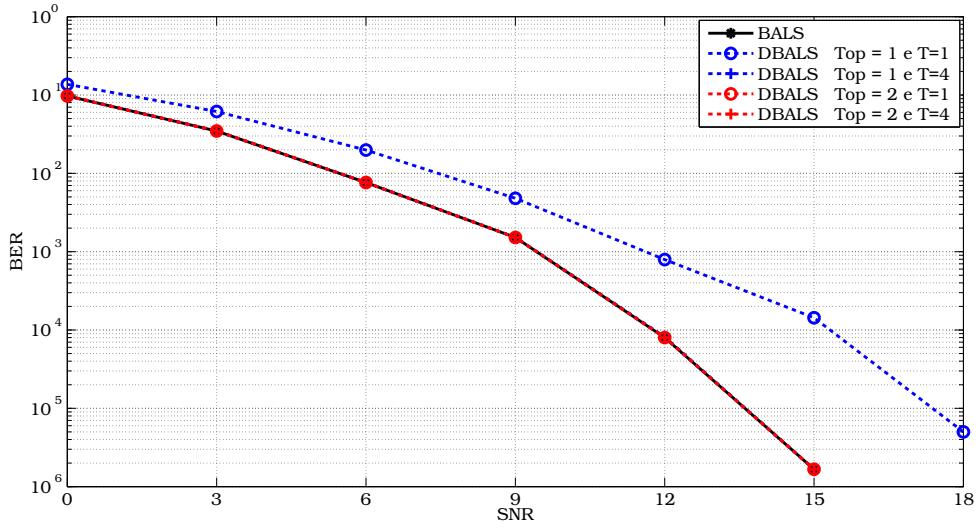


Figura 3.4: Topologia de conexão entre as micro-ERBs.

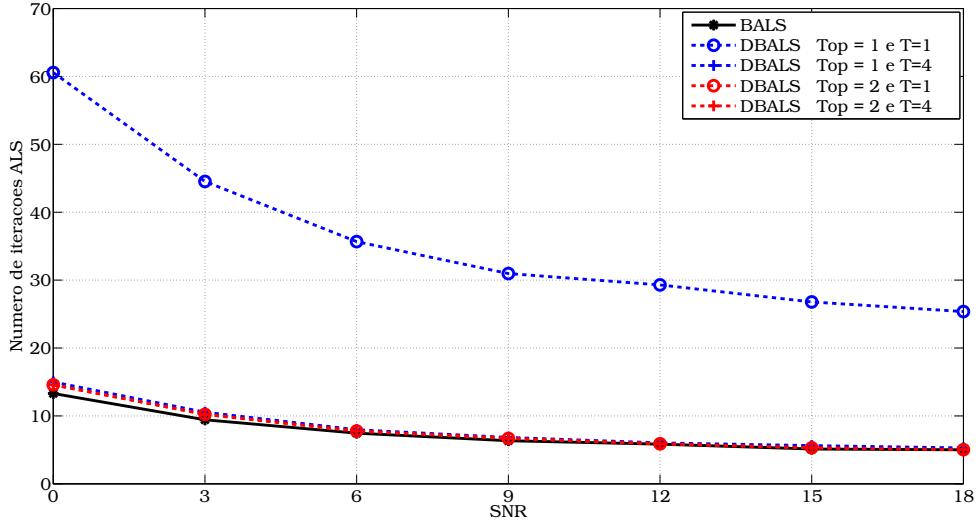
Podem ser vistas na Figura 3.5(a) as curvas de taxa de erro de bit (BER, do inglês *Bit Error Rate*) para ambos os receptores com o receptor distribuído obtendo uma excelente aproximação para a topologia 1 com $T = 4$ iterações de consenso e para a topologia 2 em ambos número de iterações de consenso. A topologia 2 obtém um melhor resultado com um número menor de iterações por esta existir um nó que possui conexão com todos os demais, facilitando a obtenção dos valores médios das variáveis de consenso Δ_k e Θ_k . Contudo, é possível obter um resultado similar utilizando a topologia 1 quando o número de iterações de consenso é aumentado. Isso ocorre pois todos os nós obtém a informação de nós não vizinhos ao receber os valores das variáveis de consenso calculados na iteração anterior. É apresentado na Figura 3.5(c) uma ampliação das curvas da Figura 3.5(a) com a SNR igual a 12 dB onde é possível visualizar com mais exatidão as curvas de erros que estão sobrepostas. Mesmo com um número maior de iterações de consenso a topologia 1 não consegue superar a topologia 2.

A Figura 3.5(b) apresenta o número de iterações média do *Alternating Least Squares* (ALS). Observando o gráfico podemos afirmar que para $T = 1$ a topologia 1 necessita de um número maior de iterações ALS para que o algoritmo convirja, pois os valores obtidos das variáveis de consenso está mais distante da média o que atrapalha o ALS. Ao analisarmos o receptor distribuído para a topologia 1, com $T = 4$, e topologia 2, com ambos os números de iterações de consenso, podemos afirmar que os resultados obtidos são muito próximos dos obtidos com o receptor centralizado com uma pequena diferença que pode ser visualizada na Figura 3.5(d).

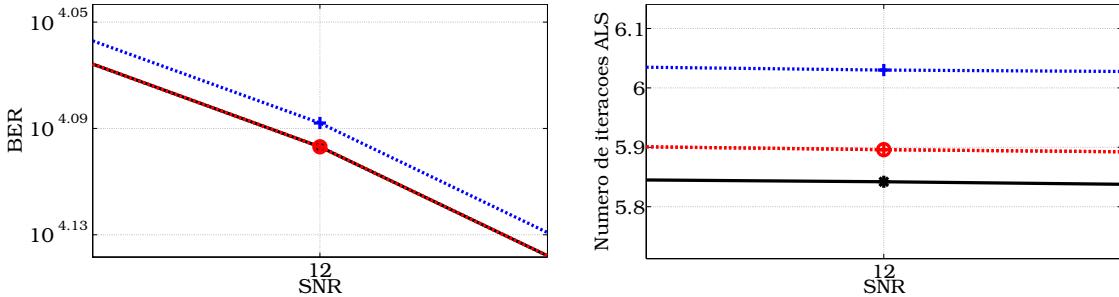
O tempo médio de simulação para cada valor de SNR é apresentado pela



(a) BER vs SNR para número diferente de iterações de consenso e topologias.



(b) Número de Iterações do algoritmo ALS vs SNR.



(c) BER vs SNR ampliado em SNR=12 dB. (d) Número de Iterações do algoritmo ALS vs SNR ampliado em SNR=12 dB.

Figura 3.5: Comparação entre receptor centralizado e distribuído.

Figura 3.6. Como mostrado na Figura 3.5(b), a topologia 1 para $T = 1$ possui uma média de 30 iterações do algoritmo ALS para que atinja o critério de convergência o que eleva o tempo de simulação. As outras três configurações possuem número de iterações do algoritmo ALS semelhantes, contudo a topologia 2 para $T = 1$ possui o menor tempo de simulação por realizar

somente uma iteração de consenso com os vizinhos. Assim podemos afirmar que o motivo de as topologias 1 e 2 para $T = 4$ possuírem um maior tempo de simulação médio é devido ao maior número de trocas.

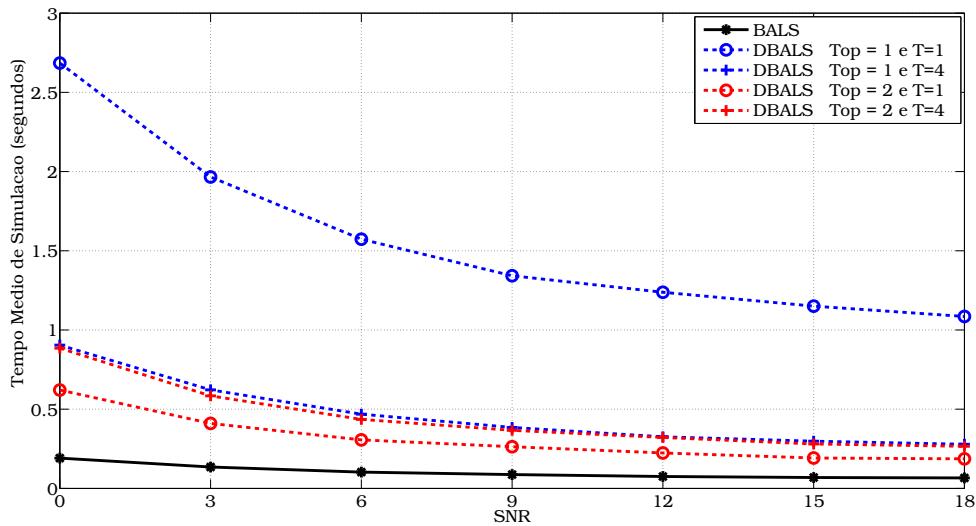


Figura 3.6: Tempo médio de simulação vs SNR com diferentes configurações.

Para avaliar o impacto de diferentes números de micro-ERBs K no processamento distribuído para ambas as topologias, decidimos fixar o número de iterações de consenso $T = 4$. Esta decisão foi tomada após análise dos resultados apresentados pelas Figuras 3.5 e 3.6, pois com quatro iterações de consenso ambas as topologias obtiveram resultados muito próximos entre elas e aos obtidos pelo receptor centralizado. Na Figura 3.7 é apresentado os resultados obtidos nas simulações do receptor distribuído com as micro-ERBs assumindo duas topologias já citadas para diferentes números de micro-ERBs $K = 2, 4, 6$ com $N = 50$, $P = 12$, $Q = 12$. Para $K = 2$ temos um caso especial onde as duas topologias se reduzem a uma topologia linear entre as duas únicas micro-ERBs. Analisando a Figura 3.7(a) é possível perceber que quanto maior o número de micro-ERBs melhor são os resultados obtidos para *Bit Error Rate* (BER) do sistema, devido ao aumento da diversidade espacial do sistema. Para $K = 4$, o receptor distribuído obtém resultados muito próximos para ambas topologias, sendo possível ver a pequena diferença entre os resultados pela ampliação exibida pela Figura 3.7(b). Contudo, ao aumentarmos o número de micro-ERBs para $K = 6$, os resultados obtidos pela topologia 1 são superados pelos obtidos pela topologia 2 devido a esta possuir um nó com conexão com todos os demais.

São expostos na Figura 3.8 os valores médios do número de iterações do algoritmo ALS e tempo de simulação das curvas obtidas na Figura 3.7. Embora a configuração $K = 2$ tenha obtido os piores resultados em valores médios de BER das configurações testadas, o seu número de médio de

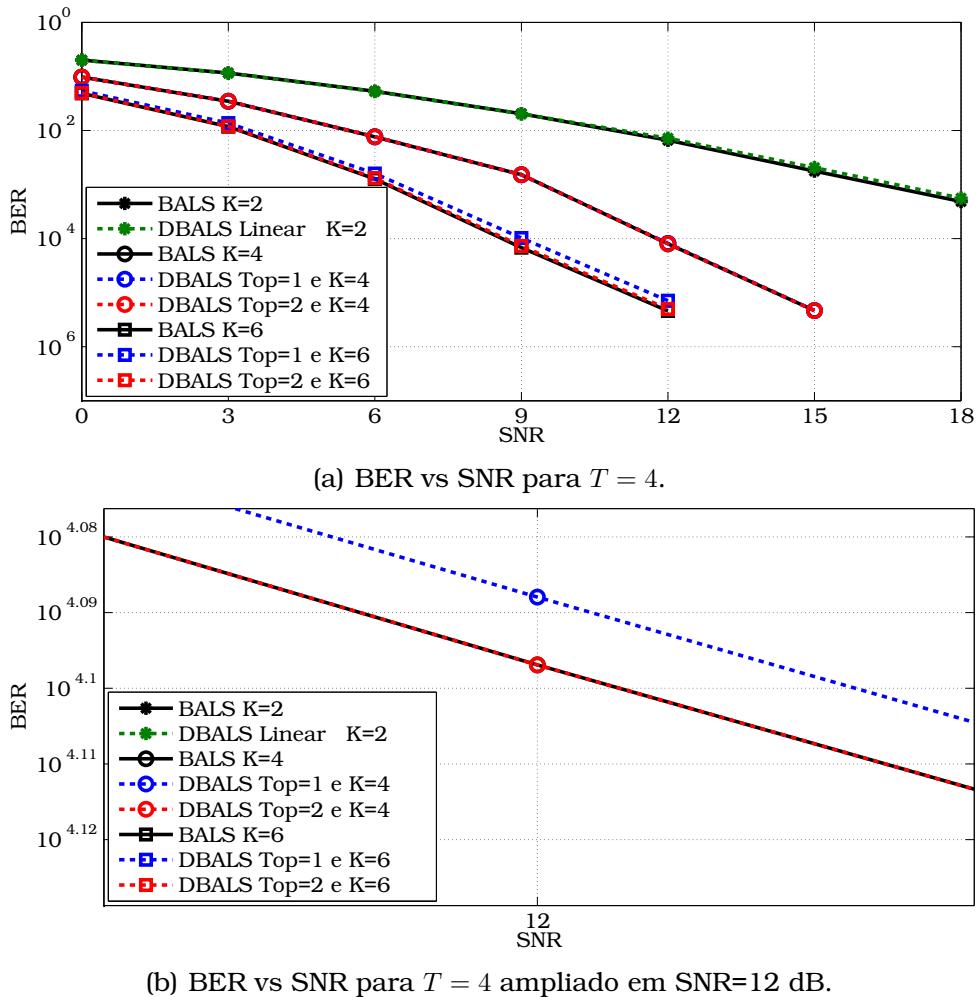
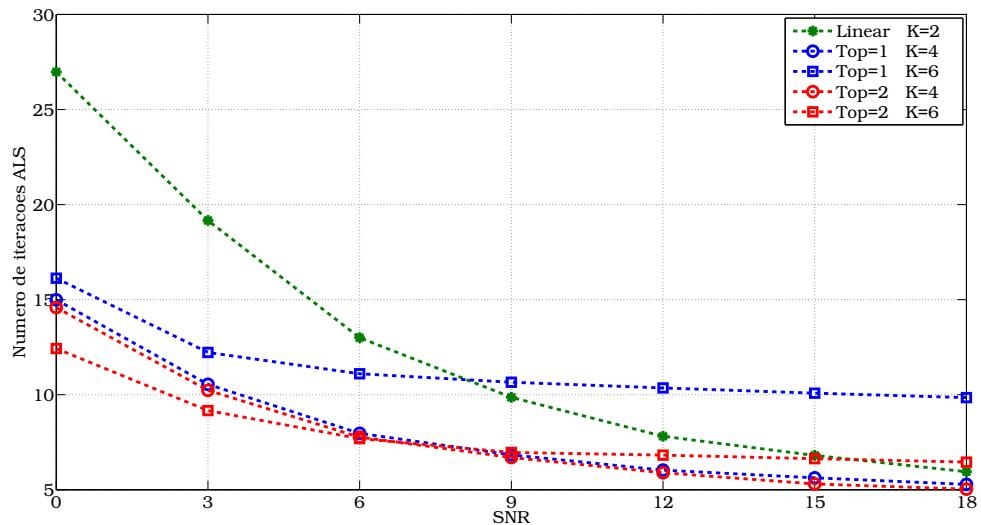


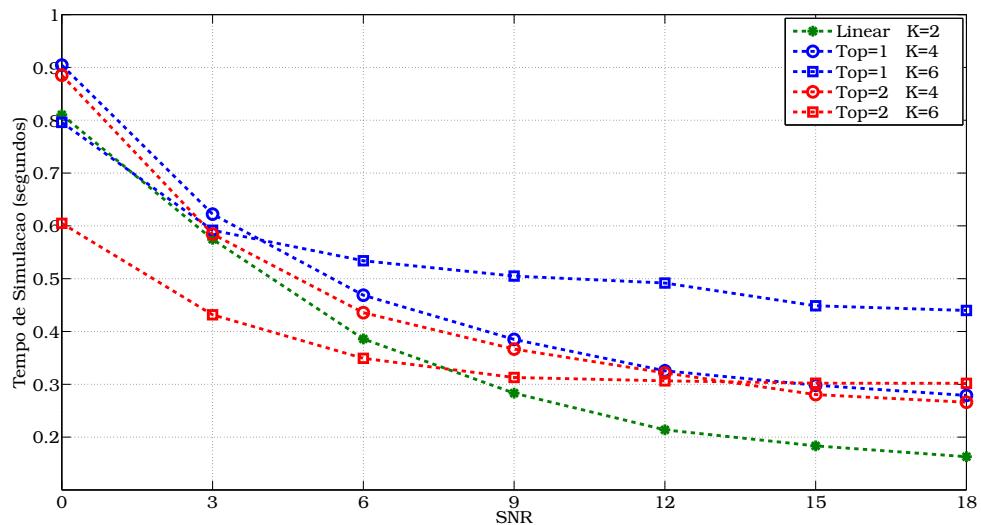
Figura 3.7: Comparação entre receptor centralizado e distribuído com diferentes números de antenas receptoras e topologias.

iterações aproxima-se dos menores valores obtidos, para $K = 4$ em ambas as topologias, e seu tempo médio de simulação atinge o menor valor entre todas as configurações em valores de SNR mais altos. Deste modo, embora tenha obtido valores médios de erros piores, a estimativa do tensor recebido por esta configuração foi feita de forma mais rápida devido a fácil obtenção do valor médio das variáveis de consenso pois existem apenas dois nós para a realização das iterações de consenso justificando também seu baixo tempo de simulação por existir menos conexões para iterações de consenso na rede distribuída. Para a topologia 1 é possível visualizar que o número médio de iterações para $K = 6$ é superior ao obtido para $K = 4$ o que acontece devido a uma estimativa menos precisa das variáveis de consenso para $K = 6$. Este fato também ocorre para a topologia 2. Este aumento na média de iterações do algoritmo ALS para $K = 6$ é explicado devido ao aumento do tamanho da rede distribuída fazendo-se necessário um maior número de iterações de consenso para uma estimativa das variáveis de consenso mais próxima da média. Ao analisarmos o tempo médio de simulação para a topologia 1 torna-se

perceptível que para um número maior de micro-ERBs são obtidos valores médios maiores devido ao aumento no número de iterações de consenso total da rede bem como no número médio de iterações do algoritmo ALS necessárias para atingir o critério de convergência devido a estimativa pouco precisa das variáveis de consenso. Já para a topologia 2, com valores de SNR inferiores a 12 dB e $K = 6$, possui melhores tempos médio de simulação em relação aos resultados alcançados com $K = 4$ devido ao número de iteração total do algoritmo ALS ser também inferior para estes valores de SNR. Contudo, para valores de SNR superior a 15 dB o número de iterações de algoritmo ALS, para $K = 6$, se mantém praticamente constante enquanto, para $K = 4$, os valores médios continuam a cair explicando assim da obtenção de menores tempos de simulação.



(a) Número médio de iterações do algoritmo ALS vs SNR para $T = 4$.



(b) Tempo médio de simulação vs SNR para $T = 4$.

Figura 3.8: Número médio de iterações do algoritmo ALS e tempo médio de simulação vs SNR para $T = 4$.

Receptor Tensorial Cooperativo com Processamento Distribuído nos Repetidores

4.1 Modelo do Sistema

O sistema em estudo é semelhante ao do Capítulo 3. Entretanto, existem algumas diferenças neste que faz necessária a sua descrição. Consideramos o *uplink* em uma rede de comunicação sem-fio na qual há uma ERB, Q usuários co-canal e K repetidores. A ERB é composta por M antenas, e cada equipamento de usuário quanto repetidor possui somente uma antena. Os repetidores podem ser utilizados pela ERB para melhorar a cobertura da célula.

Existem três *links* possíveis neste sistema (Figura 4.1): Fonte-Destino (FD), Fonte-Repetidor (FR) e Repetidor-Destino (RD). Os repetidores não são conectados a uma central de comutação e controle, assim eles necessitam enviar toda informação que recebem dos usuários para a ERB. Desta forma, a comunicação entre usuários e ERB é realizada em dois instantes de transmissão. As transmissões ocorrem através de canal com desvanecimento Rayleigh com ruído do tipo AWGN. Consideramos os códigos CDMA conhecidos pelos repetidores e ERB.

No primeiro instante, os usuários transmitem suas sequências de informação com tamanho N , fazendo uso de CDMA, as quais são recebidas pelos repetidores e pela ERB. A representação escalar da informação recebida pelo k -ésimo repetidor (e m -ésima antena da ERB), no n -ésimo símbolo e no p -ésimo código é dada por

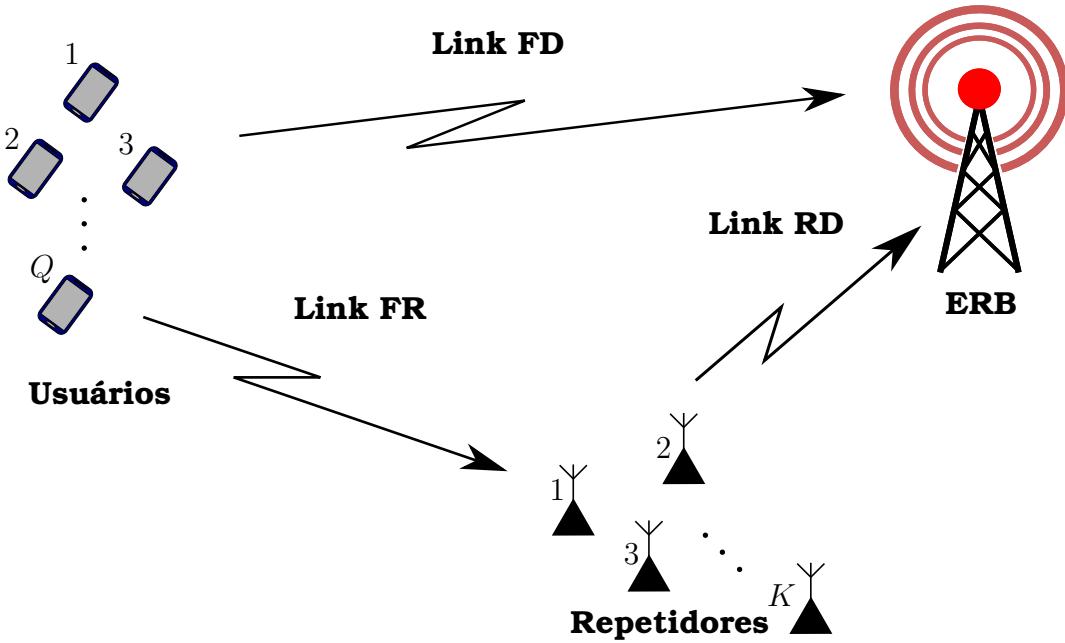


Figura 4.1: Uplink em um sistema de comunicação multiusuário auxiliado por repetidores.

$$x_{k,p,n}^{(\text{FR})} = \sum_{q=1}^Q h_{k,q}^{(\text{FR})} c_{p,q} s_{n,q}, \quad (4.1)$$

$$x_{m,p,n}^{(\text{FD})} = \sum_{q=1}^Q h_{m,q}^{(\text{FD})} c_{p,q} s_{n,q}, \quad (4.2)$$

em que $h_{k,q}^{(\text{FR})}/h_{m,q}^{(\text{FD})}$ são os coeficientes de canal entre o usuário q e o k -ésimo repetidor (*link FR*)/ m -ésima antena da ERB (*link FD*), $c_{p,q}$ e $s_{n,q}$ são o código e o símbolo do usuário q , respectivamente. Desta forma, ao compararmos (2.22) com (4.1) podemos afirmar que o sinal recebido pelos repetidores pode ser organizado de forma a obtermos a decomposição PARAFAC com as seguintes correspondências

$$(\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}) \leftrightarrow (\mathbf{H}^{(\text{FR})}, \mathbf{C}, \mathbf{S}), \quad (4.3a)$$

$$(I_1, I_2, I_3) \leftrightarrow (K, P, N). \quad (4.3b)$$

para os sinal recebido pelos repetidores com $\mathbf{H}^{(\text{FR})} \in \mathbb{C}^{K \times Q}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{P \times Q}$ e $\mathbf{S} \in$

$\mathbb{C}^{N \times Q}$. Enquanto no sinal recebido pela ERB temos

$$(\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}) \leftrightarrow (\mathbf{H}^{(\text{FD})}, \mathbf{C}, \mathbf{S}), \quad (4.4\text{a})$$

$$(I_1, I_2, I_3) \leftrightarrow (M, P, N). \quad (4.4\text{b})$$

em que $\mathbf{H}^{(\text{FD})} \in \mathbb{C}^{M \times Q}$. Fazendo uso da analogia em (2.25), obtemos as formas matriciadas do tensor $\mathcal{X}^{(\text{FR})} \in \mathbb{C}^{K \times P \times N}$ por

$$\mathbf{X}_1^{(\text{FR})} = (\mathbf{H}^{(\text{FR})} \diamond \mathbf{C}) \mathbf{S}^T \in \mathbb{C}^{KP \times N}, \quad (4.5\text{a})$$

$$\mathbf{X}_2^{(\text{FR})} = (\mathbf{C} \diamond \mathbf{S}) \mathbf{H}^{(\text{FR})T} \in \mathbb{C}^{PN \times K}, \quad (4.5\text{b})$$

$$\mathbf{X}_3^{(\text{FR})} = (\mathbf{S} \diamond \mathbf{H}^{(\text{FR})}) \mathbf{C}^T \in \mathbb{C}^{NK \times P}. \quad (4.5\text{c})$$

Consequentemente as formas matriciadas do tensor $\mathcal{X}^{(\text{FD})} \in \mathbb{C}^{M \times P \times N}$ são

$$\mathbf{X}_1^{(\text{FD})} = (\mathbf{H}^{(\text{FD})} \diamond \mathbf{C}) \mathbf{S}^T \in \mathbb{C}^{MP \times N}, \quad (4.6\text{a})$$

$$\mathbf{X}_2^{(\text{FD})} = (\mathbf{C} \diamond \mathbf{S}) \mathbf{H}^{(\text{FD})T} \in \mathbb{C}^{PN \times M}, \quad (4.6\text{b})$$

$$\mathbf{X}_3^{(\text{FD})} = (\mathbf{S} \diamond \mathbf{H}^{(\text{FD})}) \mathbf{C}^T \in \mathbb{C}^{NM \times P}. \quad (4.6\text{c})$$

No segundo instante, os usuários param a transmissão e os repetidores realizam a estimação conjunta de símbolos e coeficientes de canal de forma distribuída utilizando o algoritmo D-BALS exposto na Tabela 3.2. Em seguida eles transmitem para a ERB. A transmissão entre os repetidores e a ERB pode ocorrer de duas maneiras: i) os repetidores reconstruem o tensor recebido a partir das matrizes estimadas e enviam-no através do canal no *link RD* para a ERB ou ii) os repetidores codificam a matriz de símbolo e código estimadas e as transmitem através do canal presente no *link RD*.

4.2 Receptor LS-KRF

Os repetidores, após realizarem a estimação da matriz de canal $\hat{\mathbf{H}}^{(\text{FR})}$ e da matriz de símbolos $\hat{\mathbf{S}}$, reconstruem o tensor $\hat{\mathcal{X}}^{(\text{FR})}$ e o transmite para ERB através do *link RD*. Podemos analisar o sinal recebido pela ERB no *n*-ésimo

símbolo recebido como

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{..n}^{(\text{RD})} &= \mathbf{H}^{(\text{RD})} \hat{\mathbf{X}}_{..n}^{(\text{FR})} \\ &= \mathbf{H}^{(\text{RD})} \hat{\mathbf{H}}^{(\text{FR})} \text{diag}(\hat{\mathbf{S}}_{n.}) \mathbf{C}^T \\ &= \mathbf{H}^{(\text{eff})} \text{diag}(\hat{\mathbf{S}}_{n.}) \mathbf{C}^T\end{aligned}\quad (4.7)$$

em que $\mathbf{H}^{(\text{RD})} \in \mathbb{C}^{M \times K}$ é a matriz de coeficientes do canal entre os repetidores e as antenas da ERB e $\mathbf{H}^{(\text{eff})} = \mathbf{H}^{(\text{RD})} \hat{\mathbf{H}}^{(\text{FR})} \in \mathbb{C}^{M \times Q}$ é a matriz efetiva do canal percebida pela ERB. Desta forma, o tensor $\mathcal{X}^{(\text{RD})} \in \mathbb{C}^{M \times P \times N}$ é obtido pela ERB e suas formas matriciadas são

$$\mathbf{X}_1^{(\text{RD})} = (\mathbf{H}^{(\text{eff})} \diamond \mathbf{C}) \mathbf{S}^T \in \mathbb{C}^{MP \times N}, \quad (4.8a)$$

$$\mathbf{X}_2^{(\text{RD})} = (\mathbf{C} \diamond \mathbf{S}) \mathbf{H}^{(\text{eff})T} \in \mathbb{C}^{PN \times M}, \quad (4.8b)$$

$$\mathbf{X}_3^{(\text{RD})} = (\mathbf{S} \diamond \mathbf{H}^{(\text{eff})}) \mathbf{C}^T \in \mathbb{C}^{NM \times P}. \quad (4.8c)$$

Para o processamento na ERB, as matrizes *slices* modo-1 transpostas do tensor $\mathcal{X}^{(\text{FD})}$ e $\mathcal{X}^{(\text{RD})}$ são empilhadas como

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{(\text{cat})} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1..}^{(\text{FD})T} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{M..}^{(\text{FD})T} \\ \mathbf{X}_{1..}^{(\text{eff})T} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{M..}^{(\text{FD})T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \text{diag}(\mathbf{H}_{1..}^{(\text{FD})}) \mathbf{C}^T \\ \vdots \\ \mathbf{S} \text{diag}(\mathbf{H}_{M..}^{(\text{FD})}) \mathbf{C}^T \\ \mathbf{S} \text{diag}(\mathbf{H}_{1..}^{(\text{eff})}) \mathbf{C}^T \\ \vdots \\ \mathbf{S} \text{diag}(\mathbf{H}_{M..}^{(\text{FD})}) \mathbf{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \text{diag}(\mathbf{H}_{1..}^{(\text{FD})}) \\ \vdots \\ \mathbf{S} \text{diag}(\mathbf{H}_{M..}^{(\text{FD})}) \\ \mathbf{S} \text{diag}(\mathbf{H}_{1..}^{(\text{eff})}) \\ \vdots \\ \mathbf{S} \text{diag}(\mathbf{H}_{M..}^{(\text{FD})}) \end{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1..}^{(\text{FD})} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{M..}^{(\text{FD})} \\ \mathbf{H}_{1..}^{(\text{eff})} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{M..}^{(\text{eff})} \end{bmatrix} \diamond \mathbf{S} \right) \mathbf{C}^T = (\mathbf{H}^{(\text{cat})} \diamond \mathbf{S}) \mathbf{C}^T,\end{aligned}\quad (4.9)$$

em que $\mathbf{H}^{(\text{cat})} = [\mathbf{H}^{(\text{FD})T}, \mathbf{H}^{(\text{eff})T}]^T \in \mathbb{C}^{2M \times Q}$.

O algoritmo LS-KRF (do inglês, *Least-Squares Khatri-Rao Factorization*) proposto em [13] é utilizado para estimar as matrizes \mathbf{S} e $\mathbf{H}^{(\text{cat})}$. Diversos trabalhos se aproveitam do uso deste algoritmo [38, 39] o qual pode ser

utilizado quando as duas matrizes fatores são desconhecidas ou quando se tem o conhecimento de uma das matrizes [40]. Considerando a matriz $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{2MN \times Q}$ como representação do produto de Khatri-Rao entre as matrizes $\mathbf{H}^{(\text{cat})}$ e \mathbf{S} , podemos obter as matrizes estimadas $\hat{\mathbf{H}}^{(\text{cat})}$ e $\hat{\mathbf{S}}$ minimizando a função custo dada por

$$[\hat{\mathbf{H}}^{(\text{cat})}, \hat{\mathbf{S}}] = \arg \min_{\hat{\mathbf{H}}^{(\text{cat})}, \hat{\mathbf{S}}} \|\mathbf{D} - (\hat{\mathbf{H}}^{(\text{cat})} \diamond \hat{\mathbf{S}})\|_F^2. \quad (4.10)$$

Como exposto na Definição 2.9, podemos obter a q -ésima coluna de \mathbf{D} como o produto de Kronecker entre a q -ésima coluna das matrizes $\mathbf{H}^{(\text{cat})}$ e \mathbf{S} , $\mathbf{d}_q = \mathbf{h}_q^{(\text{cat})} \otimes \mathbf{s}_q$. Ao reorganizarmos os dados da q -ésima coluna de \mathbf{D} em uma matriz $\tilde{\mathbf{D}}_q \in \mathbb{C}^{N \times 2M}$, com $\text{vec}(\tilde{\mathbf{D}}_q) = \mathbf{d}_q$, permite-nos reescrever $\tilde{\mathbf{D}}_q$ como

$$\tilde{\mathbf{D}}_q = \mathbf{s}_q \mathbf{h}_q^{(\text{cat})T}. \quad (4.11)$$

Desta forma, é possível estimar \mathbf{s}_q e $\mathbf{h}_q^{(\text{cat})}$ ao calcularmos a SVD da matriz $\tilde{\mathbf{D}}_q$,

$$\tilde{\mathbf{D}}_q = \mathbf{U}_q \Sigma \mathbf{V}_q^H. \quad (4.12)$$

O fato de $\tilde{\mathbf{D}}_q$ ser uma matriz de *rank-1* nos permite truncar a SVD em seu primeiro termo. Logo, podemos obter as estimativas $\hat{\mathbf{h}}_q^{(\text{cat})}$ e $\hat{\mathbf{s}}_q$ por

$$\hat{\mathbf{h}}_q^{(\text{cat})} = \sqrt{\sigma_1} \mathbf{v}_1^* \in \mathbb{C}^{2M \times 1}, \quad (4.13a)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_q = \sqrt{\sigma_1} \mathbf{u}_1 \in \mathbb{C}^{N \times 1}, \quad (4.13b)$$

em que \mathbf{u}_1 e \mathbf{v}_1 representam a primeira coluna das matrizes \mathbf{U}_q e \mathbf{V}_q , respectivamente, e σ_1 é o maior valor singular da matriz Σ_q . Na Tabela 4.1 é apresentada um resumo do algoritmo LS-KRF para o sistema proposto.

4.3 Receptor TUCKER-3

Cada repetidor k possui uma matriz de código de dimensão $Q \times Q$ a qual utiliza para codificar $\hat{\mathbf{S}}$ e \mathbf{C} antes de transmitir para a ERB. Ao organizarmos estas matrizes, obtemos o tensor $\mathcal{F} \in \mathbb{C}^{K \times Q \times Q}$ no qual suas matrizes *slices* modo-1 são formadas pelas matrizes código de cada repetidor. Assim o sinal recebido pela m -ésima antena da ERB, no p -ésimo chip e no n -ésimo símbolo é

$$y_{m,p,n}^{(\text{RD})} = \sum_{k=1}^K \sum_{q_1=1}^Q \sum_{q_2=1}^Q f_{k,q_1,q_2} h_{m,k}^{(\text{RD})} c_{p,q} \hat{s}_{n,q}. \quad (4.14)$$

Tabela 4.1: Algoritmo LS-KRF

-
- Passo 1: Obtém a matriz $\mathbf{X}^{(\text{cat})}$ como descrito em (4.9);
 Passo 2: Utiliza-se da matriz \mathbf{C} para obter a matriz \mathbf{D} por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{(\text{cat})}(\mathbf{C}^T)^{-1};$$

 Passo 3: Inicializar $q = 1$;
 Passo 4: Reorganizar $\mathbf{D}_{\cdot q}$ para obter $\tilde{\mathbf{D}}_q$ com $\text{vec}(\tilde{\mathbf{D}}_q) = \mathbf{D}_{\cdot q}$;
 Passo 5: Calcular a SVD de $\tilde{\mathbf{D}}_q$:

$$\tilde{\mathbf{D}}_q = \mathbf{U}_q \Sigma \mathbf{V}_q^H;$$

 Passo 6: Calcular a q -ésima coluna de $\hat{\mathbf{H}}^{(\text{cat})}$ e $\hat{\mathbf{S}}$:

$$\hat{\mathbf{h}}_q^{(\text{cat})} = \sqrt{\sigma_1} \mathbf{v}_1^*;$$

$$\hat{\mathbf{s}}_q = \sqrt{\sigma_1} \mathbf{u}_1;$$

 Passo 7: Definir $q = q + 1$;
 Passo 8: Repetir passos 4-7 enquanto $q < Q$.
-

Comparando (2.14) e (4.14) podemos afirmar que o sinal recebido obedece as características de uma decomposição TUCKER-3. A representação por produto modo- n entre o tensor formado pelas matrizes códigos dos repetidores $\mathcal{F} \in \mathbb{C}^{K \times Q \times Q}$ e as matrizes de canal entre receptores e as antenas da ERB $\mathbf{H}^{(\text{RD})}$, de símbolo e de código dos usuários, respectivamente, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{N \times Q}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{P \times Q}$ é dada por $\mathcal{Y}^{(\text{RD})} = \mathcal{F} \times_1 \mathbf{H}^{(\text{RD})} \times_2 \mathbf{C} \times_3 \hat{\mathbf{S}} \in \mathbb{C}^{M \times P \times N}$. Deste modo, obtemos as seguintes correspondências

$$(\mathcal{G}, \mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}) \leftrightarrow (\mathcal{F}, \mathbf{H}^{(\text{RD})}, \mathbf{C}, \mathbf{S}), \quad (4.15a)$$

$$(R_1, R_2, R_3, I_1, I_2, I_3) \leftrightarrow (K, Q, Q, M, P, N). \quad (4.15b)$$

Utilizando de analogia com (2.21) podemos obter as formas matriciadas do tensor $\mathcal{Y}^{(\text{RD})}$ por

$$\mathbf{Y}_1^{(\text{RD})} = (\mathbf{H}^{(\text{RD})} \otimes \mathbf{C}) \mathbf{F}_1 \hat{\mathbf{S}}^T, \quad (4.16a)$$

$$\mathbf{Y}_2^{(\text{RD})} = (\mathbf{C} \otimes \hat{\mathbf{S}}) \mathbf{F}_2 \mathbf{H}^{(\text{RD})T}, \quad (4.16b)$$

$$\mathbf{Y}_3^{(\text{RD})} = (\hat{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{H}^{(\text{RD})}) \mathbf{F}_3 \mathbf{C}^T. \quad (4.16c)$$

com $\mathbf{F}_1 \in \mathbb{C}^{KQ \times Q}$, $\mathbf{F}_2 \in \mathbb{C}^{QQ \times K}$ e $\mathbf{F}_3 \in \mathbb{C}^{QK \times Q}$.

Como exposto no Capítulo 2, a decomposição TUCKER-3 não possui unicidade quando não há nenhum conhecimento sobre suas matrizes fatores ou tensor núcleo [29]. Em nosso sistema, consideramos conhecidos pela ERB os códigos de cada repetidor o que possibilita a unicidade desde que

sejam respeitados os critérios de identificabilidade. A matriz de código dos usuários também é considerada como conhecida. Desta forma, é necessária apenas a estimativa das matrizes S e $H^{(RD)}$ as quais podem ser obtidas ao explorarmos as formas matriciadas descritas em (4.16a) e (4.16b) respectivamente. Utilizaremos o algoritmo BALS com o objetivo de minimizar de forma alternada as funções custo

$$\hat{S} = \arg \min_{\hat{S}} \|Y_1^{(RD)} - (\hat{H}^{(RD)} \otimes C)F_1 \hat{S}^T\|_F^2, \quad (4.17a)$$

$$\hat{H}^{(RD)} = \arg \min_{\hat{H}^{(RD)}} \|Y_2^{(RD)} - (C \otimes \hat{S})F_2 \hat{H}^{(RD)T}\|_F^2. \quad (4.17b)$$

Com o conhecimento da matriz de código C e do tensor núcleo \mathcal{F} pela ERB é possível a obtenção de estimativa da matriz de símbolo \hat{S} e canal $\hat{H}^{(RD)}$ diferentes das matrizes originais apenas por um fator de escala em suas colunas. Contudo, para alcançar esta estimativa é necessário garantir que

$$U = (H^{(RD)} \otimes C)F_1, \quad (4.18)$$

$$Z = (C \otimes S)F_2, \quad (4.19)$$

possuam *rank* coluna completo permitindo a obtenção da matriz pseudo-inversa a esquerda. O operador $\text{rank}(\cdot)$ possui as seguintes propriedades: o *rank* do produto de duas matrizes A e B é dado por $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$ quando A é *rank* coluna completo [41] e o *rank* do produto de Kronecker das mesmas matrizes é dado por $\text{rank}(A \otimes B) = \text{rank}(A) \text{rank}(B)$ [42]. Assim, aplicando estas duas propriedades em (4.18) e (4.19) faz-se necessário que F_1 , F_2 , C , S e $H^{(RD)}$ sejam *rank* coluna completo obtendo as seguintes relações $M \geq K$, $P \geq Q$, $N \geq Q$. Há a possibilidade de antenas na ERB ser menor que o número de repetidores, $M < K$. Desta forma, a matriz $H^{(RD)}$ será *rank* linha completo. Assim uma condição suficiente para que U seja *rank* coluna completo é $MP > Q$. Assim a identificabilidade é garantida para o receptor TUCKER-3. Na Tabela 4.2 é apresentado o algoritmo BALS para a decomposição TUCKER-3 do sistema descrito neste capítulo.

4.4 Simulações e Resultados

Esta seção disponibiliza os resultados obtidos por simulações computacionais para avaliação dos receptores tensoriais auxiliados por repetidores apresentados nas Seções 4.2 e 4.3. Novamente foi utilizado

Tabela 4.2: Algoritmo TUCKER-3 - BALS

-
- Passo 1: Define $i = 0$;
- Passo 2: Inicializa aleatoriamente ou através de uma estimativa inicial a matriz \hat{S} .
- Passo 3: Define $i = i + 1$;
- Passo 4: Utiliza $\mathbf{Y}_2^{(RD)}$ para encontrar uma estimativa de mínimos quadrados de $\mathbf{H}^{(RD)}(i)$:

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{C} \otimes \hat{\mathbf{S}}(i-1))\mathbf{F}_2;$$

$$\hat{\mathbf{H}}^{(RD)}(i) = \left[(\mathbf{Z}^H \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^H \mathbf{Y}_2^{(RD)} \right]^T;$$
- Passo 5: Utiliza $\mathbf{Y}_1^{(RD)}$ para encontrar uma estimativa de mínimos quadrados de $\hat{\mathbf{S}}(i)$:

$$\mathbf{U} = (\hat{\mathbf{H}}^{(RD)}(i) \otimes \mathbf{C})\mathbf{F}_1;$$

$$\hat{\mathbf{S}}(i) = \left[(\mathbf{U}^H \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{Y}_1^{(RD)} \right]^T;$$
- Passo 6: Repetir os passos 3-5 até que seja atingido o critério de convergência.
-

somente canal com desvanecimento plano nas simulações de forma a simplifica-las. Os repetidores formam um grafo conectado e sem direção no qual foi feita a estimação conjunta dos coeficientes de canal do *link* FR e os símbolos transmitidos por cada usuários utilizando-se do algoritmo D-BALS descrito no Capítulo 3. Após a estimação dos símbolos, os repetidores utilizam-se do protocolo *Decode-and-Forward* (DF) para enviar os símbolos transmitidos e código de cada usuário para a ERB obedecendo cada receptor descrito nas seções anteriores. Todos os resultados foram obtidos a partir do desempenho médio de 1000 simulações de Monte Carlo independentes e a análise é feita em função da SNR. A matriz de código \mathbf{C} é considerada conhecida tanto nos repetidores quanto na ERB sendo gerada com números complexos aleatórios possuindo *rank* coluna completo e os símbolos transmitidos são obtidos utilizando 4-QAM. Após análise dos resultados obtidos no Capítulo 3, foi decidido o uso da topologia 2, sendo um caso especial, para $K = 2$, no qual obtemos a topologia linear, apresentada na Figura 3.4(b) para a conexão entre os repetidores e o número de iterações de consenso $T = 4$. Todos os resultados foram obtidos, para $N = 50$ símbolos transmitidos por usuário, $Q = 12$ usuários co-canais, comprimento $P = 12$ dos códigos CDMA. O receptor não auxiliado pelos repetidores, o qual identificaremos no restante deste trabalho como receptor *Link Direto*,

utiliza-se de uma variação do algoritmo descrito na Tabela 4.1 com

$$\mathbf{X}^{(\text{cat})} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1..}^{(\text{FD})T} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{K..}^{(\text{FD})T} \end{bmatrix} = (\mathbf{H}^{(\text{FD})} \diamond \mathbf{S})\mathbf{C}^T. \quad (4.20)$$

A Figura 4.2 apresenta as curvas de BER obtidas para o receptor LS-KRF em comparação a um receptor não auxiliado por repetidores para a variações do número de antenas na ERB, $M = 2, 4, 6$ e de repetidores, $K = 2, 4, 6$. Também mostrados os resultados do receptor LS-KRF sem fazer uso da concatenação descrita por (4.9). Como já esperado, o receptor não cooperativo obtém melhores resultados ao aumentarmos o número de antenas na ERB, pois assim a ERB obtém uma maior diversidade espacial. O mesmo ocorre com o receptor LS-KRF utilizando ou não a concatenação. Contudo, ao utilizar a concatenação da informação transmitida pelos usuários a ERB, através do *link* FD, com a transmitida pelos repetidores a ERB, através do *link* RD, conseguimos dobrar a diversidade espacial em cada configuração. Assim, a BER alcançada pelo receptor LS-KRF com o uso da concatenação supera este sem o uso da concatenação para todas as configurações simuladas.

As configurações testadas, para $M = 2$, na Figura 4.2(a) em um receptor LS-KRF com o uso de concatenação supera ao receptor *Link* Direto em termos de BER para valores de SNR superiores 6 dB. Isto ocorre devido a se conseguir o dobro da diversidade espacial na ERB do que o obtido pelo receptor *Link* Direto. A distinção entre médias de BER alcançada pelos os diferentes valores de K é resultado da variação da diversidade especial no receptor distribuído, também abordado no Capítulo 3, diminuindo o erro de reconstrução da informação dos usuários recebida pelos repetidores. Entretanto, na Figura 4.2(b), os valores médios de BER para $K = 2$ são mais elevados em todos os valores de SNR testados. Para $K = 4$, o receptor LS-KRF consegue igualar-se ao *Link* Direto para valores de SNR superiores a 12 dB, e somente para $K = 6$ este consegue superar o *Link* Direto o que ocorre a partir do valor de SNR igual a 6 dB. Para os resultados obtidos para $M = 6$, Figura 4.2(c), o receptor LS-KRF não conseguiu superar o *Link* Direto, embora tenha se aproximado em todo aumento do número de repetidores. A não superação do receptor LS-KRF visualizado nas Figuras 4.2(b) e 4.2(c) acontece devido ao aumento da diversidade espacial conseguida através da concatenação das informações recebidas pela ERB não ser suficiente para compensar o erro de reconstrução ocorrido no receptor distribuído utilizado pelos repetidores.

As curvas de BER para o receptor TUCKER-3 em comparação ao receptor

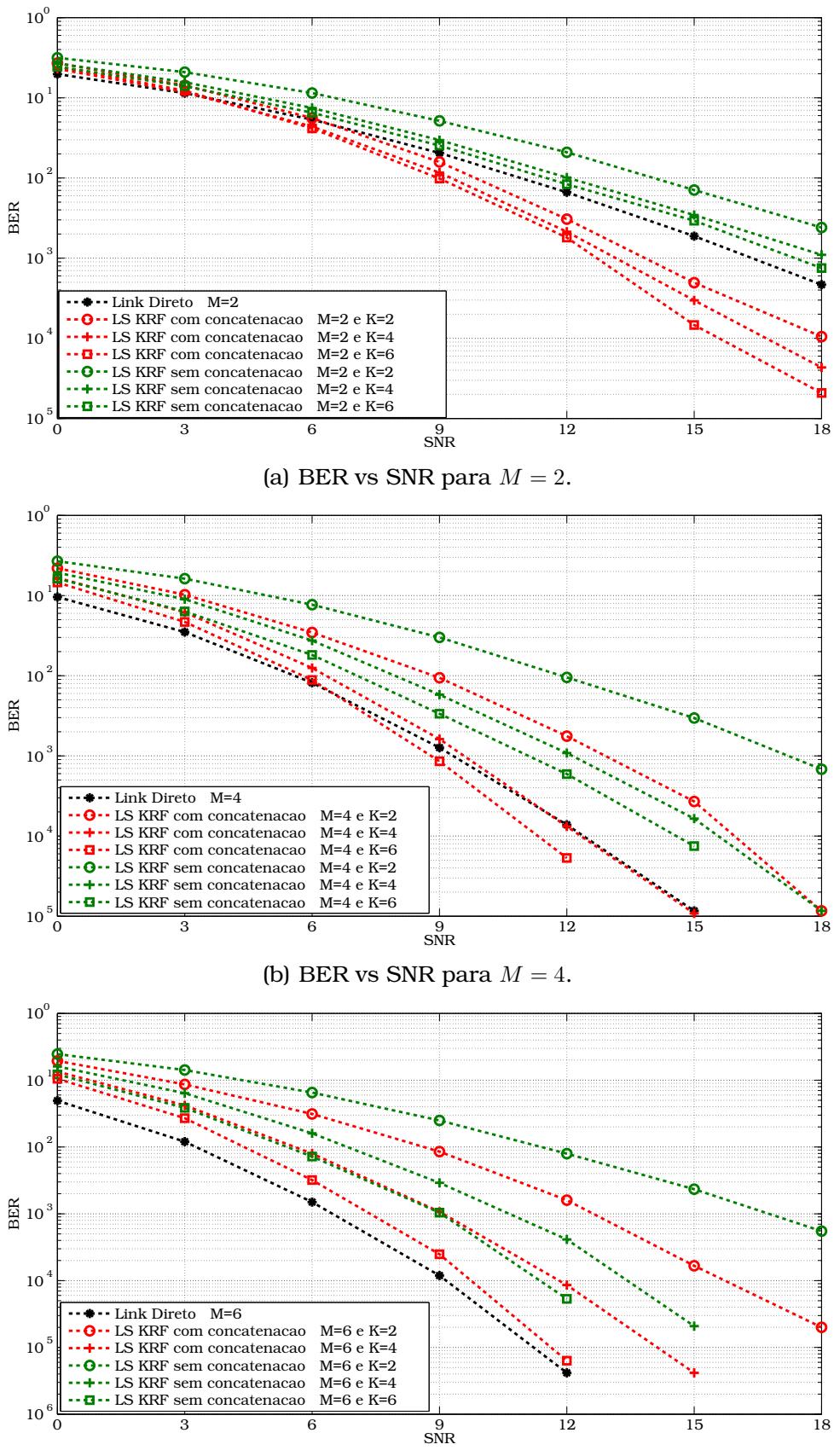


Figura 4.2: Comparativo entre comunicação direta com a ERB e o uso de repetidores utilizando o receptor LS-KRF para número de iterações de consenso $T = 4$ com diferentes números de antenas receptoras.

Link Direto são apresentadas na Figura 4.3. Foram utilizados os mesmos números de antenas presentes na ERB M e repetidores K das simulações envolvendo o receptor LS-KRF. Também foram empregadas duas abordagem do receptor TUCKER-3: *i)* utilizando a informação recebida pela ERB no primeiro instante de transmissão para realizar uma estimação inicial da matriz de símbolos de forma a inicializá-la no algoritmo descrito pela Tabela 4.2 e *ii)* sem a utilização da informação recebida através do link FD sendo referenciados neste capítulo como receptor TUCKER-3 (A) e (B) respectivamente.

A Figura 4.3(a) exibe as curvas de BER para $M = 2$. Devido ao número reduzido de antenas na ERB o receptor TUCKER-3 (B) não consegue obter uma boa estimativa mesmo com um número maior de repetidores. Entretanto, o receptor TUCKER-3 (A) consegue alcançar bons resultados principalmente para $K = 4$ e $K = 6$ superando o receptor *Link Direto* para valores de SNR superiores a 9 dB, e ficando próximo para $K = 2$. Quando o número de antenas na ERB é aumentado para $M = 4$, ver Figura 4.3(b), o receptor TUCKER-3 (B) não consegue, novamente, realizar uma boa estimativa da matriz de símbolos para $K = 2$ e $K = 4$ repetidores auxiliando. Contudo, para $K = 6$ os dois receptores TUCKER-3 obtém praticamente a mesma curva média de BER superando o receptor *Link Direto* para SNR superior a 6 dB. Este resultado pode se explicado pelo o aumento da diversidade espacial na ERB com também o aumento da diversidade espacial nos repetidores auxiliando-os a obtenção de uma melhor estimativa da matriz de símbolos diminuindo assim o erro da decisão dos símbolos. É importante levar em consideração que o aumento do número de repetidores, consequentemente, aumenta o número de matrizes de códigos adicionando mais informação conhecida no receptor o que favoreceu a obtenção de resultados melhores. Os resultados para $M = 6$ são apresentados na Figura 4.3(c). É perceptível que para $K = 2$ o uso de estimativa inicial da matriz de símbolos ainda é benéfica por esta configuração possuir um erro de reconstrução maior. Contudo o aumento da diversidade espacial na ERB obtido nesta configuração permite que o receptor TUCKER-3 (B) obtenha curvas praticamente sobrepostas ao receptor TUCKER-3 (A), demonstrando que a estimativa inicial para um número maior de antenas na ERB não é mais tão benéfica.

A comparação dos receptores propostos pelas seções anteriores (Figura 4.4) foi realizada para os três números de antenas da ERB nas Figuras 4.2 e 4.3 para $K = 6$ repetidores. Este número de repetidores foi escolhido devido a ambos os receptores propostos terem obtidos seus melhores resultados em todas as configurações testadas. Foi escolhido o receptor LS-KRF com concatenação e TUCKER-3 (A) por estes terem apresentado

os melhores resultados entre suas variações. De forma a garantir um melhor entendimento, iremos referenciá-los como receptor LS-KRF e receptor TUCKER-3 para o restante deste capítulo. Ambos os receptores possuem resultados inferiores aos obtidos pelo receptor *Link Direto* para baixos valores de SNR, inferiores a 6 dB. Isto ocorre devido ao erro de estimação e decisão de símbolos, advindo do receptor distribuído formado pelos repetidores, alcançar valores altos a ponto da ERB não conseguir bons resultados utilizando a vantagem de cada receptor, aumento da diversidade espacial pela concatenação no receptor LS-KRF e diversidade das matrizes de códigos dos receptores pelo TUCKER-3. Para $M = 2$ e $M = 4$, o receptor TUCKER-3, embora comece com resultados inferiores ao receptor LS-KRF, consegue superar os demais para valores de SNR iguais a 12 dB e 6 dB respectivamente. Para $M = 6$, nenhum dos receptores propostos conseguiu superar os resultados obtidos pelo receptor *Link Direto*, contudo o receptor TUCKER-3 consegue se igualar a este para valor de SNR igual a 12 dB.

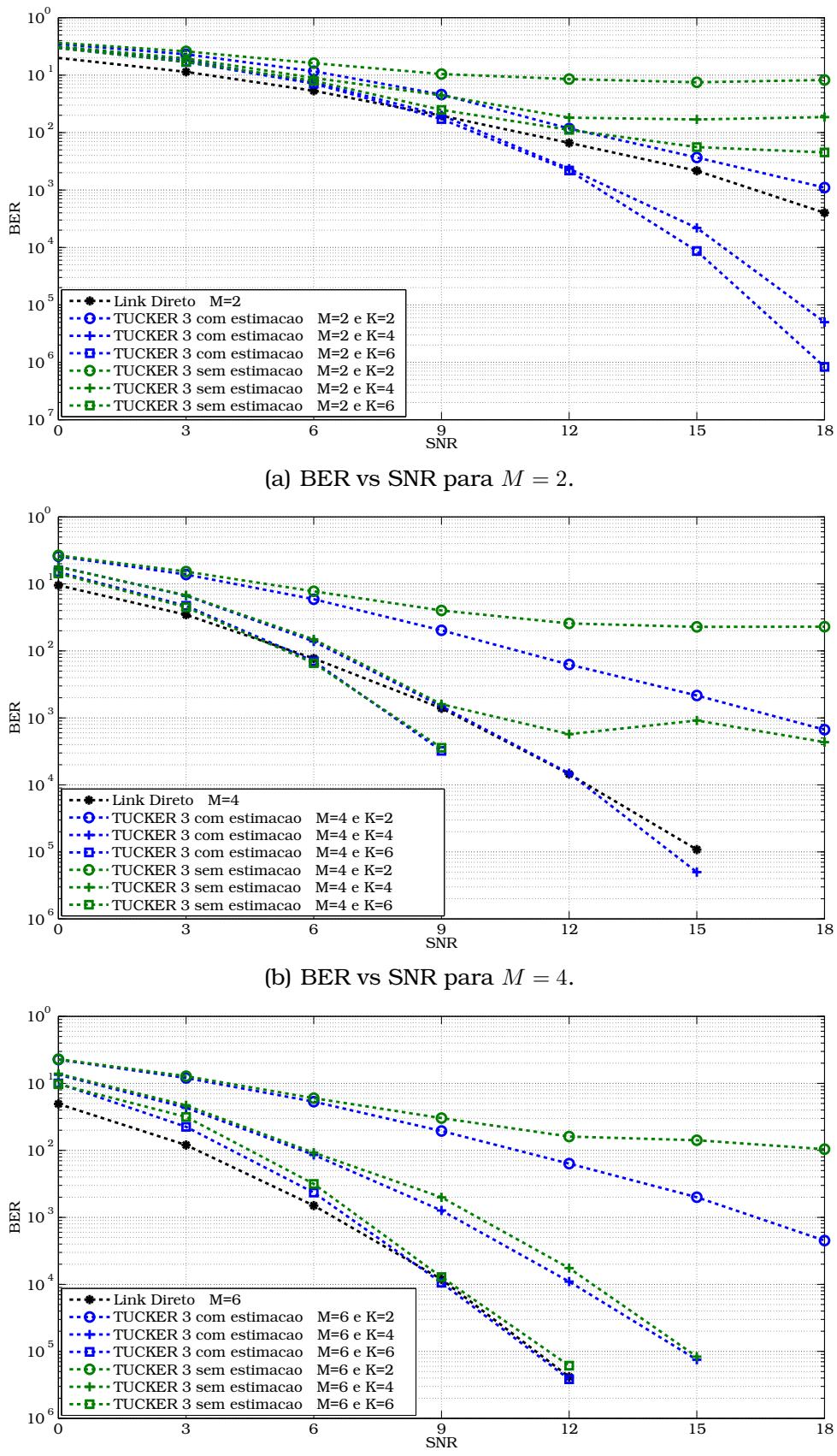


Figura 4.3: Comparativo entre comunicação direta com a ERB e o uso de repetidores utilizando o receptor TUCKER-3 para número de iterações de consenso $T = 4$ em diferentes números de antenas receptoras.

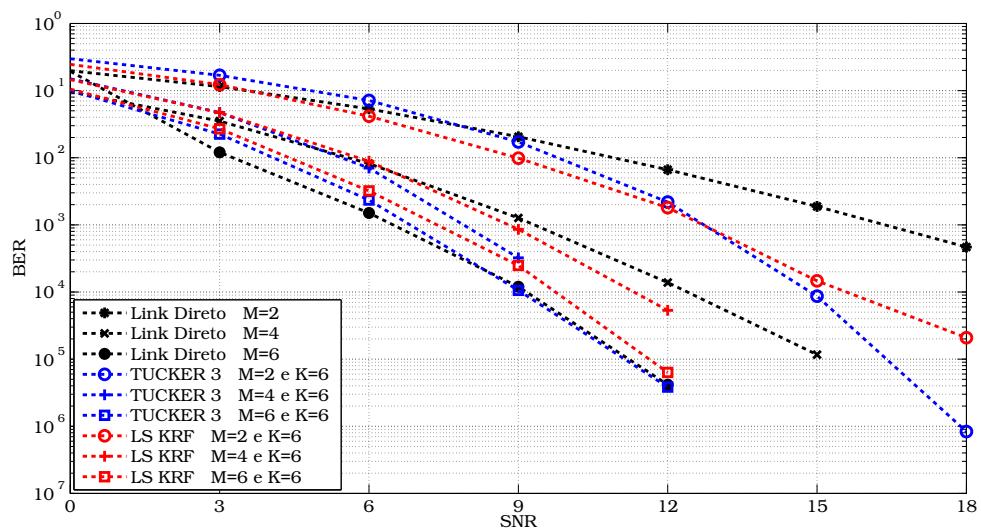


Figura 4.4: Comparativo entre comunicação direta com a ERB e o uso de repetidores utilizando o receptor TUCKER-3 para número de iterações de consenso $T = 4$ em diferentes números de antenas receptoras.

Conclusão e Perspectivas

Nesta dissertação, o desempenho da estimação conjunta de canal e símbolos utilizando um receptor tensorial distribuído, no qual as antenas formam um grafo seguindo uma topologia pré-determinada, foi investigado. Foram propostos métodos cooperativos de estimação de símbolos baseados em decomposições tensoriais, os quais utilizam o receptor distribuído para estimação nos repetidores de forma a empregar o protocolo de transmissão cooperativo DF. Estes métodos exploram a transmissão do tensor reconstruído pelos repetidores e a transmissão da matriz reconstruída de símbolo e matriz de código, ambas dos usuários, com a utilização distinta para cada usuário e repetidor, com o uso das decomposições PARAFAC e TUCKER-3 respectivamente.

Objetivando obter um melhor desempenho na estimação dos símbolos pela ERB, foi utilizada a concatenação dos sinais recebidos pela ERB através dos links FD e RD de forma a se obter um aumento virtual da diversidade espacial, tendo os códigos dos usuários conhecidos nos receptores, utilizando o algoritmo LS-KRF para realizar a estimação. Também com o intuito de melhorar o desempenho foi utilizada a informação recebida através do link FD para se obter uma estimação da matriz de símbolos de forma a inicializar o algoritmo para a decomposição TUCKER-3 de forma não aleatória.

Os resultados obtidos para o receptor tensorial distribuído se mostram satisfatórios em todas as configurações para a topologia 2 (Figura 3.4), e para as configurações com o número de iterações de consenso $T = 4$ para topologia 1. As iterações de consenso são consideradas livres de ruído. Deste modo, foi escolhida a topologia 2 com número de iterações de consenso $T = 4$ para uso nos receptores cooperativos propostos pelo Capítulo 4.

Os métodos propostos neste trabalho mostram-se atraentes em relação ao receptor não auxiliado por repetidores para configurações com o número de repetidores K superior ao número de antenas M na ERB, apresentando

melhores resultados para o receptor TUCKER-3 em relação ao receptor LS-KRF. Os resultados foram obtidos com o valor da SNR no receptor para todos os links iguais. É de conhecimento público que dispositivos móveis possuem limitações de hardware e alimentação de energia, o que limita suas potências de transmissão. Desta forma, há a possibilidade de que a potência do sinal recebido pela ERB através do link FD seja mais atenuada que ao se utilizar os repetidores para retransmissão, tornando os métodos propostos ainda mais benéficos.

Abaixo há um resumo das perspectivas futuras que pretendemos abordar:

- ▶ Avaliação da sobrecarga provocada pelas iterações de consenso nos sistemas.
- ▶ Inclusão de cenários mais realísticos com a inserção de ruído nas iterações de consenso do receptor tensorial distribuído e avaliação de seu impacto na escolha do melhor número de iterações de consenso T .
- ▶ Estudo sobre a possível abordagem do algoritmo CA-MoM desenvolvido em [5].
- ▶ Abordagem aprofundada para escolha da topologia adotada pelos repetidores, avaliando características importantes como número necessário de conexões total e local do grafo.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Pabst, B. H. Walke, D. C. Schultz, P. Herhold, H. Yanikomeroglu, S. Mukherjee, H. Viswanathan, M. Lott, W. Zirwas, M. Dohler *et al.*, “Relay-based deployment concepts for wireless and mobile broadband radio,” *IEEE Communications Magazine*, vol. 42, no. 9, pp. 80–89, 2004.
- [2] A. Ghosh, N. Mangalvedhe, R. Ratasuk, B. Mondal, M. Cudak, E. Visotsky, T. Thomas, J. Andrews, P. Xia, H.-S. Jo, H. Dhillon, and T. Novlan, “Heterogeneous cellular networks: From theory to practice,” *IEEE Communications Magazine*, vol. 50, no. 6, pp. 54–64, 2012.
- [3] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, Jan. 2007.
- [4] H. Zhu, A. Cano, and G. B. Giannakis, “Distributed consensus-based demodulation: algorithms and error analysis,” *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 9, no. 6, pp. 2044–2054, Jun. 2010.
- [5] ——, “Distributed demodulation using consensus averaging in wireless sensor networks,” in *42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2008, pp. 1170–1174.
- [6] S. C. Draper, B. J. Frey, and F. R. Kschischang, “Interactive decoding of a broadcast message,” in *Proceedings of the annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing*, vol. 41, 2003, pp. 170–180.
- [7] L. Xiao and S. Boyd, “Fast linear iterations for distributed averaging,” *Systems & Control Letters*, vol. 53, no. 1, pp. 65–78, 2004.
- [8] L. Xiao, S. Boyd, and S.-J. Kim, “Distributed average consensus with least-mean-square deviation,” *Journal of Parallel and Distributed Computing*, vol. 67, no. 1, pp. 33–46, Jan. 2007.

- [9] M. Porfiri and D. J. Stilwell, "Stochastic consensus over weighted directed networks," in *American Control Conference, 2007. ACC'07*, 2007, pp. 1425–1430.
- [10] Y. Hatano, A. K. Das, and M. Mesbahi, "Agreement in presence of noise: pseudogradients on random geometric networks," in *44th IEEE Conference on Decision and Control, European Control Conference. CDC-ECC'05*. IEEE, 2005, pp. 6382–6387.
- [11] A. L. De Almeida, G. Favier, and J. C. M. Mota, "PARAFAC-based unified tensor modeling for wireless communication systems with application to blind multiuser equalization," *Signal Processing*, vol. 87, no. 2, pp. 337–351, 2007.
- [12] N. D. Sidiropoulos, G. B. Giannakis, and R. Bro, "Blind PARAFAC receivers for ds-cdma systems," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 3, pp. 810–823, 2000.
- [13] F. Roemer and M. Haardt, "Tensor-based channel estimation and iterative refinements for two-way relaying with multiple antennas and spatial reuse," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 11, pp. 5720–5735, Nov. 2010.
- [14] A. R. Fernandes, A. L. F. de Almeida, and D. Benevides da Costa, "Blind receiver for amplify-and-forward cooperative diversity scheme," in *2011 IEEE 12th International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC)*, 2011, pp. 546–550.
- [15] Y. Rong, M. R. Khandaker, and Y. Xiang, "Channel estimation of dual-hop mimo relay system via parallel factor analysis," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 11, no. 6, pp. 2224–2233, 2012.
- [16] C. A. Rolim Fernandes, A. L. F. de Almeida, and D. Benevides da Costa, "Unified tensor modeling for blind receivers in multiuser uplink cooperative systems," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 19, no. 5, pp. 247–250, 2012.
- [17] A. Y. Kibangou and A. L. F. de Almeida, "Distributed PARAFAC based DS-CDMA blind receiver for wireless sensor networks," in *Proceedings of the 11th IEEE International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC 2010)*, 2010.

- [18] R. A. Harshman, “Foundations of the PARAFAC procedure: Model and conditions for an ‘explanatory’ multi-mode factor analysis,” *UCLA Working Papers Phonetics*, vol. 16, pp. 1–84, Dec. 1970.
- [19] J. D. Carroll and J.-J. Chang, “Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of “Eckart-Young” decomposition,” *Psychometrika*, vol. 35, no. 3, pp. 283–319, 1970.
- [20] A. Cichocki, R. Zdunek, A. H. Phan, and S.-i. Amari, *Nonnegative matrix and tensor factorizations: applications to exploratory multi-way data analysis and blind source separation*. John Wiley & Sons, 2009.
- [21] R. Bro, “Multi-way analysis in the food industry models, algorithms and applications,” Tese, Royal Veterinary and Agricultural University, KVL Frederiksberg, Denmark, 1998.
- [22] T. G. Kolda and B. W. Bader, “Tensor decompositions and applications,” *SIAM review*, vol. 51, no. 3, pp. 455–500, 2009.
- [23] A. L. F. de Almeida, “Tensor modeling and signal processing for wireless communication systems,” Tese, Université de Nice-Sophia Antipolis - École Doctorale STIC, 2007.
- [24] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle, “A multilinear singular value decomposition,” *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 21, no. 4, pp. 1253–1278, 2000.
- [25] R. L. de Lacerda Neto, “Receptores MIMO baseados em algoritmo de decomposição PARAFAC,” Dissertação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2005.
- [26] F. L. Hitchcock, *The expression of a tensor or a polyadic as a sum of products*. J. Math. Phys., 1927.
- [27] R. B. Cattell, “Parallel proportional profiles and other principles for determining the choice of factors by rotation,” *Psychometrika*, vol. 9, no. 4, pp. 267–283, 1944.
- [28] L. R. Tucker, “Some mathematical notes on three-mode factor analysis,” *Psychometrika*, vol. 31, no. 3, pp. 279–311, 1966.
- [29] A. Cichocki, D. Mandic, A. Phan, C. Caiafa, G. Zhou, Q. Zhao, and L. De Lathauwer, “Tensor decompositions for signal processing applications from two-way to multiway component analysis,” *IEEE Signal Processing Magazine issue:accepted*, 2014.

- [30] J. Kruskal, "Three-way arrays: Rank and uniqueness of trilinear decompositions, with application to arithmetic complexity and statistics," *Linear algebra and its applications*, vol. 18, no. 2, pp. 95–138, 1977.
- [31] N. Sidiropoulos and R. Bro, "On the uniqueness of multilinear decomposition of n-way arrays," *Journal of chemometrics*, vol. 14, no. 3, pp. 229–239, 2000.
- [32] M. DeGroot, "Reaching a consensus," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 69, no. 345, pp. 118–121, 1974.
- [33] J. Tsitsiklis, "Problems in decentralized decision making and computation." DTIC Document, Tech. Rep., 1984.
- [34] J. Tsitsiklis, D. Bertsekas, and M. Athans, "Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, no. 9, pp. 803–812, 1986.
- [35] A. S. Asratian, *Bipartite graphs and their applications*. Cambridge University Press, 1998, no. 131.
- [36] C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 2000.
- [37] S. Liu and G. Trenkler, "Hadamard, Khatri-rao, Kronecker and other matrix products," *Int. J. Inform. Syst. Sci*, vol. 4, no. 1, pp. 160–177, 2008.
- [38] K. Liu, J. P. C. da Costa, A. L. F. de Almeida, and H. C. So, "A closed form solution to semi-blind joint symbol and channel estimation in mimo-ofdm systems," in *2012 IEEE International Conference on Signal Processing, Communication and Computing (ICSPCC)*, 2012, pp. 191–196.
- [39] J. P. C. da Costa, F. Roemer, M. Weis, and M. Haardt, "Robust rd parameter estimation via closed-form PARAFAC," in *Smart Antennas (WSA), 2010 International ITG Workshop on*. IEEE, 2010, pp. 99–106.
- [40] F. Roemer, "Advanced algebraic concepts for efficient multi-channel signal processing," Tese, Ilmenau University of Technology, 2013.
- [41] D. A. Harville, *Matrix algebra from a statistician's perspective*. Nova York: SPRINGER, 2008.
- [42] A. J. Laub, *Matrix analysis for scientists and engineers*. Philadelphia: SIAM, 2005.